

РАССМОТРЕНИЕ «ВЫРОЖДЕННЫХ» ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ГИПОТЕЗЫ «СКАЧКА»

Н. В. Бутенин

(Ленинград)

Работа ставит перед собой задачу показать, что гипотеза «скачка» весьма плодотворно позволяет рассмотреть движение некоторых механических систем, сохраняя простейшую математическую модель изучаемого объекта, т. е. гипотеза скачка позволяет преодолеть те внутренние противоречия, которые могут возникнуть при идеализации рассматриваемой динамической системы.

В работе иллюстрируются примерами те вопросы идеализации некоторых механических систем, которые приводит А. А. Андронов^[1].

В первом параграфе приводится содержание парадокса Пенлеве^[2].

Во втором параграфе освещена дискуссия Клейн^[3], Прандтль^[4], Мизес^[5], Гамель^[6] по поводу парадокса Пенлеве.

Третий параграф посвящен рассмотрению движения упругой системы и предельному переходу к абсолютно жестким связям.

Четвертый параграф посвящен иллюстрациям применения гипотезы «скачка» к различным механическим системам.

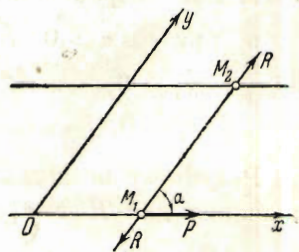
§ 1. Парадокс Пенлеве. Пенлеве^[2] дал ряд примеров, в которых закон трения Кулона в сочетании с применением гипотезы абсолютно твердого тела приводит к парадоксам. Пенлеве поставил вопрос о «логической несовместимости» законов трения Кулона с основными положениями теоретической механики. Для выяснения сущности парадокса Пенлеве приведем пример, предложенный Клейном^[3].

Две точки M_1 и M_2 , массы которых равны m_1 и m_2 , связанные невесомым стержнем неизменяемой длины, могут перемещаться по двум параллельным прямым (фиг. 1). Предположим, что направляющая для точки M_2 абсолютно гладкая, а для точки M_1 шероховатая. Коэффициент трения при движении равен k и в покое k_0 .

Пусть α — угол, который образует стержень с положительным направлением оси x , а x_1 и x_2 — координаты точек M_1 и M_2 ; далее, P — постоянная сила, действующая на точку M_1 в положительном направлении оси x , и R — реакция стержня. Уравнения движения имеют вид

$$m_2 \ddot{x}_2 = R \cos \alpha, \quad m_1 \ddot{x}_1 = P - R \cos \alpha + x R \sin \alpha \quad (1.1)$$

где $x = \pm k$, причем знак выбирается так, чтобы сила трения была направлена против движения (при этом учитывается, что в зависимости



Фиг. 1.

от состояния движения $R > 0$ при сжатом стержне, $R < 0$ — при растяжении). Координаты x_1 и x_2 связаны условием $x_1 - x_2 = 0$.

Условие того, что сила трения всегда направлена против движения, можно записать в виде неравенства

$$x R \dot{x}_1 < 0 \quad (1.2)$$

Парадокс Пенлеве заключается в возможности осуществления этого неравенства при различных начальных условиях движения системы, определяемой уравнениями (1.1). Для выяснения сущности парадокса Пенлеве преобразуем уравнения (1.1). Предполагая для простоты $m_1 = m_2 = 1$ из уравнений (1.1), так как $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, имеем

$$R = \frac{P}{2\cos \alpha - z \sin \alpha} \quad (1.3)$$

Легко видеть, что одновременное рассмотрение выражения (1.3) и неравенства (1.2) приводит к трем возможным случаям.

$$I. \quad |k \sin \alpha| < |2 \cos \alpha|.$$

Знак R согласно (1.3) определяется в соответствии со знаком $\cos \alpha$ и независимо от знака z . Тогда рассмотрение неравенства (1.2) дает

$$\begin{array}{ll} \text{а) при } \cos \alpha > 0, R > 0 & \text{б) при } \cos \alpha < 0, R < 0 \\ \dot{x}_1 > 0, \quad z = -k & \dot{x}_1 > 0, \quad z = +k \\ \dot{x}_1 < 0, \quad z = +k & \dot{x}_1 < 0, \quad z = -k \end{array}$$

Неравенство (1.2) в этом случае может быть выполнено.

$$II. \quad |k \sin \alpha| > |2 \cos \alpha|$$

Знак R согласно (1.3) будет обратным знаку независимо от знака $\cos \alpha$. Рассмотрение неравенства (1.2) дает

$$\begin{array}{ll} \text{а) при } \cos \alpha > 0, R \geq 0 & \text{б) при } \cos \alpha < 0, R \geq 0 \\ \dot{x}_1 > 0, \quad z = \mp k & \dot{x}_1 > 0, \quad z = \mp k \\ \dot{x}_1 < 0, \quad \text{противоречит (1.2)} & \dot{x}_1 < 0, \quad \text{противоречит (1.2)} \end{array}$$

Результат исследования II случая дает, что возможны или два значения для $R \cos \alpha$, или ни одного допускаемого неравенством (1.3)

$$III. \quad |k \sin \alpha| = |2 \cos \alpha|$$

Согласно (1.3), в зависимости от знака z величина R будет либо бесконечной, либо конечной, причем в последнем случае знак находится в соответствии со знаком $\cos \alpha$

$$\begin{array}{ll} \text{а) при } \cos \alpha > 0, R > 0 & \text{б) при } \cos \alpha < 0, R < 0 \\ \dot{x}_1 > 0, \quad z = -k & \dot{x}_1 > 0, \quad z = +k \\ \dot{x}_1 < 0, \quad \text{противоречит (1.2)} & \dot{x}_1 < 0, \quad \text{противоречит (1.2)} \end{array}$$

При исключении бесконечно большого значения R этот случай также приводит к противоречию с неравенством (1.2).

Таким образом, установлено, что в случае II и III при данных начальных условиях система не позволяет однозначно составить уравнения ее движения. Это противоречие с основными законами механики и является сущностью парадокса Пенлеве.

§ 2. Дискуссия о парадоксе Пенлеве. Результаты дискуссии Клейн^[3], Прандтль^[4], Мизес^[5], Гамель^[6] вокруг парадокса Пенлеве можно кратко сформулировать следующим образом. В основе рассуждений лежат четыре гипотезы.

1. Рассматривается абсолютно твердое тело.
2. Нормальное давление между двумя твердыми телами никогда не может быть отрицательным.
3. Все ускорения и все усилия конечны, если внешние силы конечны.
4. Справедливы кулоновские законы трения.

Идеализация механизации системы, заключающаяся в одновременном применении первых трех гипотез, и приводит к парадоксу Пенлеве.

Конструктивно направляющие для точек M_1 и M_2 можно выполнить так, что будет возможно¹ и $R > 0$ и $R < 0$. Предположение о том, что стержень абсолютно жесткий (гипотезы 1), противоречит гипотезе 3.

Прандтль по существу вместо гипотезы 3 вводит новую гипотезу — гипотезу «скачка», которая позволяет (сохраняя гипотезу 1) разрешить парадокс Пенлеве.

Эта гипотеза заключается в том, что в случаях II и III при $\dot{x}_1 < 0$ нужно допустить $R = \infty$ и тем самым бесконечное ускорение и, следовательно, мгновенную остановку движения. При $\dot{x}_1 > 0$ одно из движений будет неустойчивым и мгновенно прекратится.

По законам трения Кулона коэффициент трения при покое лежит между $+k_0$ и $-k_0$ и тем самым может принимать те значения, которые делают R бесконечно большим.

Для точного представления о явлениях, происходящих в механической системе, необходимо рассмотреть ее как упругую. Для рассмотрения движения «вырожденной» системы, т. е. при введении гипотезы об абсолютно твердом теле, следует проделать предельный переход, считая, что жесткость стержня стремится к бесконечности.

