Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Н. Работнов

(Москва)

§ 1. Для описания физических процессов, сопровождающихся последействием, Вольтерра [1] предложил использовать аппарат теории линейных интегральных уравнений с переменным верхним пределом.

Рассмотрим, например, линейное соотношение между напряжением и деформацией в упругом твердом теле

$$\sigma = E\varepsilon$$

Если ε есть функция времени, написанное уравнение определяет для данного момента единственным образом величину σ. Но можно предположить, что напряжения в момент времени t определяются не только деформацией в этот момент, но и всей предшествующей историей деформации тела.

Зависимость между σ и ε Вольтерра полагает при этом следующей:

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \varkappa \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.1}$$

Функцию $K(t-\tau)$ мы будем называть ядром релаксации. То обстоятельство, что ядро релаксации зависит от разности $t-\tau$, как доказал Вольтерра, вытекает из условия инвариантности величины σ относительно изменений начала отсчета времени.

Принимая в уравнении (1.1) нижний предел интеграла равным $-\infty$, мы охватываем всю историю тела от $t=-\infty$, что физически бессмысленно. Реальная история начинается с некоторого определенного момента.

Если технология изготовления материала обеспечивает получение его в таком состоянии, что никакие деформации в нем не происходят без приложения внешних сил, мы говорим, что он находится в начальном состоянии и история его начинается с момента приложения первой нагрузки. Этот момент мы принимаем за начало отсчета времени и полагаем в уравнении (1.1) нижний предел равным нулю вместо $-\infty$.

На соотношение (1.1) можно смотреть как на интегральное уравнение для функции $\varepsilon(t)$. Разрешая его, получим

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma(t) + \varkappa \int_{0}^{t} \Gamma(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.2}$$

Функцию $\Gamma(t-\tau)$ назовем ядром последействия. Как известно, ядро последействия выражается рядом Неймана

$$\Gamma = K + \varkappa K^{(2)} + \varkappa^2 K^{(3)} + \ldots$$

Переход от ядер последействия к ядрам релаксации можно производить формально, применяя символический метод Вольтерра. Запишем уравнение (1.1) следующим образом:

$$\sigma = \overline{E}\varepsilon = E(1-\varkappa K^*)\varepsilon \tag{1.3}$$

где K^* — сокращенное обозначение интегрального оператора:

$$K^* f = \int_0^t K(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Таким образом, формально сохраняется обычная запись закона Гука, только умножение на упругую константу заменено умножением на упругий оператор $\overline{E}$. В дальнейшем всюду буквы с чертой будут обозначать операторы, состоящие из двух частей: множителя и интегрального оператора. Последний мы отмечаем звездочкой.

Под произведением двух интегральных операторов L^* и M^* будем понимать новый оператор, ядро которого

$$|L^* M^*| = \int_\tau^t L(t-s)\, M(s-\tau)\, ds \tag{1.4}$$

В этой формуле символ оператора, заключенный в прямые скобки, обозначает ядро оператора, рассматриваемое как функция $t-\tau$. Тот же смысл имеют символы L, M, употребленные без звездочек.

Если ядра зависят от разности аргументов, операция перемножения операторов коммутативна, как показал Вольтерра.

Разрешим уравнение (1.3) формально относительно ε:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\overline{E}} = \frac{\sigma}{E} \frac{1}{1-\varkappa K^*}$$

Здесь $1/(1-\varkappa K^*)$ есть новый оператор. Разложим его формально в ряд, понимая возведение оператора в степень в смысле, установленном формулой (1.4):

$$\frac{1}{1-\varkappa K^*} = 1 + \varkappa K^* + \varkappa^2 K^{*2} + \varkappa^3 K^{*3} + \ldots$$

Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1+\varkappa\Gamma^*)\sigma,$$

что совпадает с формулой (1.2).

Заменяя в уравнениях теории упругости упругие константы упругими операторами, получим предложенные Вольтерра уравнения наследственной упругости. Будем записывать соотношения закона

Гука следующим образом:

$$X_x = \bar{\lambda}\theta + 2\bar{\mu}e_{xx}, \ldots \qquad X_y = \bar{\mu}e_{xy}, \ldots \tag{1.5}$$

Здесь

$$\bar{\lambda} = \lambda\,(1 + \Lambda^*), \qquad \bar{\mu} = \mu\,(1 + \mathrm{M}^*) \tag{1.6}$$

причем λ и μ — обычные постоянные Ламэ, Λ^* и M^* — интегральные операторы, ядра которых находятся из опыта.

