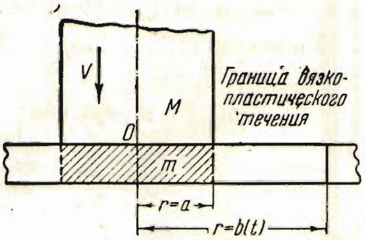
Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

К ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМУ ТЕЧЕНИЮ ПРИ УДАРЕ ЦИЛИНДРА ПО ПЛАСТИНКЕ

Ф. А. Бахшиян

(Москва)

§ 1. Пусть цилиндр радиуса a и массы M ударяется о бесконечную пластинку (фиг. 1) толщиной h со скоростью V. Рассмотрим вязко-пластическое течение, которое возникает в пластинке. Начало цилиндрической системы координат выберем в плоскости пластинки в центре основания цилиндра в момент контакта. Будем предполагать, что пластинка работает только на сдвиг; практически это имеет место либо при больших скоростях удара V, либо когда масса цилиндра M много больше массы m материала пластинки под площадью основания цилиндра, либо, наконец, при некоторой комбинации этих факторов.



Фиг. 1.

При решении этой задачи будем исходить из теории вязко-пластического течения, развитой А. А. Ильюшиным [1]. В силу симметрии отличные от нуля компоненты скорости и напряжения зависят только от радиуса r, и из уравнений движения остается одно:

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}\qquad\left(\tau_{rz}=\pm k+\mu e_{rz},\quad e_{rz}=\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

Здесь τ_{rz} — сдвигающее напряжение [1], w — скорость перемещения по направлению удара, k — пластическая постоянная, ρ — плотность материала пластинки, μ — коэффициент вязкости.

Так как $\partial w/\partial r<0$, а в пластической среде $|\tau_{rz}|\geqslant k$, то перед k оставляем отрицательный знак. Получаем уравнение движения в виде

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\;\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{k}{r}\tag{1.1}$$

К этому следует присоединить начальные и граничные условия

$$w=\begin{cases}0 & (r>a)\\ V & (r=a)\end{cases}\qquad\text{при}\quad t=0\tag{1.2}$$

$$M\frac{\partial w}{\partial t}=2\pi ah\left(-k+\mu\frac{\partial w}{\partial t}\right)\qquad\text{при}\quad r=a\tag{1.3}$$

При $r = b(t)$, т. е. на границе вязко-пластического течения, скорости движения и скольжения исчезают, поэтому

$$w(b, t) = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=b} = 0 \tag{1.4}$$

Первое из этих условий вытекает из того обстоятельства, что скорость упругой волны велика по сравнению со скоростью вязко-пластического течения. Нахождение решения уравнения (1.1), удовлетворяющего всем поставленным условиям, представляет значительные трудности. Ниже мы ограничиваемся случаем пластинки с заданной границей. Тогда второе из условий (1.4) отпадает.

Уравнение (1.1) в безразмерных переменных $x = r/a$, $\tau = kt/\mu$, $u = w/V$ имеет вид

$$RS\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{S}{x} \qquad \left(S = \frac{ak}{\mu V},\quad R = \frac{aV}{\nu}\right) \tag{1.5}$$

где R и S — так называемые числа Сен-Венана и Рейнольдса соответственно, ν — кинематический коэффициент вязкости. Существенно, что вязко-пластическое течение вполне определяется заданием двух параметров — чисел Сен-Венана и Рейнольдса.

Условия (1.2), (1.3) и (1.4) в новых переменных будут

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \qquad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{1.6}$$

$$RSM\,\frac{\partial u}{\partial \tau} = 2m\cdot\left(-S + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad \text{при} \quad x = 1 \tag{1.7}$$

$$u(\lambda, \tau) = 0 \qquad \text{при} \quad x = \lambda = \frac{b}{a} \tag{1.8}$$

Напряжение τ_{rz} выражается формулой

$$\tau_{rz} = = k\left(1 - \frac{1}{S}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

§ 2. Если удар происходит с большой начальной скоростью или масса цилиндра велика, то можно считать, что скорость цилиндра изменяется незначительно, т. е. условие (1.7) можно приближенно заменить таким: $u(1, \tau) = 1$.