Предельный переход можно осуществить или в дифференциальных уравнениях или в конечном результате, и если в этом последнем получим неопределенность, то возможно, что задача теряет свой смысл при применении гипотезы абсолютно твердого тела.

§ 3. Рассмотрение движения упругой системы. Для физического обоснования гипотезы «скачка» рассмотрим движение системы, предположив, что стержень, соединяющий точки, упругий.

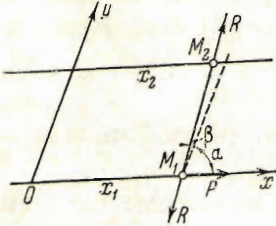
Такое рассмотрение, теоретическое и экспериментальное, было проделано Пфайфером^[7]. Применение метода фазовой плоскости позволяет сделать это рассмотрение более наглядным и коротким.

¹ Например, если направляющие сделать в виде трубок, в которых движутся точки, или стержней, на которые точки насажены, как бусинки.

Уравнения движения упругой системы имеют вид (фиг. 2)

$$m_1 \ddot{x}_1 = P - R \cos(\alpha + \beta) + \lambda R_1^* \sin(\alpha + \beta), \quad m_2 \ddot{x}_2 = R \cos(\alpha + \beta) \quad (3.1)$$

Как и прежде, примем, что $m_1 = m_2 = 1$. Угол β будем считать малым и членами с β будем пренебрегать. Из уравнений следует (3.1)



Фиг. 2.

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = P - R [2 \cos \alpha - \lambda \sin \alpha] \quad (3.2)$$

Обозначим $x_1 - x_2 = \xi$ и введем коэффициент ν , характеризующий упругость стержня $R = \nu \xi$. Уравнение для R будет иметь вид

$$\ddot{R} = \nu P - \nu R [2 \cos \alpha - \lambda \sin \alpha] \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай $|k \sin \alpha| > |2 \cos \alpha|$.

Предполагая $\cos \alpha > 0$, введем обозначения

$$2 \cos \alpha + k \sin \alpha = d \quad (d > 0), \quad k \sin \alpha - 2 \cos \alpha = f \quad (f > 0) \quad (3.4)$$

Таким образом, для R мы будем иметь следующие уравнения:

$$1) \quad \ddot{R} + \nu d R = \nu P; \quad 2) \quad \ddot{R} - \nu f R = \nu P \quad (3.5)$$

При начальных условиях соответственно $t=0$, $R=R_0$, $\dot{R}=\dot{R}_0$ решение уравнений (3.5) будет

$$1) \quad R = \frac{P}{d} + \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} + \left(R_0 - \frac{P}{d} \right) \cos t \sqrt{\nu d} \quad (3.6)$$

$$2) \quad R = -\frac{P}{f} + \frac{1}{2} \left(R_0 + \frac{P}{f} + \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{t \sqrt{\nu f}} + \frac{1}{2} \left(R_0 + \frac{P}{f} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{-t \sqrt{\nu f}} \quad (3.7)$$

В случае 1 выражения для \dot{x}_1 и x_1 имеют вид (3.8)

$$\dot{x}_1 = \frac{P}{d} t \cos \alpha + (d - \cos \alpha) \left[\frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{R_0 - P/d}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} \right] + \dot{x}_{10}$$

$$x_1 = \frac{P t^2}{2d} \cos \alpha + \frac{d - \cos \alpha}{\sqrt{\nu d}} \left[\frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} + \frac{R_0 - P/d}{\sqrt{\nu d}} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} t - \frac{R_0 - P/d}{\sqrt{\nu d}} \right] + \dot{x}_{10} t + x_{10} \quad (3.9)$$

В случае 2

$$\dot{x}_1 = -\frac{P}{f} t \cos \alpha + (\cos \alpha + f) \left[\frac{1}{2 \sqrt{\nu f}} \left(R_0 + \frac{P}{f} + \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{t \sqrt{\nu f}} - \frac{1}{2 \sqrt{\nu f}} \left(R_0 + \frac{P}{f} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{-t \sqrt{\nu f}} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu f}} \right] + \dot{x}_{10} \quad (3.10)$$

$$x_1 = -\frac{P t^2}{2f} \cos \alpha + (\cos \alpha + f) \left[\frac{1}{2 \nu f} \left(R_0 + \frac{P}{f} + \frac{R_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{t \sqrt{\nu f}} + \frac{1}{2 \nu f} \left(R_0 + \frac{P}{f} - \frac{R_0}{\sqrt{\nu f}} \right) e^{-t \sqrt{\nu f}} - \frac{\dot{R}_0 t}{\nu f} - \frac{R_0 - P/f}{\nu f} \right] + \dot{x}_{10} t + x_{10} \quad (3.11)$$

Таким образом, движение точки M_1 существенно зависит от трех

величин: \dot{x}_{10} , R_0 , \dot{R}_0 . Для выяснения картины возможных движений построим фазовые траектории (фиг. 3 и 4) для уравнений (3.5).

В случае 1 уравнение фазовых траекторий на плоскости $R\dot{R}$ имеет вид

$$\left(R - \frac{P}{d}\right)^2 + \frac{\dot{R}^2}{\nu d} = C$$

где

$$C = \left(R_0 - \frac{P}{d}\right)^2 + \frac{\dot{R}_0^2}{\nu d} \quad (3.12)$$

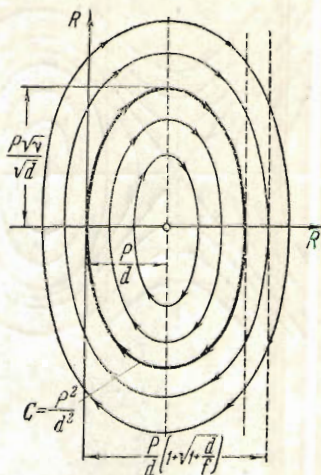
Особая точка $R = P/d$, $\dot{R} = 0$ является центром. Область внутри эллипса

$$\left(R - \frac{P}{d}\right)^2 + \frac{R^2}{\nu d} = \frac{\dot{R}^2}{d^2}$$

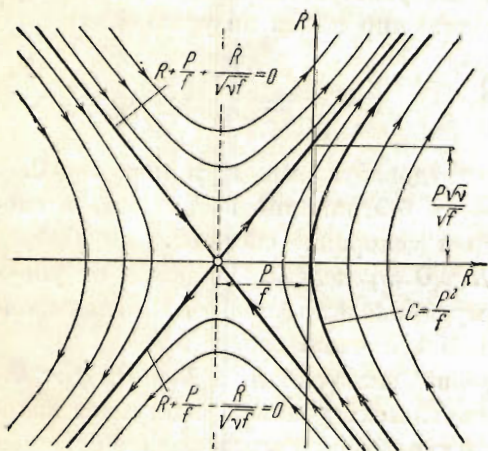
характеризуется тем, что для всех R_0 , \dot{R}_0 , лежащих внутри него, R не меняет знака, т. е. не происходит изменения знака напряжения в стержне. Для всех точек вне этого эллипса R меняет знак.

В случае 2 уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\left(R + \frac{P}{f}\right)^2 - \frac{\dot{R}^2}{\nu f} = C, \quad \text{где } C = \left(R_0 + \frac{P}{f}\right)^2 - \frac{\dot{R}_0^2}{\nu f} \quad (3.13)$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Особая точка $R = -P/f$, $\dot{R} = 0$ является седлом. Область изменения напряжения в стержне определяется следующими неравенствами:

при $\dot{R} > 0$

$$R < 0, \quad R + \frac{P}{f} + \frac{\dot{R}}{\sqrt{\nu f}} > 0$$

при $\dot{R} < 0$

$$R + \frac{P}{f} + \frac{\dot{R}}{\sqrt{\nu f}} > 0$$

$$\left(R + \frac{P}{f}\right)^2 - \frac{\dot{R}^2}{\nu f} < \frac{l^2}{f^2}$$

Начальные условия для R и \dot{R} разобьем на группы:

А. При $\dot{x}_{10} < 0$

1. $R_0 > 0$

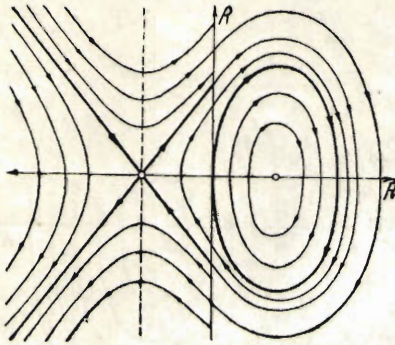
2. $R_0 < 0$

В. При $\dot{x}_{10} > 0$

1. $0 < R_0 < \frac{2P}{d}$ 3. $R_0 > \frac{2P}{d}$

2. $R_0 < -\frac{P}{f}$ 4. $-\frac{P}{f} < R_0 < 0$

Отметим, что при изменении знака R меняется также и знак x , поэтому полезно фазовые плоскости, представленные на фиг. 3 и 4, «сшить» (фиг. 5) по линии $R=0$.