Временные операции умножения на $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ и пространственные операции дифференцирования и интегрирования по координатам переставимы, поэтому любую задачу наследственной упругости следует решать так же, как задачу обычной теории упругости, и лишь в окончательном результате нужно заменить упругие константы упругими операторами.

Этот принцип будем называть принципом Вольтерра. Согласно принципу Вольтерра все результаты, не зависящие от упругих констант, сохраняют силу и в случае последействия. Так, например, плоское напряженное состояние при заданных на границе усилиях со временем не меняется. Это немедленно вытекает из теоремы М. Леви.

Сформулированный принцип Вольтерра позволяет принципиально решить любую задачу наследственной упругости, если известно ее решение в рамках классической теории. Вся трудность заключается в фактическом нахождении оператора, записываемого формально как результат некоторых алгебраических действий над операторами $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$.

Вместо операторов $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ удобно пользоваться операторами $\bar{E}$ и $\bar{\nu}$, соответствующими модулю Юнга и постоянной Пуассона. Они выражаются через $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ обычными формулами.

Введение двух независимых ядер в уравнения закона Гука создает весьма широкие возможности в отношении выбора их аналитической формы. Естественно ограничить эту свободу некоторыми рациональными условиями. Имеющиеся опытные данные позволяют утверждать с большой степенью вероятия, что объемная деформация чисто упруга и объемное последействие отсутствует. Потребуем, чтобы оператор объемного сжатия был постоянным:

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{1 - 2\nu}{E} = \mathrm{const}$$

Отсюда

$$\bar{\nu} = \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{2\nu} K^*\right) \tag{1.7}$$

Здесь K^* имеет тот же смысл, что в (1.1), причем принято $\varkappa = 1$. Рядом авторов[2,9] в качестве ядер предлагались экспоненциальные функции. Пусть, например,

$$\bar{E} = E\,(1 - K^*), \qquad K = \varkappa \exp\left[-\alpha\,(t - \tau)\right] \tag{1.8}$$

Если нагрузка, действующая на тело, постоянна, при решении задач этот оператор множится на постоянную. Произведения $\bar{E} \cdot 1$ и $\bar{\nu} \cdot 1$ стремятся соответственно к величинам

$$E' = E\frac{\nu}{\varkappa + \alpha} \qquad \nu' = \frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{2}\frac{E'}{E},$$

если ν определяется равенством (1.7)

Таким образом, состояние тела, свойства которого описываются при помощи оператора (1.8), асимптотически стремится к стационарному упругому состоянию, соответствующему упругим константам E' и ν'.

Рассмотрим некоторые примеры приложения принципа Вольтерра в самых общих чертах, не конкретизируя вида ядер.

1. *Изгиб и кручение.* Из результатов теории Сен-Венана следует, что распределение нормальных напряжений при изгибе, так же как касательных напряжений при кручении, остается тем же, что в классической теории. Касательные напряжения при изгибе меняют свое распределение со временем, поскольку оно зависит от упругого оператора $\bar{\nu}$. Отметим попутно ошибку в работе В. Г. Гоголадзе[2], считавшего, что при изгибе деформация в поперечном направлении есть $\nu y / \rho$, где ν — константа. Легко видеть, что при этом появляются нормальные напряжения на площадках, параллельных оси.

Знание оператора $\bar{E}$ позволяет вычислить прогиб балки в любом случае, когда решена задача изгиба в обычной постановке.

2. *Температурные задачи.* Полагая

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{\bar{E}}\,[X_x - \bar{\nu}(Y_y + Z_z)] + \alpha T$$

убеждаемся, что принцип Вольтера применим и к этим задачам в полной мере. Во многих случаях решение термо-упругой задачи зависит от произведения упругой постоянной на температуру T, причем в других местах упругие постоянные не фигурируют. Так, приводимые Тимошенко[3] на стр. 158 формулы для напряжений в стенках цилиндра содержат произведение $ET / (1-\nu)$. Положим

$$\frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}}\,T = \frac{E}{1-\nu}\,T'.$$

Здесь T' — некоторая «приведенная температура», закон изменения которой в функции времени известен. Наследственная термо-упругая задача решается формулами обычной теории, после того как температура T заменена через T'. Конечно, задачи такого рода рассматриваются как квази-статические, т. е. силами инерции пренебрегают.

