

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ (СКРУЧИВАЮЩИЙ УДАР)

Х. А. Рахматулин

(Москва)

В работе исследуются распространения деформаций в упруго-пластическом пространстве при мгновенном приложен и скручивающего момента к абсолютно твердому бесконечно длинному цилиндру, заделанному в это пространство.

Рассмотрены два случая изменения приложенного к цилиндру момента.

В первом предполагается, что действующий на цилиндр момент возрастает во времени. Для этого случая подсчитаны законы изменения деформации в зоне упругих деформаций и на фронте пластических волн. Установлено, что радиус распространения волн сильного разрыва не зависит от закона нарастания приложенного момента, а зависит только от начального значения этого момента.

Во втором случае рассматриваются законы распространения деформации, когда приложенный момент мгновенно возникает, а затем убывает во времени.

§ 1. Основное уравнение и граничные условия

Выведем уравнение движения. Пусть $w = w(r, t)$ — тангенциальное смещение упруго-пластического пространства. Обозначая через τ напряжение сдвига, ρ — массовую плотность, напишем уравнение момента количества движения для цилиндра, концентрического с упомянутым и имеющего внутренний радиус r и внешний радиус $r + dr$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[2\pi r^2 dr \rho \frac{\partial w}{\partial t} \right] = -2\pi r^2 \tau - \frac{\partial}{\partial r} [2\pi r^2 \tau] dr + 2\pi r^2 \tau$$

Отсюда

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \tau \quad (1.1)$$

Так как

$$\tau = \tau(\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.2)$$

то из (1.1) имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + b \quad \left(b = \frac{a^2 w}{r^2} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\tau}{\rho r} \right) \quad (1.3)$$

Характеристики этого уравнения имеют вид

$$dr = \pm a dt, \quad dw_t = \pm a dw_r + b dt \quad \left(w_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad w_t = \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (1.4)$$

Предположим теперь, что внутри цилиндрической поверхности радиуса r_0 внезапно приложен крутящий момент, воспроизводящий напряжения, превосходящие предел упругости материала.

Докажем существование двух поверхностей разрыва, распространяющихся со скоростями a_0 и a_1 .

Начальные и граничные условия задачи будут

$$w_t = w_r = 0 \quad \text{при } t = 0, r_0 \leq r < \infty; \quad \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = f(t) \quad \text{при } r = r_0$$

Из начальных условий следует, что максимальная скорость распространения возмущений a_0 .

Так как граничные условия разрывные (не совместные с начальными), то волна a_0 есть волна сильного разрыва.

Как покажем ниже, за фронтом волны a_0 остается область упругих деформаций; поэтому уравнение движения в указанной области линейное и, следовательно, поверхность сильного разрыва совпадает с характеристикой. Поэтому на фронте указанной волны имеем три условия:

1) условие непрерывности смещения

$$w = 0 \quad (1.5)$$

2) уравнение количества движения

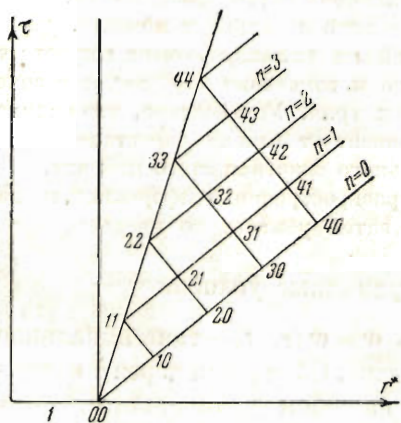
$$\partial w / \partial t = -a_0 \partial w / \partial r \quad (1.6)$$

3) условие совпадения характеристики с волной сильного разрыва

$$dw_t = a dw_r + b dt \quad (1.7)$$

Покажем тождественность (1.6) и (1.5). Дифференцируя (1.5), имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial r} dr = 0$$



Фиг. 1.

и так как на фронте волны $dr/dt = a_0$, то отсюда следует (1.6), т. е. условия (1.5) и (1.6) тождественны.