Фиг. 5.

Рассмотрим начальные условия первой группы.

A_1 . Пусть $R_0 > 0$. (В этом случае $x = +k$.) При $\dot{R}_0 > 0$ для всех ν , а при $\dot{R}_0 < 0$ для всех $\nu > N$, причем

$$N = \frac{\dot{R}_0^2}{j[(R_0 + P/j)^2 - P^2/j^2]}$$

точки с координатами R_0, \dot{R}_0 лежат в области, фазовые траектории в которой не пересекают ось \dot{R} , т. е. в области, в которой R не меняет знака (фиг. 4). В этом случае

$$\dot{x}_1 = -\frac{P}{j} t \cos \alpha + (\cos \alpha + f) \left[\frac{1}{2\sqrt{\nu j}} \left(R_0 + \frac{P}{j} + \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu j}} \right) e^{t\sqrt{\nu j}} - \frac{1}{2\sqrt{\nu j}} \left(R_0 + \frac{P}{j} - \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu j}} \right) e^{-t\sqrt{\nu j}} - \frac{\dot{R}_0}{\nu j} \right] - |\dot{x}_{10}|$$

Следовательно, точка M_1 будет двигаться с отрицательной скоростью до тех пор, пока возрастающая сила трения не заставит ее остановиться. Время, при котором наступает остановка точки M_1 при достаточно большом ν , можно приближенно найти из уравнения

$$t = \frac{1}{\sqrt{\nu j}} \log \left[M \left(1 + t \frac{P \cos \alpha}{f |\dot{x}_{10}|} \right) \sqrt{\nu j} \right] \quad \left(M = \frac{|\dot{x}_{10}|}{2(\cos \alpha + j)(R_0 + P/j)} \right)$$

При $\nu \rightarrow \infty$ это уравнение может удовлетворяться только $t \rightarrow 0$.

Напряжение в стержне при $\nu \rightarrow \infty$ безгранично возрастает, а следовательно, возрастает безгранично и ускорение системы.

Таким образом, при $\dot{x}_{10} < 0$ и $R > 0$ предельный переход от упругого стержня к абсолютно жесткому приводит к понятию мгновенной остановки точки M_1 , т. е. к понятию «скачка».

A_2 . Пусть $R_0 < 0$. (В рассмотрение включается и $R_0 = 0, \dot{R}_0 < 0$.) В этом случае $x = -k$. Для этих начальных условий наступает изменение знака R (фиг. 3). Время наступления изменения напряжения вычисляется из уравнения

$$0 = \frac{P}{d} + \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} + \left(R_0 - \frac{P}{d} \right) \cos t \sqrt{\nu d}$$

откуда

$$t = \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \arcsin \frac{-\frac{P}{d} \frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} - \left(R_0 - \frac{P}{d} \right) \sqrt{R_0^2 - \frac{2PR_0}{d} + \frac{\dot{R}_0^2}{\nu d}}}{\left(R_0 - \frac{P}{d} \right)^2 + \frac{\dot{R}_0^2}{\nu d}} \quad (3.14)$$

Значение ν можно выбрать настолько большим, что величина \dot{x}_1 будет оставаться меньше нуля при $R=0$.

Дальнейшее движение начнется уже с начальными условиями

$$\dot{x}_1 < 0, \quad R_0 = 0, \quad \dot{R}_0 = \varphi \sqrt{\nu} \quad \left(\varphi = \sqrt{d} \sqrt{R_0^2 - \frac{2PR_0}{d} + \frac{\dot{R}_0^2}{\nu d}} \right)$$

Движение с этими начальными условиями относится к движениям A_1 , т. е. R знака более не меняет. Наступает остановка движения точки M_1 . При $\nu \rightarrow \infty$ наступает мгновенная остановка движения.

Таким образом при $\dot{x}_{10} < 0$ для всех R_0 и \dot{R}_0 при $\nu \rightarrow \infty$ наступает мгновенная остановка движения системы.

Перейдем к рассмотрению начальных условий второй группы.

B_1 . Пусть $0 < R_0 < 2P/d$. Величину ν можно выбрать такой большой, что изображающая точка (R_0, \dot{R}_0) будет лежать внутри эллипса

$$\left(R_0 - \frac{P}{d}\right)^2 + \frac{\dot{R}_0^2}{\nu d} = \frac{P^2}{d^2} \quad \left(\nu > N_1 = \frac{\dot{R}_0^2}{d(2PR_0/d - R_0^2)}\right)$$

Величина R в этой области знака не меняет (фиг. 3). Скорость точки M_1 изменяется согласно уравнению (3.8).

При $\nu \rightarrow \infty$ это движение переходит в следующее:

$$\dot{x}_1 = \frac{P}{d} t \cos \alpha + \dot{x}_{10}, \quad x_1 = \frac{Pt^2}{2d} \cos \alpha + \dot{x}_{10}t + x_{10}$$

Такое же движение при любом ν мы получим для $R_0 = P/d, \dot{R}_0 = 0$.

B_2 . Пусть $R_0 < -P/d$. Для каждого $\nu > -N_2$, где

$$N_2 = \frac{\dot{R}_0^2}{f(R_0 + P/f)^2}$$

величина R знака не меняет (фиг. 4). При $\nu \rightarrow \infty$ значение $R \rightarrow \infty$ и наступает мгновенная остановка движения. Начальные условия $R_0 = -P/f, \dot{R}_0 = 0$ дают для x_1 неустойчивое движение

$$x_1 = -\frac{Pt^2}{2f} \cos \alpha + \dot{x}_{10}t + x_{10}$$

так как на плоскости $RR\dot{R}$ точка $(R = -P/f, \dot{R} = 0)$ является седлом.

B_3 . Пусть $R_0 > 2P/d$. Эти начальные условия соответствуют области в которой R меняет знак (фиг. 5). Изменение знака R произойдет в момент времени, определяемый выражением (3.14).

С этого момента времени начнется новый этап движения. Будем теперь отсчитывать время от этого момента. Начальные условия нового этапа движения будут

$$(R_0)_1 = 0, \quad (\dot{x}_{10})_1 = \frac{Pt_1}{d} \cos \alpha - (d - \cos \alpha) \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \left(\frac{\dot{R}_0}{\sqrt{\nu d}} + \frac{\varphi}{\sqrt{d}} \right) + \dot{x}_{10}$$

$$(\dot{R}_0)_1 = -\varphi \sqrt{\nu}, \quad (x_{10})_1 = \frac{Pt_1^2}{2d} \cos \alpha - (d - \cos \alpha) \frac{1}{\nu d} (R_0 + \dot{R}_0 t_1) + \dot{x}_{10} t_1 + x_{10}$$

На фиг. 5 видно, что если

$$|\dot{R}_0| < \frac{P\sqrt{v}}{Vf} \quad \text{или} \quad \left(R_0 - \frac{P}{d}\right)^2 + \frac{\dot{R}_0^2}{vd} < \frac{P^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f}\right)$$

то изображающая точка попадает в область, где R меняет знак; при обратном знаке неравенств изображающая точка попадает в область, где R знака не меняет.