3. *Равновесие упругой сферы.* Пример, когда упругие операторы входят в результат более сложным образом и применение принципа Вольтерра приводит к необходимости построения новой трансцендентной функции, принадлежит самому автору теории[1]. Рассмотрим более простой случай, когда на поверхности сферы заданы перемещения. Соответствующая упругая задача сводится к нахождению трех гармо-

нических функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ по заданным значениям на поверхности,

$$\psi = -Ar^{\beta} - \int_0^r \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right) d\rho \tag{1.9}$$

где A и β — упругие постоянные[4].

При учете последействия A и β становятся упругими операторами $\overline{A}$ и $\overline{\beta}$ соответственно. Положим

$$\theta = \overline{A}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right)$$

Пусть $\overline{\beta} = \beta + H^*$. Введем, следуя Вольтерра, функцию

$$V(z, t-\tau) = \left| z^* H + \frac{z^2}{2!} H^{*2} + \frac{z^3}{3!} H^{*3} + \ldots \right|$$

Тогда

$$\left|\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\beta}\right| = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\beta}\left[1 + V\left(\log\frac{\rho}{r},\ t-\tau\right)\right]$$

Из (1.9) получаем интегральные соотношения, решающие задачу:

$$\psi = -r^{-\beta}\int_0^r \rho^{\beta-1}\left[\theta + \int_0^t \theta(\rho, \tau) V\left(\log\frac{\rho}{r}, t-\tau\right) d\tau\right] d\rho \tag{1.10}$$

§ 2. Основная трудность в наследственной теории упругости заключается в фактическом выполнении преобразований операторов, которые весьма просто записываются символически. Почти все авторы, занимающиеся приложениями теории наследственности, выбирали в качестве ядер для своих операторов или просто экспоненциальные функции, или суммы конечного числа таких функций. Резольвента экспоненциального ядра всегда будет также экспоненциальным ядром, следовательно, при вычислении всех возможных упругих операторов мы не выходим за пределы класса экспоненциальных ядер (исключая некоторые особые случаи).

Известно, также, что интегральное уравнение с экспоненциальным ядром сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами и теория наследственности в этом случае интерпретируется как теория упруго-вязкого или упруго-релаксирующего тела.

С другой стороны, нужно признать, что обработка опытных данных с помощью экспоненциальных ядер приводит к неудовлетворительному результату. Экспериментально определяемые ядра последействия и релаксации обладают особенностью при $t-\tau=0$. Так, Дюффинг[5], экспериментируя над ремнями, нашел, что

$$\Gamma = A(t-\tau)^{-\alpha} \qquad (\alpha = 4/5)$$

А. П. Бронский[6] обрабатывал опыты над резиной с помощью ядер

$$K = (t-\tau)^{-\alpha} \exp\left[-(t-\tau)^{1-\alpha}\right]$$

Резольвенту ядра Бронского найти не удалось, и практическое использование этих ядер для расчета затруднительно.

Нам удалось построить класс функций, которые можно назвать экспоненциальными функциями дробного порядка. Если использовать эти функции в качестве ядер, как оказывается, построение резольвенты и вообще вычисление любого сложного оператора, могущего встретиться в теории наследственой упругости, приводит к ядрам, выражающимся через функции того же класса по весьма простым правилам. Обладая той же особенностью, что ядра Бронского, и заключая в себе ядра Дюффинга, как частный случай, они позволяют достаточно хорошо описать действительные процессы последействия.

Будем отправляться от оператора Абеля порядка α:

$$J_\alpha = \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (\alpha > -1) \tag{2.1}$$

Перемножение двух операторов Абеля различных порядков приводит к эйлеровым интегралам и позволяет установить теорему умножения

$$J_\alpha^* J_\beta^* = J^*_{\alpha+\beta+1} \tag{2.2}$$

Отсюда следует, в частности, что $J_\alpha^{*n} = J^*_{n\alpha+n+1}$.