Уравнения (1.6) и (1.7) допускают интеграл

$$w_r = \frac{\partial w}{\partial r} = -\varepsilon_s \sqrt{\frac{r_0}{r}}, \quad w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = a_0 \varepsilon_s \sqrt{\frac{r_1}{r}} \quad (1.8)$$

Таким образом, интенсивность переднего фронта упругой волны падает обратно пропорционально корню из расстояния от центра симметрии.

§ 2. Определение движения в упругой области

Определение движения в упругой области сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{a_0^2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{a_0^2}{r^2} w \quad (2.1)$$

при граничных условиях:

1) на характеристике $r = r_0 + a_0 t$ заданы

$$w_t = a_0 \varepsilon_s \sqrt{\frac{r_0}{r}}, \quad w_r = -w_t$$

2) на линии $r = r_0 + a_1 t$

$$\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = \varepsilon_s$$

§ 3. Исследования движения на границе пластической области

В этом разделе работы мы покажем, что величина скорости и деформации на передней границе области пластических деформаций не зависят от закона нарастания крутящего момента, приложенного к абсолютно твердому цилиндру, заделанному в упругое пространство.

Кроме того, также покажем независимость радиуса распространения волны сильного разрыва от закона нарастания крутящего момента.

Заметим, однако, что если приложенный крутящий момент не обеспечивает активного процесса деформации, то это утверждение не имеет места. В этом случае возникает цилиндрическая волна разгрузки.

Рассмотрим линейное упрочнение. Пусть E' — модуль упрочнения. области пластических деформаций уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{a_1^2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{a_1^2 w}{r^2} - \frac{2\varepsilon_s (a_0^2 - a_1^2)}{r} \quad a_1^2 = \frac{E'}{\rho} \quad (3.1)$$

Уравнения характеристик этого уравнения будут

$$dr = \mp a_1 dt,$$

$$dw_t = \pm a_1 dw_r + \left[\frac{a_1^2}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) - \frac{2\varepsilon_s (a_0^2 - a_1^2)}{r} \right] dt \quad (3.2)$$

Линия $r = r_0 + a_1 t$ представляет поверхность разрыва деформации, поэтому на ней должны выполняться уравнения динамической совместности. Обозначим через w° смещение в области упругих деформаций.

Тогда условия непрерывности смещения дают

$$w^\circ(r, t) = w(r, t) \quad \text{при} \quad r = r_0 + a_1 t$$

Отсюда

$$w_{r^\circ} dr + w_{t^\circ} dt = w_r dr + w_t dt$$

или, имея в виду, что $dr = a_1 dt$,

$$w_t - w_{t^\circ} = -(w_r - w_{r^\circ}) a_1 \quad (3.3)$$

Такое же уравнение даст закон количества движения. В самом деле, закон количества движения для частицы, переходящей с упругой области в пластическую через поверхность $r = r_0 + a_1 t$, будет

$$\rho a_1 (w_t - w_{t^\circ}) = \tau - \tau^\circ \quad (3.4)$$

На линии $r = r_0 + a_1 t$ имеем

$$\tau^\circ = \tau_s = E \varepsilon_s$$

Так как для случая линейного упрочнения имеем

$$\tau = \tau_s + E (\varepsilon - \varepsilon_s)$$

то, имея в виду, что

$$\varepsilon = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_s = \frac{w^\circ}{r} - \frac{\partial w^\circ}{\partial r}, \quad w = w^\circ$$

легко доказать тождественность уравнений (3.3) и (3.4).

Так как линия $r = r_0 + a_1 t$ является характеристикой, то на ней

$$dw_t = a_1 dw_r + \left[a_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w^\circ}{r} \right) - 2\varepsilon_1 (a_0^2 - a_1^2) \right] \frac{dt}{r} \quad (3.5)$$

Дифференцируя (3.3), получим

$$dw_t = -a_1 dw_r + d(w_t^\circ + a_1 w_r^\circ) \quad (3.6)$$

Для определения w_t , w_r на границе пластической области, исключая из (3.6) и (3.5) w_t , имеем

$$-2a_1 dw_r = a_1 \frac{w_r}{r} dr - a_1 \frac{w^\circ}{r^2} dr - \frac{2\varepsilon_1 (a_0^2 - a_1^2)}{a_1 r} dr - d(w_t^\circ + a_1 w_r^\circ)$$