Таким образом, начальные условия B_3 можно разбить на

$$B_3'. \quad R_0 \geq \frac{P}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right) \quad B_3''. \quad R_0 < \frac{P}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right)$$

В случае B_3' на втором этапе движения R знака не меняет. Усилие растяжения в стержне будет увеличиваться.

Рассмотрение уравнения (3.10) дает возможность заключить, что произойдет остановка точки M_1 . При $v \rightarrow \infty$ время t до остановки движения стремится к нулю. При

$$R_0 = \frac{P}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right), \quad \dot{R}_0 = 0$$

величина R на втором этапе движения изменяется по закону

$$R = -\frac{P}{f} + \frac{P}{f} e^{-t\sqrt{v}f}$$

Из уравнения (3.10) следует, что и в этом случае наступает остановка движения точки M_1 .

В случае B_3'' точка с начальными условиями $(R_0)_1 = 0$, $(\dot{R}_0) = -\varphi\sqrt{v}$ попадает в область, где R меняет знак. Промежуток времени (отсчитываемый от t_1) до момента, когда R меняет знак, равен

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{v}f} \log \frac{P/f + \varphi\sqrt{v}f}{P/f - \varphi\sqrt{v}f}$$

После этого изображающая точка начнет третий этап движения с начальными условиями

$$(R_0)_2 = 0, \quad (\dot{x}_{10})_2 = -\frac{Pt_2}{f} \cos \alpha + (\cos \alpha + f) \frac{2\varphi}{f\sqrt{v}} + (\dot{x}_{10})_1$$

$$(\dot{R}_0)_2 = \varphi\sqrt{v}; \quad (x_{10})_2 = -\frac{Pt_2^2}{2f} \cos \alpha + (\cos \alpha + f) \frac{\varphi t_2}{f\sqrt{v}} + (\dot{x}_{10})_1 t_2 + (x_{10})_1$$

В области третьего этапа движения R меняет знак. Изменение знака R наступает в момент

$$t_3 = \frac{1}{\sqrt{v}d} \arcsin \frac{-2P\varphi\sqrt{d}}{\varphi^2 d + P^2}$$

где t_3 отсчитывается от момента t_2 .

Далее начнется четвертый этап движения с начальными условиями

$$(R_0)_3 = 0, \quad (\dot{x}_{10})_3 = \frac{Pt_3}{d} \cos \alpha - (d - \cos \alpha) \frac{2\varphi}{d\sqrt{v}} + (\dot{x}_{10})_2$$

$$(\dot{R}_0)_3 = -\varphi\sqrt{v}, \quad (x_{10})_3 = \frac{Pt_3^2}{2d} \cos \alpha - (d - \cos \alpha) \frac{\varphi}{d\sqrt{v}} t_3 + (\dot{x}_{10})_2 t_3 + (x_{10})_2$$

Четвертый этап движения повторит второй этап, так как движение изображающей точки начинается с одинаковыми начальными условиями. Пятый этап повторит третий и т. д.

Если $(\dot{x}_{10})_{k+2} > (\dot{x}_{10})_k$, то движение изображающей точки будет безгранично повторяться. Если $(\dot{x}_{10})_{k+2} < (\dot{x}_{10})_k$, то после нескольких раз изменения знака R точка M_1 остановится.

Рассмотрим случай $(\dot{x}_{10})_{k+2} > (\dot{x}_{10})_k$. Введем обозначения

$$(t_2 + t_3) \sqrt{v} = C$$

$$\begin{aligned} \frac{Pt_2^2 v}{2d} \cos \alpha - (d - (\cos \alpha \frac{\varphi_3 \sqrt{v}}{d})) &= A, & -\frac{Pt_2^2 v}{2j} \cos \alpha + (f + \cos \alpha) \frac{\varphi_2 t_2 \sqrt{v}}{d} &= B \\ \frac{Pt_3 \sqrt{v}}{d} \cos \alpha - (d - (\cos \alpha \frac{2\varphi}{d} + D) &= E, & -\frac{Pt_2 \sqrt{v}}{j} \cos \alpha + (f + \cos \alpha) \frac{2\varphi}{f} &= D \end{aligned}$$

Время, в которое фазовая точка сделает n оборотов, будет $T = nC / \sqrt{v}$. Тогда

$$(\dot{x}_{10})_{2n+1} = n \frac{E}{\sqrt{v}} + (\dot{x}_{10})_1$$

$$(x_{10})_{2n+1} = \frac{n}{v} [A + B + Dt_3 \sqrt{v}] + \frac{n}{\sqrt{v}} C (\dot{x}_{10})_1 + \frac{(n-1)n}{2v} EC + (x_{10})_1$$

или

$$(\dot{x}_{10})_{2n+1} = \frac{R}{C} T + (\dot{x}_{10})_1 \quad (3.15)$$

$$(x_{10})_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{v}} \left[\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C} t_3 \sqrt{v} - \frac{E}{2} \right] T + \frac{E}{C} \frac{T^2}{2} + (\dot{x}_{10})_1 T + (x_{10})_1 \quad (3.16)$$

Отметим, что

$$\left(\frac{C}{E} \right)_{\varphi=0} = \frac{d}{P \cos \alpha}, \quad \lim_{\varphi \rightarrow P/\sqrt{f}} \frac{C}{E} = -\frac{f}{P \cos \alpha}$$

Уравнение (3.16) представляет параболу на плоскости $(x_{10})_{2n+1} T$.

При достаточно большом v уравнение (3.16) можно записать в виде

$$(x_{10})_{2n+1} = \frac{E}{C} \frac{T^2}{2} + (\dot{x}_{10})_1 T + (x_{10})_1 \quad (3.17)$$

Рассмотрим на этой же плоскости параболы

$$x_1 = \frac{Pt^2}{2d} \cos \alpha + (\dot{x}_{10})_1 t + (x_{10})_1, \quad x_2 = -\frac{Pt^2}{2j} + (\dot{x}_{10})_1 t + (x_{10})_1 \quad (3.18)$$

Так как $x_1 - x_2 = R/v$, то точки, где $x_1 = x_2$, лежат на параболе (3.17).

Уравнение (3.17) представляет собой семейство парабол, лежащих между параболой (3.18); параметром семейства будет φ .

При $v \rightarrow \infty$ точки, где $x_1 = x_2$, все более плотно располагаются на параболе (3.17) и в пределе геометрическое место точек, где $x_1 = x_2$, совпадает с параболой (3.17).

Таким образом, при $R_0 = 2P/d$ движение происходит по первому

уравнению (3.18), при увеличении R_0 движение происходит по закону

$$x_1 = \frac{E}{C} \frac{t^2}{2} + (\dot{x}_{10}) t + (x_{10})_1$$

приближаясь ко второму уравнению (3.18). Аналогичное исследование начальных условий V_4 , т. е. при $-P/f < R_0 < 0$, дает, что все движения будут заключены между параболой (3.18).

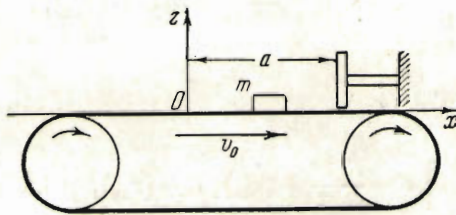
Результат исследований, проведенных в этом параграфе, можно сформулировать следующим образом: рассмотрение упругой системы устраняет парадокс Пенлеве. Можно, оставаясь верным гипотезе абсолютно твердого тела, ввести дополнительную гипотезу о мгновенной остановке движения, которая также устраняет парадокс Пенлеве.

§ 4. Некоторые «вырожденные» системы и их рассмотрение с помощью гипотезы «скачка». Если в дифференциальных уравнениях движения динамической системы некоторыми членами можно пренебречь¹, то, оставшиеся дифференциальные уравнения описывают движение так называемой «вырожденной системы».