Определим оператор $Э_\alpha^*(\beta)$ следующим соотношением:

$$\frac{1}{1-\beta J_\alpha^*} = 1 + \beta Э_\alpha^*(\beta) \tag{2.3}$$

Иными словами, $Э_\alpha^*(\beta)$ есть резольвента ядра J_α, т. е.

$$Э_\alpha^*(\beta) = J_\alpha^* + \beta J_\alpha^{*2} + \beta^2 J_\alpha^{*3} + \ldots \tag{2.4}$$

Соответствующее ядро

$$Э_\alpha(\beta, t-\tau) = (t-\tau)^\alpha \sum_0^\infty \frac{\beta^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \tag{2.5}$$

Сходимость ряда (2.5) при любых значениях аргумента очевидна. Из (2.3) следует

$$J_\alpha^* Э_\alpha^*(\beta) = \frac{1}{\beta} Э_\alpha^*(\beta) - \frac{1}{\beta} J_\alpha^*$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J^{\alpha*n} Э_\alpha(\beta) = \frac{1}{\beta^n} Э_\alpha^*(\beta) - \frac{1}{\beta^n} J_\alpha^* - \frac{1}{\beta^{n-1}} J_\alpha^{*2} - \ldots - \frac{1}{\beta} J_\alpha^{*n} \tag{2.6}$$

Докажем теперь основную теорему умножения $Э$-операторов:

$$Э_\alpha^*(x)\, Э_\alpha^*(y) = \frac{Э_\alpha^*(x) - Э_\alpha^*(y)}{x-y} \qquad (x \neq y). \tag{2.7}$$

Положив для определенности $x < y$, запишем

$$Э_\alpha^*(x)\, Э_\alpha(y) = [J_\alpha^* + x J_\alpha^{*2} + x^2 J_\alpha^{*2} + \ldots]\, Э_\alpha^*(y) =$$

$$= \frac{1}{y} Э_\alpha^*(y) - \frac{1}{y} J_\alpha^* +$$

$$+ \frac{x}{y^2} Э_\alpha^*(y) - \frac{x}{y} J_\alpha^* - \frac{x}{y} J_\alpha^{*2} +$$

$$+ \frac{x^2}{y^3} Э_\alpha^*(y) - \frac{x^2}{y^3} J_\alpha^* - \frac{x^2}{y^2} J_\alpha^{*2} - \frac{x^2}{y} J_\alpha^* +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Суммируя по столбцам, получаем после преобразований соотношение (2.7). Случай, когда $x = y$, представляет исключение. Оператор

$$Э_{\alpha}^{*2}(x) = \frac{\partial Э_{\alpha}^{*}}{\partial x}$$

имеет своим ядром, вообще говоря, новую трансцендентную, ряд для которой получается в результате дифференцирования ряда (2.5) по параметру. Если $\alpha = 0$, то

$$| Э_0^{*n} | = \exp[x(t-\tau)] \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Теорема умножения $Э$-операторов, выражаемая формулой (2.7), позволяет разрешить интегральное уравнение, ядро которого есть экспоненциальная функция любого порядка, причем резольвента будет, вообще говоря, экспоненциальной функцией того же порядка. А именно, из (2.7) следует

$$\frac{1}{1 - \varkappa Э^{*}(\beta)} = 1 + \varkappa Э^{*}(\varkappa + \beta)$$

Для операторов нулевого порядка, ядра которых являются обычными экспоненциальными функциями, этот результат очевиден. Заметим попутно, что при $\alpha = -1/2$ ядро $Э$-оператора может быть выражено через интеграл вероятностей

$$Э_{-1/2}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \beta \exp[\beta^2 (t-\tau)] [1 + \Phi\ (\beta \sqrt{t-\tau})]$$

§ 3. Как уже отмечалось, интегральные соотношения с экспоненциальными ядрами нулевого порядка эквивалентны дифференциальным соотношениям. Аналогично интегральное соотношение с $Э$-операторами произвольного порядка соответствует дифференциальному уравнению с дробными производными, которое разрешается при помощи $Э$-функций. Вряд ли целесообразно развивать эту точку зрения, поскольку дробные производные деформаций или напряжений лишены наглядного механического смысла, а вычисления удобнее вести непосредственно с интегральными операторами.

Наоборот, во многих случаях целесообразно переходить от дифференциальных соотношений к интегральным. Применение принципа Вольтерра и правил действия над операторами [формула (2.7)] позволяет рассмотреть многие задачи механики для разнообразных сред.