Решение однородного уравнения имеет вид

$$w_r = \frac{C}{\sqrt{r}}$$

Варьируя постоянные, получим

$$\frac{2}{\sqrt{r}} \frac{dC}{dr} = \frac{w^\circ}{r^2} + \frac{2\varepsilon_s (\mu^2 - 1)}{r} + \frac{1}{a_1} \frac{d}{dr} (w_t^\circ + a_1 w_r^\circ) \quad \left(\mu^2 = \frac{a_0^2}{a_1^2} \right)$$

Отсюда

$$2C = \int \frac{w^\circ}{r^{3/2}} dr + 2\varepsilon_s (\mu^2 - 1) \int \frac{dr}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r}}{a_1} (w_t^\circ + a_1 w_r^\circ) - \frac{1}{2a_1} \int (w_t^\circ + a_1 w_r^\circ) \frac{dr}{\sqrt{r}} + C_1$$

Определяя C_1 из условия, что $w_r = -\varepsilon_0$ при $r = r_0$, получим

$$w_r = -\varepsilon_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \int_{r_0}^r \frac{w_0}{r^{3/2}} dr + 2\varepsilon_s (\mu^2 - 1) \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r}} \right) + \frac{w_t^\circ + a_1 w_r^\circ}{2a_1} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{w_t^\circ + a_1 w_r^\circ}{a_1} - \frac{1}{4a\sqrt{r}} \int_{r_0}^r (w_t^\circ + a_1 w_r^\circ) \frac{dr}{\sqrt{r}}$$

Вводя переменные W , t^* , r^* согласно формулам

$$W = \frac{W}{r_0 \varepsilon_s}, \quad t^* = \frac{a_0 t}{r}, \quad r^* = \frac{r}{r_0}.$$

получим

$$W_{r^*} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s \sqrt{r^*}} + \frac{J_1}{2\sqrt{r^*}} + 2(\mu^2 - 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r^*}} \right) + \frac{1}{2} (W_{r^*}^\circ + \mu W_{t^*}^\circ) - \frac{\mu - 1}{2\sqrt{r^*}} - \frac{J_2}{4\sqrt{r^*}} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s \sqrt{r^*}} + f(r^*) \quad (3.7)$$

где

$$J_1 = \int_1^{r^*} \frac{W}{r^{*3/2}} dr^*, \quad J_2 = \int_1^{r^*} (W_{r^*}^\circ + \mu W_{t^*}^\circ) \frac{dr^*}{\sqrt{r^*}}$$

Для вычисления интегралов, входящих в формулу (3.7), приходится прибегать к численным методам.

В табл. 2 приведены результаты вычислений; по ходу вычислений в этой таблице введены обозначения

$$A_n = \frac{W_{nn}^{\circ}}{r_{nn}^{*3/2}}, \quad \Delta_n = \frac{A_{n+1} + A_n}{2} \Delta r_n^*, \quad B_n = 18.25 W_{t^*}^{\circ} + W_{r^*}^{\circ}$$

$$C_n = \frac{B_n}{\sqrt{r_n^*}}, \quad \Delta_c = \frac{C_{n+1} + C_n}{2} \Delta r_n^*$$

Таблица 2

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5
r_{nn}^*	1	1.0208	1.0413	1.0624	1.0832	1.1040
W_{nn}°	0	0.3276	0.5290	0.6430	0.7090	0.7480
$r_{nn}^{*1/2}$	1	1.0104	1.0209	1.0312	1.0416	1.051
$r_{nn}^{*3/2}$	1	1.03	1.062	1.093	1.13	1.156
A_n	0	0.3185	0.499	0.588	0.627	1.645
Δ_a	0.0331	0.0167	0.0338	0.0505	0.0662	
J_1	0	0.0331	0.0200	0.0538	0.1043	0.1705
$W_{t^*}^{\circ}$	1	0.611	0.3734	0.2399	0.1652	0.1208
$18.25 W_{t^*}^{\circ}$	18.25	11.12	6.81	4.37	2.96	2.2
$W_{r^*}^{\circ}$	-1	-0.679	-0.492	-0.395	-0.3455	-0.3225
B_n	17.25	10.441	6.318	3.975	2.6145	1.8775
C_n	17.25	10.34	6.200	3.84	2.500	1.788
Δ_c	27.59	1.654	1.002	0.634	0.4288	
J_2	0	0.279	0.638	0.901	1.164	1.386