Для интегрирования уравнения (1.5) положим

$$u = f(x) - u_1(x, \tau) \tag{2.1}$$

где

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{df}{dx} - \frac{S}{x} = 0, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \nu_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) \qquad \left(\nu_1 = \frac{1}{RS}\right) \tag{2.2}$$

Кроме того, f и u_1 подчиняются граничным условиям

$$f(1) = 1, \qquad f(\lambda) = 0, \qquad u_1(1, \tau) = 0, \qquad u_1(\lambda, \tau) = 0 \tag{2.3}$$

Находим

$$f(x) = 1 + S(x-1) - \frac{1 + S(\lambda - 1)}{\log \lambda}\,\log x, \qquad u_1 = \sum A_n Z_0(\alpha_n x)\exp(-\alpha_n^2 \nu_1 \tau) \tag{2.4}$$

Здесь Z_m есть линейная комбинация из функций Бесселя первого и второго рода определенного порядка с постоянным параметром q

$$Z_m = J_m + qN_m$$

Параметр q определяется любым из уравнений $Z_0(\alpha)=0$, $Z_0(\alpha\lambda)=0$, а α_n — корень уравнения

$$J_0(\alpha)N_0(\lambda\alpha) - J_0(\lambda\alpha)N_0(\alpha) = 0 \qquad (2.5)$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество положительных корней. Бóльшие из них определяются простой формулой $\alpha_n = n\pi/(\lambda-1)$. Таким образом,

$$u(x,\tau) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_0(\alpha_n x)\exp(-\alpha_n^2 \nu_1 \tau) \qquad (2.6)$$

Решение (2.6) удовлетворяет начальному условию, если имеет место разложение

$$f(x) = \sum A_n Z_0(\alpha_n x)$$

Коэффициенты такого разложения определяются формулой

$$A_n = \frac{2B_n}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha_n) - Z_1^2(\alpha_n)} \qquad \left(B_n = \int_1^{\lambda} x f(x) Z_0(\alpha_n x)\,dx\right)$$

Стоящий в числителе интеграл B_n упрощается интегрированием по частям, после чего окончательно получаем

$$u(x,\tau) = f(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha Z_1(\alpha) + ZC_n}{\alpha^2[\lambda^2 Z_1^2(\alpha\lambda) - Z_1^2(\alpha)]} Z_0(\alpha x)\exp(-\alpha^2\nu_1\tau) \qquad (2.7)$$

$$\left(C_n = \int_1^{\lambda} Z_0(\alpha x)\,dx\right)$$

Здесь и в дальнейшем индексы при α опущены.

Свободные от знака интеграла члены в (2.7) выражаются через единственную функцию Бесселя N_0. Действительно, имеем

$$Z_1(\alpha) = J_1(\alpha) + qN(\alpha), \qquad q = -\frac{J_0(\alpha)}{N_0(\alpha)}$$

Следовательно,

$$Z_1(\alpha) = \frac{1}{N_0(\alpha)}[J_1(\alpha)N_0(\alpha) - J_0(\alpha)N_1(\alpha)] = \frac{1}{N_0(\alpha)}[J_0(\alpha)N_0'(\alpha) - J_0'(\alpha)N_0(\alpha)]$$

В скобках получился детерминант Вронского для функций Бесселя, который равен $2/\pi\alpha$. Отсюда

$$Z_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha N_0(\alpha)}, \qquad Z_1(\lambda\alpha) = \frac{2}{\pi\lambda\alpha N_0(\lambda\alpha)}$$

Таким образом,

$$\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha) - Z_1^2(\alpha) = \frac{4}{\pi^2\alpha^2}\left[\frac{1}{N_0^2(\lambda\alpha)} - \frac{1}{N_0^2(\alpha)}\right]$$

Эти соотношения позволяют выяснить характер напряжений в начальный момент. Так как функция Z_0 в интервале $(1, \lambda)$ особенностей не имеет, то по теореме о среднем

$$C_n = \int_1^\lambda Z_0(\alpha x)\, dx = (\lambda - 1)\, Z_0(\lambda_1 \alpha) \qquad (1 < \lambda_1 < \lambda)$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) - 2\sum \frac{Z_1(\alpha)\, Z_1(\alpha x)}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha) - Z_1^2(\alpha)} - 2S \sum \frac{(\lambda - 1)\, Z_0(\lambda_1\alpha)\, Z_1(\alpha x)}{\alpha\,[\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha) - Z_1^2(\alpha)]} \qquad (2.8)$$