Для описания неупругих явлений в твердых телах применяют зависимости типа

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m \varepsilon}{dt^m} \tag{3.1}$$

Если p есть наибольшее из чисел n и m, умножаем обе части равенства на J_0^{*p}, получим

$$A(J_0^{*}) \sigma = B(J_0^{*}) \varepsilon \tag{3.2}$$

Здесь A и B — полиномы.

Если $n=m$ и полиномы A и B не имеют кратных корней, уравнение (3.2) может быть разрешено относительно σ и ε. Решая его относительно σ, например, разложим частное двух полиномов на простейшие дроби вида $A_i/(1-\beta_i J_0^*)$ и, применяя формулу (2.3), придем к интегральному уравнению

$$\sigma=\left[A_0+\sum A_i\beta_i \mathcal{E}_0^*(\beta_i)\right]\varepsilon \tag{3.3}$$

Если $m\neq n$, уравнение (3.2) может быть разрешено в экспоненциальных операторах только относительно одной неизвестной, так как операция $1/J_0^*$ не является интегральной. Например, если $m<n$, соотношение (3.3) сохраняет силу, но выразить аналогичным образом ε через σ нельзя. Это следует из того, что при $m<n$ постоянная в уравнении (3.3) равна нулю и упругий оператор в правой части оказывается вырожденным в том смысле, что сохраняется только его интегральная часть.

Рассмотрим несколько примеров применения этого метода к различным гипотетическим средам.

1. *Вязко-сжимаемое тело* (Н. А. Слезкин[7]). Движение вязко-сжимаемой среды описано Н. А. Слезкиным уравнениями

$$X_x=k\int_0^t\theta\,dt+\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots\ Y_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \ldots$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости, θ — скорость объемного расширения. Поступая со скоростями так же, как со смещениями, запишем эти уравнения в обычной форме закона Гука (1.5), причем

$$\bar\lambda=\lambda\left(1+\frac{k}{\lambda}J_0^*\right),\qquad \bar\mu=\mu \tag{3.4}$$

Н. А. Слезкин решил задачу о погружении диска в вязко-сжимаемую среду. Покажем, как применяется в этом случае принцип Вольтерра. Берем хорошо известную формулу, дающую величину осадки круглого штампа на упругом полупространстве, заменив в ней перемещение через скорость v:

$$P=\frac{4a\mu}{1-\nu}v$$

Дело сводится к вычислению оператора

$$\frac{\mu}{1-\bar\nu}=\frac{2\mu(\bar\lambda+\mu)}{\bar\lambda+2\mu}$$

Внося значение $\bar\lambda$ по формуле (3.4), получим

$$\frac{\mu}{1-\bar\nu}=2\left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{k\mu}{(2\mu+\lambda)^2}\mathcal{E}_0^*\left(-\frac{k}{2\mu+\lambda}\right)\right]$$

При постоянной скорости v получим формулу Н. А. Слезкина

$$P=\frac{8a\mu V}{\lambda+2\mu}\left[\lambda+2\mu-\mu\exp\frac{-kt}{\lambda+2\mu}\right]$$

2. *Тело Максвелла*

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{E}\left(\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{T}\right)$$

Умножая на J_0^*, получим

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\left(1+\frac{1}{T}J_0^*\right)\sigma$$

3. *Упруго-вязкая среда*

$$\sigma=E\varepsilon+\mu\frac{d\varepsilon}{dt}$$

Запишем это уравнение в форме обычного закона Гука

$$\varepsilon=\frac{J_0^*}{\mu+EJ_0^*}\sigma$$

Оператор в правой части оказываатся вырожденным и обращения не допускает.

4. *Упруго-релаксирующее тело* (А. Ю. Ишлинский[8]). Для описания одномерной деформации А. Ю. Ишлинский предложил уравнение

$$nH\frac{d\varepsilon}{dt}+E\varepsilon=\sigma+n\frac{d\sigma}{dt}$$

Соответствующий упругий оператор

$$\overline{E}=H\left[1-\frac{E-H}{nH}\cdot Э_0^*\left(-\frac{1}{n}\right)\right]$$