Рассмотрим «вырожденные» системы, движение которых описывается одним дифференциальным уравнением первого порядка.

Как известно [8], если уравнение движения системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (4.1)$$



Фиг. 6.

где $f(x)$ — однозначная функция, то непрерывных периодических движений это уравнение не допускает. Периодические движения в системе, описываемой уравнением (4.1), возможны тогда, когда уравнение (4.1) хотя бы в

некоторых точках не определяет движения системы.

Возможны случаи, когда уравнение (4.1) применимо только в некоторой ограниченной области (что должно быть известно из условий задачи) и когда уравнение (4.1) теряет смысл для каких-либо значений переменных. Рассмотрим подробнее каждую из этих групп.

I. В качестве примера первой группы рассмотрим следующую механическую систему: на движущейся с постоянной скоростью v_0 шероховатой ленте движется тело массы m . Имеется жесткая преграда, которую может встретить точка при своем движении (фиг. 6).

¹ Например, если в дифференциальном уравнении

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + cx = 0$$

пренебречь массой, то дифференциальное уравнение «вырожденной» системы будет

$$\varphi(\dot{x}) + cx = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = t(x)$$

Если же пренебречь упругостью, то дифференциальное уравнение будет

$$m\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = \psi(y) \quad (\dot{x} = y)$$

Примем простейшую идеализацию жесткого трения — кулоновский закон трения. Если обозначить $\dot{x} = y$, то уравнение движения такой системы будет

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad \text{где} \quad f(y) = \begin{cases} -\frac{T}{m} & (y > v_0) \\ 0 & (y = v_0) \\ \frac{T}{m} & (y < v_0) \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь T — величина силы трения.

При $x = a$ уравнение (4.2) несправедливо. Введем предположение об абсолютно упругом ударе.

Рассмотрение задачи можно провести с помощью фазовой прямой и вспомогательной плоскости yt . Но для большей наглядности мы вернемся в переменную x . Уравнение движения будет

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -T & (\dot{x} > v_0, x \leq a) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 & (\dot{x} = v_0, x \leq a) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= T & (\dot{x} < v_0, x \leq a) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Общее решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} Ft^2 + c_1 t + c_2 & (\dot{x} > v_0) \\ x &= v_0 t + c_3 & (\dot{x} = v_0) \\ x &= \frac{1}{2} Ft^2 + c_4 t + c_5 & (\dot{x} < v_0) \end{aligned}$$

где $F = T/m$ (независимых произвольных постоянных интегрирования будет только два).

На фиг. 7 приведена фазовая плоскость для уравнения (4.3); фазовые траектории даются уравнением

$$\dot{x}^2 = -2Fx + A \quad (\dot{x} > v_0) \quad (4.4)$$

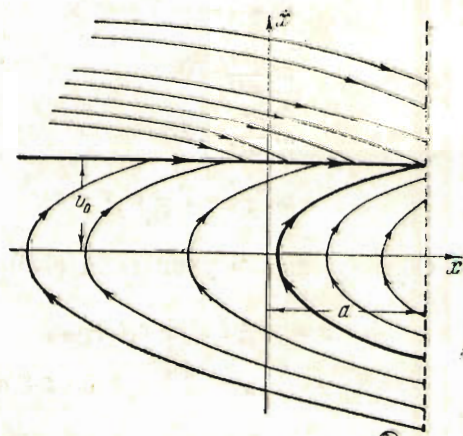
$$\dot{x}^2 = 2Fx + B \quad (\dot{x} < v_0) \quad (4.5)$$

Прямая $\dot{x} = v_0$ является фазовой траекторией.

Рассмотрим движение с начальными условиями

$$x = x_0, \quad \dot{x} = v_1 \geq v_0$$

Первый этап движения изображающей точки происходит по параболе (4.4). Если $\dot{x} = v_1 > v_0$ при $x = a$, то изображающая точка скачком перейдет в точку с координатами $x = a, \dot{x} = -v_1$. Далее изображаю-



Фиг. 7.

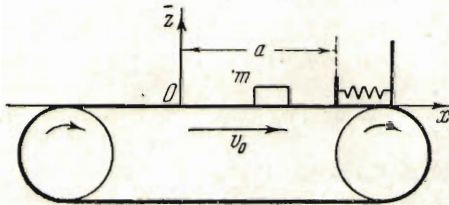
шая точка будет двигаться по параболе (4.5) до точки пересечения этой параболы с прямой $\dot{x} = v_0$. Координаты точки пересечения будут

$$x = a - \frac{v_1^2 - v_0^2}{2F} = v_0$$

Попав на прямую $\dot{x} = v_0$, изображающая точка будет двигаться по ней до точки с координатами $x = a$, $\dot{x} = v_0$. Произойдет скачок в точку $x = a$, $\dot{x} = -v_0$. Далее, перемещаясь по параболе (4.5), изображающая точка попадает опять в точку фазовой плоскости с координатами $x = a$, $\dot{x} = v_0$, далее происходит скачок в точку $x = a$, $\dot{x} = -v_0$ и начинается повторение описанного движения.

Если для начальных условий при $\dot{x} > 0$ или $\dot{x} < v_0$ параболы (4.4) и (4.5) пересекают прямую $\dot{x} = v_0$, то движение изображающей точки приходит к периодическому, рассмотренному выше.

Для начальных условий, при которых парабола (4.5) не пересекает прямую $\dot{x} = v_0$, движение изображающей точки происходит следующим образом: изображающая точка движется по параболе (4.5) до точки $x = a$, $\dot{x} = v_2 < v_0$, происходит скачок в точку $x = a$,



Фиг. 8.

$\dot{x} = -v_2$. Далее начинается движение опять по параболе (4.5) и т. д.

Рассмотрим эту же задачу, предположив, что преграда упругая (фиг. 8). Уравнение движения в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -F & (x \leq a, \dot{x} > v_0) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -F - c(x-a) & (x > a, \dot{x} > v_0) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 & (x \leq a + T/c, \dot{x} = v_0) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= F & (x \leq a, \dot{x} < v_0) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= F - c(x-a) & (x > a, \dot{x} < v_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Общее решение уравнения (4.6) будет

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} Ft^2 + c_1 t + c_2 & (x \leq a, \dot{x} > v_0) \\ x &= c_3 \sin \omega t + c_4 \cos \omega t + a - \frac{T}{c} & (x > a, \dot{x} > v_0) \\ x &= v_0 t + c_5 & (x \leq a + T/c, \dot{x} = v_0) \\ x &= \frac{1}{2} Ft^2 + c_6 t + c_7 & (x \leq a, \dot{x} < v_0) \\ x &= c_8 \sin \omega t + c_9 \cos \omega t + a + \frac{T}{c} & (x > a, \dot{x} < v_0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь независимых произвольных постоянных будет только два. На фиг. 9 показана фазовая плоскость уравнения (4.6) для

$$c > T^2 / mv_0^2$$

При $\dot{x} > v_0$ фазовые траектории даются уравнениями

$$\dot{x}^2 = -2Fx + A \quad (x \leq a) \quad (4.8)$$

$$\left[x - \left(a - \frac{T}{c} \right) \right]^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = D \quad (x > a) \quad (4.9)$$

Прямая $\dot{x} = v_0$ является фазовой траекторией для $x \leq a + T/c$.

При $\dot{x} < v_0$ фазовые траектории даются уравнениями

$$\dot{x}^2 = 2Fx + B \quad (x \leq a) \quad (4.10)$$

$$\left[x - \left(a + \frac{T}{c} \right) \right]^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = E \quad (x > a) \quad (4.11)$$

Рассмотрим движение с начальными условиями $x_0, \dot{x}_0 > v_0$. Изображающая точка будет двигаться по параболе (4.8). Возможны следующие случаи.