Чтобы найти те значения $\varepsilon_0/\varepsilon_s$, для которых данный $r^* = \bar{r}^*$ является радиусом распространения волн сильного разрыва, пользуемся (3.6) и, имея в виду, что $\varepsilon = \varepsilon_s$ при $r^* = \bar{r}$, получаем

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s} = \sqrt{r^*} \left[1 - \left(\frac{W_0}{r^*} - f(r^*) \right) \right]$$

В табл. 3 приведены результаты вычислений значений $W^0/r^* - f(r^*)$. По ходу вычислений в табл. 3 приняты обозначения

$$A_1 = \frac{8.625}{\sqrt{r_n^*}}, \quad A_2 = 664 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r_n^*}} \right), \quad A_3 = \frac{J_1}{2\sqrt{r_n^*}}, \quad A_4 = A_2 - A_1 + A_3$$

$$A_5 = \frac{W_{r^*}^{\circ} + \mu W_{t^*}^{\circ}}{2}, \quad A_6 = \frac{J_2}{4\sqrt{r^*}}, \quad f_1 = A_4 + A_5 - A_6, \quad d = \frac{W^{\circ}}{r} - f(r)$$

Пользуясь данными табл. 3 для \bar{r}^* в зависимости от $\varepsilon_0/\varepsilon_s$, получаем

$\varepsilon_0/\varepsilon_s$	1	3.97	8.56	14.25	20.40	26.20
\bar{r}^*	1	1.0208	1.0418	1.0624	1.0832	1.104

Эти данные лишний раз доказывают, что волна сильного разрыва распространяется только на расстояния \bar{r}^* , причем величина \bar{r}^* не зависит от закона нарастания граничной нагрузки, а зависит только от начального значения указанной нагрузки.

Так как вне окружности радиуса \bar{r}^* невозможна волна сильного разрыва, то последняя может выродиться в волну слабого разрыва.

В проведенном исследовании не установлено, которая из волн — сильного или слабого разрыва — распространяется быстрее. Естественно предполагать, что волна слабого разрыва распространяется медленнее, так как в противном случае r^* не могло бы быть радиусом достижения волны сильного разрыва.

Таблица 3

n	0	1	2	3	4	5
$r_n^{*1/2}$	1	1.01	1.0209	1.0312	1.0416	1.051
A_1	8.625	8.54	8.45	8.35	8.26	8.17
$r_n^{*-1/2}$	1	0.99	0.979	0.969	0.958	0.95
$1 - r_n^{*-1/2}$	0	0.0992	0.0202	0.0302	0.0410	0.0485
A_2	0	0.64	3.4	20	26.5	32.2
$A_2 - A_1$	-8.625	-1.90	4.95	11.65	18.24	24
A_3	0	0.00163	0.0098	0.0260	0.0500	0.081
A_4	-8.625	-1.8981	4.960	11.676	18.29	24.08
A_5	8.625	5.22	3.159	1.987	1.307	0.938
A_6	0	0.069	0.1565	0.218	0.279	0.329
$A_5 - A_6$	8.625	5.151	3.003	1.769	+1.028	+0.609
$f(r)$	0	3.253	7.963	13.445	19.318	24.690
W^0 / r^*	0	0.32	0.57	0.605	0.652	0.677
d	0	-2.933	-7.393	-12.840	-18.666	-24.023

Заметим, что величина r^* может быть экспериментально наблюдаемой при воздействии быстро спадающих давлений.

§ 4. Распространения цилиндрических волн разгрузки

Рассмотрим случай распространения волн разгрузки, когда последняя мгновенно возникает на границе рассматриваемой области.