Начиная с некоторого n, имеем $\alpha_n = n\pi / (\lambda - 1)$, причем для таких α бесселевы функции заменяются их асимптотическими выражениями. Вычисления дают

$$\frac{N_0(\alpha)}{N_0(\lambda\alpha)} = (-1)^n \sqrt{\lambda}, \qquad \frac{Z_1(\alpha x)\, Z_1(\alpha)}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha) - Z_1^2(\alpha)} = \frac{1}{(\lambda - 1)\sqrt{x}} \cos\frac{(x-1)\, n\pi}{\lambda - 1}$$

$$\frac{Z_1(\alpha x)\, Z_0(\lambda_1\alpha)}{\alpha\,[\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha) - Z_1^2(\alpha)]} = -\frac{1}{n\pi\sqrt{\lambda_1 x}} \cos\frac{(x-1)\, n\pi}{\lambda - 1} \sin\frac{(\lambda - 1)\, n\pi}{\lambda - 1}$$

При $\tau = 0$ выражение для $\partial u / \partial x$ содержит ряды

$$\sum_{n=p}^{\infty} \cos\frac{(x-1)\, n\pi}{\lambda - 1}, \qquad \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\frac{(x-1)\, n\pi}{\lambda - 1} \sin\frac{(\lambda_1 - 1) n\pi}{\lambda - 1} \qquad (p > 5)$$

Сумма первого ряда равна ∞ при $x = 1$, т. е. напряжение бесконечно на внутренней границе в начальный момент. При $x = \lambda$ первый ряд расходящийся, но с конечной суммой. Второй ряд сходящийся для любого x. Следовательно, при любом $x \neq 1$ напряжения конечны в начальный момент.

Этот результат позволяет судить о распространении вязко-пластического состояния в неограниченной пластинке: в отличие от вязкой жидкости вязко-пластическое состояние охватывает конечную область в начальный момент. Заметим, что содержащийся в уравнении движения «источник» S/x зависит от k и μ. Эффект влияния вязкости металла значителен при больших скоростях деформации.

§ 3. В предыдущем параграфе мы заменили динамическое условие (1.7) кинематическим условием. Решим теперь уравнение (1.5) при условии (1.7). Полагая, как раньше, $u = f(x) - u_1(x, \tau)$, получим

$$u = c_1 + c_2 \log x + Sx - \sum A\, Z_0(\alpha x) \exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau) \qquad (3.1)$$

Далее

$$2m\left(-S + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2mc_2 + 2m \sum \alpha A\, Z_1(\alpha x) \exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau)$$

$$MRS \frac{\partial u}{\partial x} = \sum \alpha^2 \nu_1 MRS\, Z_0(\alpha x) \exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau)$$

На основании (1.7) должно быть

$$-2mc_2 + \sum A\alpha\,[\alpha M\, Z_0(\alpha) - 2m\, Z_1(\alpha)] \exp(-\alpha^2 \nu_1) = 0$$

для всех τ. Отсюда

$$c_2 = 0, \qquad \alpha Z_0(\alpha) - 2\delta\, Z_1(\alpha) = 0 \qquad (\delta = m / M)$$

Кроме того, из остальных граничных условий $c_1 + \lambda S = 0$, $Z_0(\lambda\alpha) = 0$.

Значит, в этом случае α и q определяются из уравнений

$$Z_0(\lambda\alpha)=0, \qquad \alpha Z_0(\alpha)-2\delta Z_1(\alpha)=0$$

По исключении q для α получается уравнение

$$\alpha\,[J_0(\alpha)\,N(\lambda\alpha)-J_0(\lambda\alpha)\,N_0(\alpha)]-2\delta\,[J_1(\alpha)\,N_0(\lambda\alpha)-J_0(\lambda\alpha)\,N_1(\alpha)]=0 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) также имеет бесчисленное множество положительных корней. Бóльшие из них совпадают с числами

$$\frac{x}{\lambda-1}=2\delta\operatorname{ctg}x$$

Можно показать, что корни уравнения уменьшаются с уменьшением δ. Начальное условие (1.7) приводит к равенству

$$\sum AZ_0(\alpha x)=\varphi(x)=\begin{cases}-S(\lambda-x) & (x>1)\\ -S(\lambda-1)+1 & (x=1)\end{cases}$$

Введем обозначение

$$\int_1^\lambda x\,Z_0(\alpha_n x)\,Z_0(\alpha_m x)\,dx=C_{nm}, \qquad \int_0^\lambda x\,\varphi(x)\,Z_0(\alpha_n x)\,dx=D_n$$

Тогда для определения A_n получим бесконечную систему уравнений

$$\sum A_n C_{nm}=D_n \qquad (n,m,1,2,\ldots)$$

Однако присутствие в решении быстро убывающего экспоненциального члена позволяет пользоваться сильно укороченной системой.

§ 4. Аналогично тому, как делается в баллистике, можно воспользоваться решением (2.7) для приближенного решения задачи о пробивании пластинки. Считая скорость ударяющего тела постоянной за период удара, вычисляем силу сопротивления P_a, которое испытывает тело, в функции времени и скорости $P_a=f(V,t)=f(V,y/V)$.