1. Парабола (4.8) пересечет прямую $\dot{x} = v_0$ при $x < a$. Тогда изображающая точка начнет двигаться по этой прямой до точки с координатами

$$x = a + \frac{T}{c} \quad \dot{x} = v_0$$

Далее движение начнется по эллипсу (4.11) до пересечения фазовой траекторией прямой $x = a$. Точка пересечения имеет координаты

$$x = a, \quad \dot{x} = -\sqrt{v_0^2 - \frac{T^2}{mc}}$$

Далее, движение изображающей точки происходит по параболе (4.10) до точки с координатами

$$x = a, \quad \dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{T^2}{mc}}$$

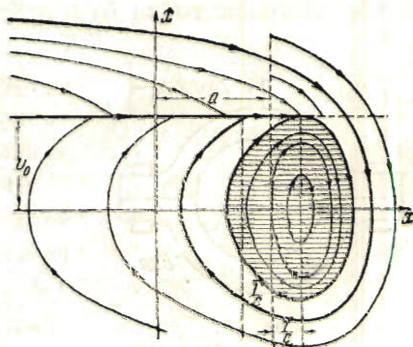
после чего по эллипсу (4.11) изображающая точка попадает в точку

$$x = a + \frac{T}{c}, \quad \dot{x} = v_0$$

Далее начнется повторение движения по эллипсу (4.11) и т. д.

2. Парабола (4.8) пересекает прямую $x = a$. Пусть точка пересечения имеет координаты $x = a, \dot{x} = v_1 > v_0$.

Далее изображающая точка движется по эллипсу (4.9). Если фазовая траектория пересечет прямую $\dot{x} = v_0$ при $x < a + T/c$, то изображающая точка, двигаясь по этой прямой, попадает в точку $x = a + T/c, \dot{x} = v_0$, после чего начнется описанное выше периодическое движение.



Фиг. 9.

Если фазовая траектория пересекает прямую $\dot{x} = v_0$ в точке

$$x = x_1 = a - \frac{T}{c} + \sqrt{\frac{T^2}{c^2} + \frac{v_1^2 - v_0^2}{c}} m > a + \frac{T}{c}, \quad \dot{x} = v_0 \quad (4.12)$$

то изображающая точка начнет дальнейшее движение по эллипсу (4.11). Время движения изображающей точки по эллипсу (4.9) равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{c}} \arccos \frac{v_0 v_1 + T / \sqrt{mc} \sqrt{v_1^2 - v_0^2 + T^2 / mc}}{v_1^2 + T^2 / mc} \quad (4.13)$$

Перемещаясь по эллипсу (4.11), изображающая точка достигает точки с координатами

$$x = a, \quad \dot{x} = -\sqrt{v_0^2 + [V T^2 / mc + v_1^2 - v_0^2 - 2T \sqrt{mc}]^2} = \dot{x}_2 \quad (4.14)$$

Время движения изображающей точки по эллипсу (4.11) равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{m}{c}} \arccos \frac{-\left(x_1 - a - \frac{T}{c}\right) T + m v_0^2 \sqrt{\left(x_1 - a - \frac{T}{c}\right)^2 - \frac{T^2}{c^2} + \frac{m v_0^2}{c}}}{c \left(x_1 - a - \frac{T}{c}\right)^2 + m v_0^2} \quad (4.15)$$

От точки фазовой плоскости с координатами, даваемыми (4.14), изображающая точка будет двигаться по параболе (4.10) до встречи с фазовой прямой $\dot{x} = v_0$. Перемещаясь по прямой $\dot{x} = v_0$, изображающая точка попадет в точку $x = a + T/c$, $\dot{x} = v_0$ и далее начнется движение, описанное выше.

Возможен случай, когда изображающая точка, перемещаясь по параболе (4.10), попадет в точку с координатами (4.14). Далее, перемещаясь по эллипсу (4.11) изображающая точка попадает на фазовую прямую $\dot{x} = v_0$.

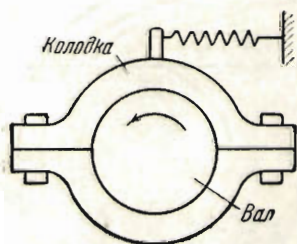
При начальных условиях $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 < v_0$ изображающая точка, перемещаясь по параболе (4.10), попадает на фазовую прямую $\dot{x} = v_0$. Дальнейшее движение изображающей точки, попавшей на фазовую прямую $\dot{x} = v_0$, уже рассмотрено.

Начальным условием, соответствующим точкам в заштрихованной области фазовой плоскости (фиг. 9), соответствуют периодические движения.

Если теперь сделать предельный переход к абсолютной жесткой преграде ($c = \infty$), то $t_1 \rightarrow 0$, $t_2 \rightarrow 0$, так как $x_1 \rightarrow a$, $\dot{x}_2 \rightarrow -v_1$ при $c \rightarrow \infty$, а эллипсы (4.9) и (4.11) вырождаются в прямую $x = a$.

Таким образом, в пределе приходим к движению, которое получено введением гипотезы об абсолютно упругом ударе, т. е. о бесконечно большой ударной силе и мгновенном изменении скорости.

II. В качестве примера второй группы, когда уравнение (4.1) теряет смысл для каких-либо значений переменных, рассмотрим теорию механических релаксационных колебаний^[8,9].



Фиг. 10.

Для конкретности рассмотрим следующую задачу. Малая масса m посажена в виде колодки с большим трением на равномерно вращающийся вал и связана со станиной при помощи пружин (фиг. 10). В силу того, что масса колодки достаточно мала, можно процесс движения разбить на две существенно различные области.

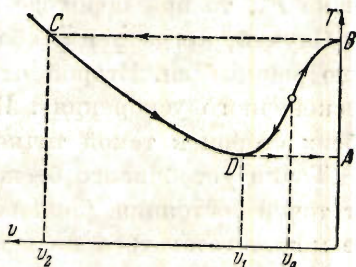
1. Область, в которой сила упругости много больше произведения массы на ускорение. Следовательно, движение системы определяется силой трения и силой пружины, координата системы меняется существенно, а скорость сравнительно медленно, т. е. ускорения не велики.

2. Область, в которой произведение массы на ускорение значительно больше силы упругости и движение определяется главным образом произведением массы на ускорение. Так как масса не велика, то ускорения велики, координата не успевает значительно изменяться, скорость же системы резко меняется.

Уравнение движения колодки имеет вид

$$r\{F[(\Omega - \dot{\varphi})r]\} = c\varphi \quad (4.16)$$

где c — коэффициент упругости системы, Ω — угловая скорость вала, $\dot{\varphi}$ — абсолютная угловая скорость колодки, r — радиус колодки, F — функция, выражающая зависимость трения от относительной скорости.



Фиг. 11.

Примем схематизированную характеристику трения, показанную на фиг. 11.

Для наглядности изображения движения вместо фазовой прямой введем «фазовую кривую», за которую возьмем характеристику трения, что можно сделать, так как координата и сила трения пропорциональны друг другу в областях, где происходит непрерывное движение (4.16).

На фиг. 11 по оси абсцисс отложена относительная скорость $v = r(\Omega - \dot{\varphi})$; при этом $v = 0$ соответствует движению колодки вместе с валом, $v_0 = r\Omega$ соответствует отсутствию абсолютного движения колодки; $\dot{\varphi} = 0$ есть единственное состояние равновесия.

При рассмотрении принятой характеристики трения нужно всегда иметь в виду, что пока $v = 0$, сила трения может принимать любое значение от 0 до F_0 — силы трения покоя, т. е. характеристика трения имеет вертикальную ветвь, совпадающую с осью координат на участке от $F = 0$ до $F = F_0$.

Направление движения изображающей точки по фазовой кривой определяется знаком $\ddot{\varphi}$. Продифференцируем уравнение (4.16)

$$c\ddot{\varphi} = -r^2 F'[(\Omega - \dot{\varphi})r] \dot{\varphi}$$

При $F' > 0$ знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ противоположны, при $F' < 0$ знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ одинаковы.

Для нас представляет интерес случай, когда величина Ω так мала, что v_0 лежит на падающем участке характеристики трения. В этом случае состояние равновесия $\dot{\varphi}$ неустойчиво.