Перейдем теперь к рассмотрению более сложных задач, когда свойства тела описываются операторами дробного порядка α и решается задача неодномерного напряженного состояния. В громадном большинстве практически важных случаев граничные условия времени не содержат. Или на тело действуют неизменные во времени нагрузки (ползучесть), или поддерживается неизменной величина заданных заранее деформаций (простая релаксация), или внешняя упругая связь осуществляет заданное соотношение между деформацией и нагрузкой (сложная релаксация). Во всех этих случаях силы или деформации на границе линейно входят в решение, будучи умноженными на некоторые упругие операторы, выражающиеся или через интегральные операторы $Э_\alpha^*$, или в крайнем случае через $Э_\alpha^{*2}$. Поэтому все расчеты требуют табулирования одной только функции и в крайнем случае ее производной. Положим

$$\Phi_\alpha(x)=\sum_1^\infty\frac{x^n}{\Gamma[1+n(1+\alpha)]} \tag{3.5}$$

Тогда

$$Э_\alpha^*(\beta)\cdot 1=\frac{1}{\beta}\Phi(\beta t^{1+\alpha})$$

$$Э_\alpha^{*2}(\beta)\cdot 1=\frac{t^{1+\alpha}}{\beta}\Phi'(\beta t^{1+\alpha})-\frac{1}{\beta^2}\Phi(\beta t^{1+\alpha}) \tag{3.6}$$

Если $\beta=0$:

$$Э_\alpha^*(0)\cdot 1=\frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)},\qquad Э_\alpha^{*2}(0)\cdot 1=\frac{t^{2(1+\alpha)}}{\Gamma(3+\alpha)} \tag{3.7}$$

В качестве примера приведем вычисления, необходимые при расчете пластинки, на которую действует постоянная нагрузка.

Выражение прогиба, даваемое формулой теории упругости, всегда содержит в числителе величину нагрузки, а в знаменателе — цилиндрическую жесткость, в выражение которой входит комбинация упругих постоянных $(1-\nu^2)/E$. Формула наследственной теории упругости содержит оператор $(1-\overline{\nu^2})/\overline{E}$, который множится на постоянную, следовательно, нужно вычислить произведение

$$\frac{1-\overline{\nu^2}}{\overline{E}}\cdot 1$$

и заменить этой известной функцией времени комбинацию упругих постоянных $(1-\nu^2)/E$ в обычном решении.

Пусть, например, известен оператор $\overline{E}$:

$$\overline{E} = E\,[1-\varkappa\, \mathcal{Э}_{\alpha}^{*}(\mu)]$$

Пренебрегая объемным последействием, по формуле (1.7) получим

$$\overline{\nu} = \nu\left[1+\varkappa\,\frac{1-2\nu}{2\nu}\,\mathcal{Э}_{\alpha}^{*}(\mu)\right]$$

и после несложных вычислений, основанных на применении формулы (2.7), найдем

$$\frac{1-\overline{\nu^2}}{\overline{E}} = \frac{1}{E}\left[1-\nu^2+\frac{\varkappa}{4}(1-2\nu)^2\,\mathcal{Э}_{\alpha}^{*}(\mu)+\frac{3}{4}\,\mathcal{Э}_{\alpha}^{*}(\varkappa+\mu)\right] \qquad (3.8)$$

и далее

$$\frac{1-\overline{\nu^2}}{\overline{E}}\cdot 1 = \frac{1}{E}\left[1-\nu^2+\frac{\varkappa}{4\mu}(1-2\nu^2)\,\Phi(\mu t^{1+\alpha})+\frac{3}{4(\varkappa+\mu)}\,\Phi\{(\varkappa+\mu)\,t^{1+\alpha}\}\right] \qquad (3.9)$$

Если не пренебрегать объемным последействием, оператор $\overline{\nu}$ выразится через $\mathcal{Э}$-оператор другого аргумента и $\mathcal{Э}_{\alpha}^{*2}$ не сократится. Соответствующая формула будет содержать, кроме функции Φ, ее производную.

Поступила в редакцию
3 X 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra. Leçons sur les fonctions de lignes. Paris. Gauthier-Villard. 1913.
2. Гоголадзе В. Г.. Труды Сейсмологического ин-та. 1938. № 87.
3. Тимошенко С. П.. Сопротивление материалов. ГТТИ. 1933. Т. 2.
4. Треффц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ. 1933.
5. Duffing G. Forschung auf dem Geb. des Ingenieurwesens. 1931. Bd. 2. Nr. 3.
6. Бронский А. П. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 1.
7. Слезкин Н. А. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 3.
8. Ишлинский А. Ю. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1.
9. Розовский М. И. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.