Упомянутый случай будет иметь место, если к границе области будет приложена мгновенно возникающая, а затем монотонно убывающая нагрузка. Принимая линейный закон упрочнения для области разгрузки получим

$$\tau = \tau_0 - E(\varepsilon_0 - \varepsilon) = \tau_0 - E \left(\varepsilon_0 - \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4.1)$$

где τ_0 — напряжение на волне разгрузки, ε_0 — деформация на волне разгрузки. В силу (4.1) уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_0^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\tau_0 - E\varepsilon_0}{\rho} - \frac{2(\tau_0 - E\varepsilon_0)}{r\rho} \quad (4.2)$$

Пусть линия $r = r_0 + a_1 t$ является волной разгрузки; при переходе через нее смещение должно оставаться непрерывным, следовательно вдоль упомянутой линии имеем

$$w_t + a_1 w_r = w_t^0 + a_1 w_r^0$$

где w° — смещение в области упругих деформаций. Имея в виду, что на линии $r = r_0 + a_1 t$ со стороны упругих деформаций деформация равна ε_s , а со стороны области разгрузки деформация ε_0 , получим

$$w_t = w_t^\circ + a_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_s), \quad \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} = \varepsilon_0 \quad (4.3)$$

Если предположим деформацию $\varepsilon_0(r)$ известной, то в силу $w = w^\circ$ из (4.3) можем определить w_t и w_r , таким образом, будем иметь некоторую задачу Коши для уравнения (4.2). Существование решения этой задачи Коши доказано, нам остается найти соотношение, которому должна удовлетворять $\varepsilon_0(r)$, чтобы в области, лежащей выше $r = r_0 + a_1 t$, происходила разгрузка, т. е. чтобы упомянутая линия действительно являлась волной разгрузки.

Дифференцируя (4.3) вдоль волны разгрузки, получим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_0 &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt - \frac{\varepsilon}{r} dr - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr \\ - a_1 d\varepsilon_0 &= dw_t^\circ + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dr - \frac{w_t}{r} dr - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dt \end{aligned} \quad \left(\varepsilon = \frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

Определяя из этих уравнений $\partial^2 w / \partial r^2$ и $\partial^2 w / \partial t^2$, подставляя их в уравнение (4.2) и имея в виду, что

$$\tau_0 = \tau_s + E' (\varepsilon_0 - \varepsilon_s), \quad dt = \frac{dr}{a_1}$$

получим

$$\begin{aligned} a_1 \frac{dw_t^\circ}{dr} + a_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a_1 \frac{w_t}{r} - a_1^2 \frac{d\varepsilon_0}{dr} &= \\ = \frac{a_0^2}{a_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - 2 \frac{a_0^2 \varepsilon_0}{r} - a_0^2 \frac{d\varepsilon_0}{dt} + (a_0^2 - a_1^2) \frac{d\varepsilon_0}{dr} - \frac{2(\tau_s - E'\varepsilon)}{\rho r} + 2(a_0^2 - a_1^2) \frac{\varepsilon_0}{r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как здесь dw_t° / dr является заданной функцией времени и w_t согласно (4.3) есть линейная функция ε_0 , то для заданной $\partial \varepsilon / \partial t$ уравнение (4.5) является линейным уравнением относительно ε_0 .

Зная ε_0 , по (4.3) можно найти w_t , w_r ; следовательно, граничные условия (4.2) будут известными.

Ввиду того, что $\varepsilon_0(r_0)$ известна, линейное дифференциальное уравнение для ε_0 имеет единственное решение.

Таким образом, мы показали, что существует некоторая область разгрузки вблизи прямой $r = r_0 + a_1 t$. Этим самым доказано, что прямая $r = r_0 + a_1 t$ может быть волной разгрузки.

Обращаем внимание на необязательность совпадения упомянутой прямой с волной разгрузки.

Не исключена возможность, что, начиная с некоторой точки, прямая $r = r_0 + a_1 t$ перестает быть волной разгрузки, последняя будет некоторой кривой и причем волной слабого разрыва.