При достаточно больших $\dot{\varphi}$ изображающая точка всегда движется в стороны малых $\dot{\varphi}$ до тех пор, пока $\ddot{\varphi}$ не меняет знака.

Изменение знака $\ddot{\varphi}$, как видно из уравнения

$$\ddot{\varphi} = -\frac{c}{r^2} \frac{\dot{\varphi}}{F'[(\Omega - \dot{\varphi})r]}$$

может произойти или от изменения знака $\dot{\varphi}$, или от изменения знака F' . Изменение знака функций связано с переходом этих функций через нуль. Если $\ddot{\varphi}$ меняет знак вследствие изменения знака $\dot{\varphi}$, то она также проходит через нуль, если $\ddot{\varphi}$ меняет знак вследствие изменения знака F' , то при переходе F' через нуль $\ddot{\varphi} = \pm \infty$.

Случай, когда $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ оба проходят через нуль, соответствует состоянию равновесия. Второй случай соответствует так называемой «точке бесконечного ускорения». Изображающая точка или приближается с обеих сторон к такой точке, или удаляется в обе стороны от нее.

Точка устойчивого бесконечного ускорения существенно отличается от точек состояния равновесия. В такой точке представляющая точка не может оставаться ни в каком случае.

Исходя из рассмотрения характеристики трения, можно показать, что при $F'(\Omega) < 0$ колодка совершает периодическое движение.

Сначала колодка вращается вместе с валом ($\dot{\varphi} = \Omega$), пружина растягивается—возрастает упругая сила, но возрастает также и сила трения, оставаясь равной упругой силе. Изображающая точка движется по участку AB фазовой кривой (фиг. 11).

Когда момент упругой силы становится равным моменту силы трения покоя, изображающая точка попадает в точку B —точку бесконечного ускорения.¹ Остаться там она не может, выйти из нее по фазовой кривой также не может. Остается предположить, что скорость колодки изменится скачком.

Чтобы выяснить, куда придет система после скачка, мы должны сформулировать «условия скачка».

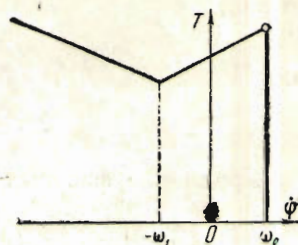
В рассматриваемом случае сила упругости пружины и сила трения во время скачка остаются неизменными (при принятой идеализации). Поэтому, если за условие скачка принять положение, что система придет в такое новое состояние, которое соответствует прежней энергии системы, то, так как координата системы не будет при скачке меняться, скачок произойдет в положение, соответствующее прежнему значению силы трения, т. е. в точку C .

Далее, изображающая точка будет двигаться с конечной скоростью и ускорением до точки D —точки «бесконечного ускорения».

Все сказанное относительно B относится и к точке D . В точке D произойдет скачок в скорости и изображающая точка попадает в точку A и процесс будет, повторяясь, продолжаться дальше.

Для выяснения физической картины явлений рассмотрим задачу, приняв, что $m \neq 0$.

Так как нас интересует в основном качественная картина, то мы можем принять для рассмотрения грубо идеализированную характеристику трения, представленную на фиг. 12. Точки сопряжения прямых на характеристике трения доопределим таким образом, чтобы в них $dT(\dot{\varphi})/dt = 0$, что вполне совместимо в сравнении с действительной характеристикой.



Фиг. 12.

Уравнение движения будет иметь вид (фиг. 11)

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi + M(\dot{\varphi}) \quad \left(\begin{array}{ll} -M_0 \leq M(\dot{\varphi}) \leq M_0 & (\dot{\varphi} = \omega_0) \\ M(\dot{\varphi}) = k_1\dot{\varphi} + b_1 & (-\omega_1 < \dot{\varphi} < \omega_0) \\ M(\dot{\varphi}) = k_2\dot{\varphi} + b_2 & (\dot{\varphi} < -\omega_1) \end{array} \right) \quad (4.17)$$

где J — момент инерции колодки, $M(\dot{\varphi}) = rT(\dot{\varphi})$ — момент силы трения, r — радиус вала и

$$b_1 = M_0 - k_1\omega_0, \quad b_2 = M_0 - k_1\omega_0 - \omega_1(k_1 + k_2)$$

Примем $k_1 > k_2$. Будем считать, что $J < k_1^2/4c$. Рассмотрим область $-\omega_1 < \dot{\varphi} < \omega_0$. Уравнение (4.17) для этой области имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi + k_1\dot{\varphi} + b_1 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} - 2h_1\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \frac{b_1}{J} \quad \left(2h_1 = \frac{k_1}{J}, \omega^2 = \frac{c}{J} \right) \quad (4.18)$$

Уравнение фазовых кривых будет

$$\left[\dot{\varphi} - \beta_1 \left(\varphi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_1} = c_1 \left[\dot{\varphi} - \beta_2 \left(\varphi - \frac{b_1}{c} \right) \right]^{\beta_2} \quad (4.19)$$

где

$$\beta_1 = h_1 + \sqrt{h_1^2 - \omega^2}, \quad \beta_2 = h_1 - \sqrt{h_1^2 - \omega^2} \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0)$$

Точка с координатами $\varphi = b_1/c, \dot{\varphi} = 0$ является особой точкой уравнения (4.18) типа «неустойчивый узел».

Геометрическое место точек, в которых кривые (4.19) имеют горизонтальные касательные, будет

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{k_1} \left(\varphi - \frac{b_1}{c} \right) \quad (4.20)$$

Геометрическое место вертикальных касательных будет $\dot{\varphi} = 0$. Заметим, что прямая (4.20) проходит через точку $\varphi = M_0/c, \dot{\varphi} = \omega_0$.

Рассмотрим область $\dot{\varphi} < -\omega_1$. Уравнение (4.17) в этой области имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi - k_2\dot{\varphi} + b_2$$

или

$$\varphi + 2h_2\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \frac{b_2}{J} \quad \left(2h_2 = \frac{k_2}{J}\right)$$

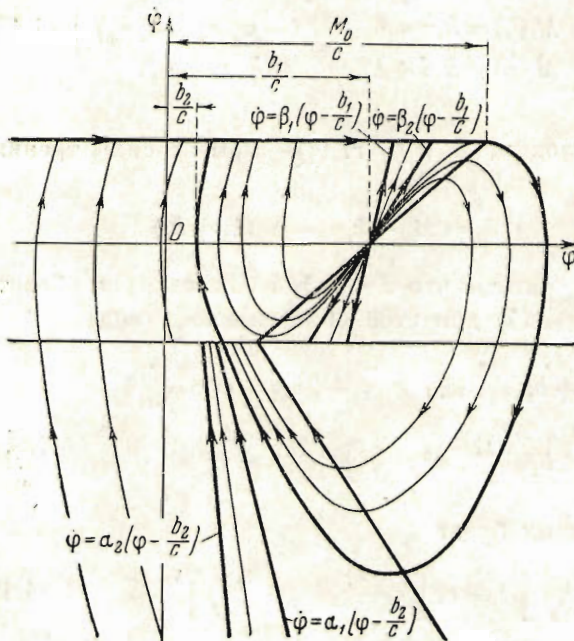
Уравнение фазовых траекторий будет

$$\left[\dot{\varphi} - \alpha_1\left(\varphi - \frac{b_2}{c}\right)\right]^{\alpha_1} = c_2 \left[\dot{\varphi} - \alpha_2\left(\varphi - \frac{b_2}{c}\right)\right]^{\alpha_2} \quad (4.21)$$

где

$$\alpha_1 = -h_2 + \sqrt{h_2^2 - \omega^2}, \quad \alpha_2 = -h_2 - \sqrt{h_2^2 - \omega^2}$$

$$(\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0)$$



Фиг. 13.