Естественно предположить, что и при переменной скорости эта сила приближенно представляется функцией $f(\dot y, y/\dot y)$, где y — путь, проходимый телом, $\dot y$ — производная по времени.

Полагая $x=1$, заменяя S через скорость и вводя обозначения

$$E_n=\frac{2Z_1\alpha}{\alpha\,[\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha)\,Z_1^2(\alpha)]}\int_1^\lambda Z_0(\alpha x)\,dx, \qquad \frac{\lambda-1}{\log\lambda}=n_1$$

$$F_n=\frac{2\mu}{ak}\,\frac{Z_1^2(a)}{\lambda^2 Z_1^2(\lambda\alpha)-Z_2^2(\alpha)}, \qquad \alpha^2\nu_1\tau=Nt, \qquad \frac{\mu}{ak\log\lambda}=n_2$$

получим

$$M\ddot y+2\pi ahk\left\{n_1+n_2\dot y+\sum(E_n+F_n\dot y)\exp\frac{-Ny}{\dot y}\right\}=0 \qquad (4.1)$$

Заменой $p=\dot y$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$Mp\frac{dp}{dy}+2\pi ahk\left\{n_1+n_2p+\sum(E_n+F_np)\exp\frac{-Ny}{p}\right\}=0. \qquad (4.2)$$

с единственным начальным условием $p=V$ при $y=0$.

Уравнение (4.2) легко интегрируется приближенно, с точностью до выбранной степени y. Если, например, ограничиться членами до y^2 включительно, то уравнение (4.1) перейдет в

$$\frac{dy}{dt} = V + a_1 y + a_2 y^2$$

где a_1 и a_2 определяются соотношениями

$$MVa_1 + 2\pi ahk \left[n_1 + n_2 V + \sum (E_n + F_n V) \right] = 0$$

$$MVa_2 + Ma_1^2 + 2\pi ahk \left\{ n_1 + n_2 a_1 + \sum \left[E_n + F_n a_1 - N(E_n + F_n V) \right] \right\} = 0$$

Далее, из (2.7) определяем момент $t = t^*$, при котором сдвиг γ достигает критического значения γ^*; подставляем t^* в решение уравнения (4.2) и результат приравниваем нулю. Получаемое уравнение и определит начальную скорость V.

Оценим теперь инерционные члены в решении (2.7). Очевидно, их влияние мало при $\exp(-\alpha^2 \nu_1 \tau) \ll 1$. Так как время удара t_1 будет порядка $\gamma^*(b-a)/V$, то должно быть

$$\gamma^* \frac{b-a}{V} \alpha \nu_1 \frac{k}{\mu} \gg 1,$$

или

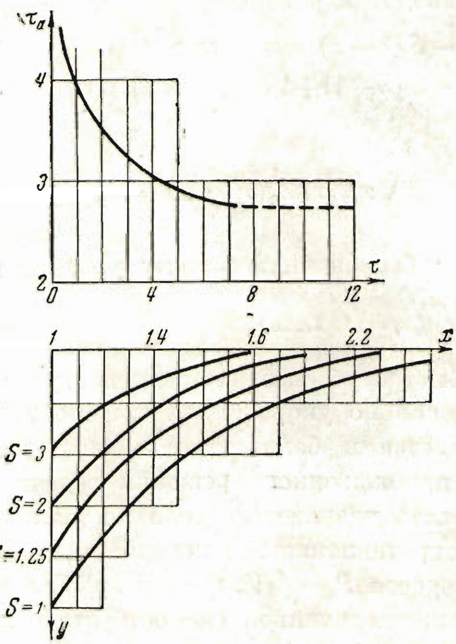
$$R < \alpha^2 \gamma^* (\lambda - 1)$$

При

$$k = 4000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \mu = 0.4 \frac{\text{кг} \times \text{сек}}{\text{см}^2}$$

$$a = 10 \text{ см}, \quad \lambda = 5$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \frac{\text{кг} \times \text{сек}^2}{\text{см}^4}$$



Фиг. 2.

это условие не выполняется, если начальная скорость равна или больше 100 м/сек. На фиг. 2 представлены графики изменений прогиба и напряжения за время удара, причем прогиб на внутренней границе принят за единицу.

Поступила в редакцию
13 XI 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. К вопросу о вязко-пластичном течении материала. Труды конференции по пластическим деформациям. 1938.
2. Кузьмин. Бесселевы функции. ОНТИ. 1935.