уравнения (4.17). Направление движения по фазовым траекториям указано стрелками. Рассмотрим движение с начальными условиями

$$-M\frac{M_0}{c} < \varphi < \frac{M_0}{c}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0.$$

Изображающая точка будет перемещаться по фазовой прямой до точки $\varphi = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ (что соответствует движению колодки вместе с валом).

Далее движение начнется по фазовой траектории семейства (4.19), которая в точке $\dot{\varphi} = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ имеет горизонтальную касательную и пересекает ось $\dot{\varphi} = 0$ под прямым углом. От прямой $\dot{\varphi} = -\omega_1$ движение изображающей точки начнется по фазовой траектории семейства

Геометрическое место горизонтальных касательных к кривым (4.21) будет

$$\dot{\varphi} = -\frac{c}{k_2}\left(\varphi - \frac{b_2}{c}\right) \quad (4.22)$$

Геометрическое место вертикальных касательных будет $\dot{\varphi} = 0$. Точка

$$\varphi = b_2/c, \quad \dot{\varphi} = 0$$

есть устойчивый узел.

Прямые (4.20) и (4.22) пересекаются в точке с координатами

$$\varphi = \frac{M_0}{c} - \frac{k_1}{c}(\omega_0 + \omega_1)$$

$$\dot{\varphi} = -\omega_1$$

На фиг. 13 представлена фазовая плоскость

(4.21), которая при пересечении с прямой (4.22) имеет горизонтальную касательную и пересечет прямую $\dot{\varphi} = -\omega_1$ в точке, для которой $b_1/c < \varphi < b_1/c - k_1\omega_1/c$ (так как геометрическое место вертикальных касательных для этого семейства будет прямая $\dot{\varphi} = 0$).

Далее изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории семейства (4.19), пока эта траектория не пересечет фазовую прямую $\dot{\varphi} = \omega_0$. При $\beta_2 > c/(k_1 + k_2)$ пересечение будет происходить в точке, для которой $\varphi > -M_0/c$. Затем изображающая точка перемещается по фазовой траектории $\dot{\varphi} = \omega_0$ до точки $\dot{\varphi} = M_0/c$, $\varphi = \omega_0$ и далее, как было описано выше. При выбранных начальных условиях мы получили периодическое движение. Выясним, что будет происходить с системой, если $J \rightarrow 0$.

В области $-\omega_1 < \dot{\varphi} < \omega_0$ уравнение (4.17) вырождается в уравнение вида

$$-c\dot{\varphi} + M(\dot{\varphi}) = 0 \quad \text{или} \quad -c\dot{\varphi} + k_1\dot{\varphi} + b_1 = 0 \quad (4.23)$$

Семейство фазовых траекторий (4.19) вырождается в прямые¹

$$\dot{\varphi} = \frac{b_1}{c}, \quad \dot{\varphi} = \left(\dot{\varphi} - \frac{b_1}{c}\right) \frac{c}{k_1}$$

Это в сущности вырожденные фазовые траектории

$$\dot{\varphi} = \beta_1 \left(\dot{\varphi} - \frac{b_1}{c}\right), \quad \dot{\varphi} = \beta_2 \left(\dot{\varphi} - \frac{b_1}{c}\right)$$

получаемые из (4.19) при $c_1 = \infty$ и $c_1 = 0$.

Точка $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = b_1/c$ остается точкой неустойчивого равновесия.

В области $\dot{\varphi} < -\omega_1$ уравнение (4.17) вырождается в уравнение

$$-c\dot{\varphi} + M(\dot{\varphi}) = 0 \quad \text{или} \quad -c\dot{\varphi} - k_2\dot{\varphi} + b_2 = 0 \quad (4.24)$$

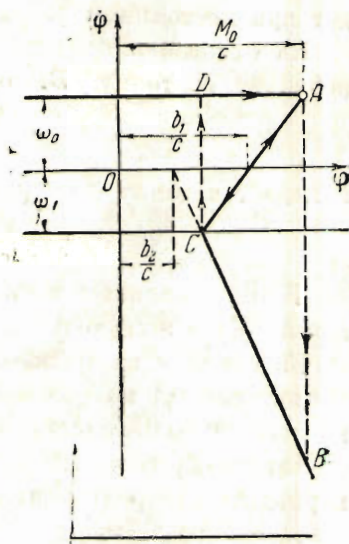
Семейство фазовых траекторий (4.21) вырождается в прямые

$$\dot{\varphi} = -\left(\dot{\varphi} - \frac{b_2}{c}\right) \frac{c}{k_2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{b_2}{c}$$

При этом точка $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = b_2/c$ будет точкой устойчивого состояния равновесия; фазовая прямая $\dot{\varphi} = \omega_0$ остается фазовой прямой.

Вид вырожденной фазовой плоскости дан на фиг. 14. Рассмотрим, каково будет движение изображающей точки.

Пусть $\dot{\varphi} = \omega_0$, причем $-M_0/c < \varphi < M_0/c$; тогда изображающая точка, перемещаясь по фазовой прямой $\dot{\varphi} = \omega_0$ (колодка захвачена



Фиг. 14.

¹ Движение колочки, даваемое уравнением (4.23), нужно было бы отображать на фазовой прямой, но для наглядности мы будем отображать движение на фазовой кривой, расположенной в обычной фазовой плоскости. За фазовую кривую выберем ломанную линию, которая получится из уравнений (4.19) и (4.21) при $J \rightarrow 0$.

валом, т. е. относительная скорость колодки равна нулю), попадает в точку $\varphi = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \omega_0$. Из этой точки она по фазовым прямым уйти не может, так как направления движения сходятся в этой точке. Оставаться в этой точке изображающая точка также не может, так как $\ddot{\varphi} = \infty$, т. е. точка фазовой плоскости $\varphi = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ будет устойчивой точкой бесконечного ускорения. В самом деле, продифференцировав уравнение $-c\dot{\varphi} + M(\dot{\varphi}) = 0$, найдем $\ddot{\varphi} = c\dot{\varphi}/M'(\dot{\varphi})$; но в точке $\varphi = M_0/c$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ имеем $M'(\omega_0) = 0$.

Остается предположить, что скорость колодки изменится скачком, причем условием скачка будет то, что система должна сохранить прежнюю энергию, так как принято, что колодка имеет момент инерции, равный нулю, то кинетическая энергия равна нулю. Вся энергия системы будет потенциальной энергией. Следовательно, скачок произойдет при постоянном φ .

На фазовой плоскости изображающая точка из точки *A* скачком перейдет в точку *B*, откуда, перемещаясь по фазовой прямой

$$\dot{\varphi} = -\left(\varphi - \frac{b_2}{c}\right) \frac{c}{k_2}$$

попадет в точку *c* с координатами

$$\varphi = \frac{M_0}{c} - (\omega_0 + \omega_1) \frac{k_1}{c}, \quad \dot{\varphi} = -\omega_1.$$

Точка *c* является точкой устойчивого бесконечного ускорения, так как $M'(\dot{\varphi})$ в этой точке равно нулю.

Из точки *c* изображающая точка скачком перейдет в точку *D* (при постоянном φ) на фазовой прямой $\dot{\varphi} = \omega_0$. Далее движение будет продолжаться вышеописанным образом.

Таким образом, мы получили, что колодка при $J=0$ совершает периодические релаксационные колебания.

Поступила в редакцию
1 III 1947

Ленинградская военно-воздушная
инженерная академия

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний. Известия Академии Наук СССР, серия физическая. 1945. Т. IX. № 1—2.
2. Painlevé Leçons sur le frottement; Hermann. Paris. 1895.
3. Klein F. Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1909. V. 57.
4. Prandtl L. Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. Mises und Gg. Hamel. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1909. V. 57.
5. Mises R. Zur Kritik der Reibungsgesetze. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1909. V. 57.
6. Hamel Gg. Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R. Mises. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1909. V. 57.
7. Pfeiffer F. Zur Frage der sog. Coulombschen Reibungsgesetze. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1910. V. 58.
8. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ. 1937.
9. Кайдановский Н. и Хайкин С. Механические релаксационные колебания. Журнал технической физики. Т. III.