Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

И. М. Волк

(Свердловск)

В статье «Некоторые обобщения метода малого параметра в теории периодических движений неавтономных систем»[1] рассмотрен вопрос о существовании и построении периодических решений систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

при предположении, что среди правых частей последних имеется хотя бы одна, зависящая явно от t. В настоящей работе рассматривается тот же вопрос, но при предположении, что исследуемая система (будем попрежнему называть ее «основной») является автономной, т. е. что среди величин $X_1, \ldots, X_n$ нет ни одной, зависящей явно от t.

§ 1. Постановка задачи. Предполагая, что основная система автономна, кроме того, будем полагать, что все правые части этой системы являются аналитическими функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$ и мероморфными функциями некоторого параметра μ в какой-либо области $G\,(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i)$ и $|\mu| \leqslant r$. Сохранив при этом понятие «упрощенной» системы

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} X_\nu^\circ (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

понятие отрезка изменения параметра μ и понятие решения дифференциальных уравнений при $\mu = 0$, принятые в упомянутой статье, поставим следующую задачу. *Пусть упрощенная система допускает периодическое решение* $x_\nu^\circ = x_\nu^\circ(\mu, \omega t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *с периодом* $2\pi/\omega$ (ω *может зависеть от* μ, *причем мероморфно*), *которое при всех вещественных значениях величины* ωt *и достаточно малых* $|\mu|$ *не выходит из области* G; *требуется установить, при каких условиях основная система допускает периодическое решение для любых значений параметра в некотором отрезке, которое при достаточно малых* $|\mu|$ *сколь угодно мало отличалось бы от соответствующего периодического решения упрощенной системы при любом значении* t; *кроме того, требуется указать способ построения некоторых рядов, аппроксимирующих периодическое решение основной системы, если оно существует.*

Легко заметить, что разница между основной задачей в теории периодических решений Пуанкаре для автономных систем и сформулированной выше задачей точно такая же, какая была отмечена в статье [1] (конец § 1) при сравнении аналогичных задач для неавтономных систем.

§ 2. Приведение решаемой задачи к соответствующей задаче для неавтономных систем. В дальнейшем, говоря о периодическом решении упрощенной системы, всякий раз будем полагать, что оно удовлетворяет условиям задачи и, кроме того, условию, что для каждой из отличных от нуля величин $x_\nu^\circ(\mu, \omega t)$ $(\nu=1, \ldots, n)$ можно подобрать такое целое не отрицательное число m_ν, чтобы она могла быть представлена в виде $\mu^{m_\nu} x_\nu^*(\mu, \omega t)$, где $x_\nu^*(0, \omega t)$ отлично от нуля и при всех вещественных значениях величины ωt конечно; будем полагать еще, что из величин $x_1^\circ(0, \omega t), \ldots, x_n^\circ(0, \omega t)$ по меньшей мере одна зависит от t. Первый член в разложении $1/\omega$ в ряд по целым степеням μ обозначим через $\omega_0 \mu^N$, где ω_0 не зависит от μ.

Подразумевая, что h — неопределенная постоянная, подстановкой

$$y_\nu = x_\nu - \mu^{m_\nu} x_\nu^*(0, \tau) \qquad (\nu=1, \ldots, n), \qquad t = \frac{1+h}{\omega}\tau \tag{2.1}$$

преобразуем основную систему к виду

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}[p_{\nu 1} y_1 + \ldots + p_{\nu n} y_n + p_\nu \mu + Y_\nu + h(q_\nu + H_\nu)] \quad (\nu=1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

где

$$\varkappa_\nu = k_\nu + N, \qquad p_{\nu\sigma} = \omega_0 \left(\frac{\partial X_\nu^\circ}{\partial x_\sigma^\circ}\right)_*, \qquad q_\nu = \omega_0 (X_\nu^\circ)_*$$

$$H_\nu = p_{\nu 1} y_1 + \ldots + p_{\nu n} y_n + p_\nu \mu + Y$$

символ $(\ )_*$ означает подстановку $x_i^\circ = x_i^\circ(0, \tau)$, p_ν — не зависящая от μ постоянная или функция только от τ и разложения величин $Y_1, \ldots, Y_n$ в ряды по целым положительным степеням $\mu, y_1, \ldots, y_n$ не содержат членов ниже второго порядка; правые части относительно τ являются периодическими функциями с периодом 2π.

Система (2.1) эквивалентна следующей:

$$\frac{dh}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dy_\nu}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}(p_{\nu 1} y_1 + \ldots + p_{\nu n} y_n + q_\nu h + p\ \mu + Y_\nu + h H_\nu)$$
$$(\nu=1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Последняя система с $n+1$ независимыми переменными $h, y_1, \ldots, y_n$ и зависимой переменной τ представляет частный случай неавтономной системы, рассмотренной в работе [1]. Имея в виду в дальнейшем воспользоваться результатами этой работы, заметим, что упрощенная по отношению к системе (2.3) система

$$\frac{dh^\circ}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dy_\nu^\circ}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}[p_{\nu 1} y_1^\circ + \ldots + p_{\nu n} y_n^\circ + q_\nu h^\circ + (Y_\nu|_{\mu=0} + h^\circ (H_\nu|_{\mu=0})]$$
$$(\nu=1, \ldots, n)$$

допускает периодическое решение $h^\circ = y_1^\circ = \ldots = y_n^\circ = 0$, которому соответствует следующая определяющая система:

$$\frac{d\zeta^*}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\zeta^*_\nu}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}(p_{\nu 1}\zeta_1^* + \cdots + p_{\nu n}\zeta_n^* + q_\nu \zeta^*) \qquad (\nu=1, \ldots, n)$$

Кроме того, заметим, что, как это установлено в работе «О периодических решениях неавтономных систем, зависящих от малого параметра»[2], последняя система будет нормальной[2] в некотором отрезке g изменения μ, если только в этом отрезке будет нормальна система

$$\frac{d\zeta_\nu}{d\tau}=\mu^{\varkappa_\nu}(p_{\nu 1}\zeta_1+\cdots+p_{\nu n}\zeta_n) \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{2.4}$$

которую будем называть определяющей по отношению к автономной системе, рассматриваемой в настоящей работе.

§ 3. О формальных периодических рядах. Применив правила построения формальных периодических рядов для неавтономных систем, сформулированные в статье[1], к системе (2.3) и возвратившись затем от этой системы к основной системе, рассматриваемой в настоящей работе, получим следующие правила построения формальных периодических рядов для автономных систем. Попытаемся формально удовлетворить системе (2.2) рядами вида

$$y_\nu=y_\nu^{(1)}\mu+y_\nu^{(2)}\mu^2+\cdots \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{3.1}$$

причем произвольную пока постоянную h будем рассматривать как функцию от μ, определяемую рядом

$$h=h_1\mu+h_2\mu^2+\cdots \tag{3.2}$$

коэффициенты которого по мере возможности подбираются так, чтобы ряды (3.1) были периодическими. После формальной замены в системе (2.2) величин $y_1,\ldots,y_n$ и h соответствующими рядами (3.1) и (3.2) и последующей группировки членов с одинаковыми степенями μ получим

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{dy_\nu^{(\alpha)}}{d\tau}\mu^\alpha=\mu^{\varkappa_\nu}\sum_{\alpha=1}^{\infty}(p_{\nu 1}y_1^{(\alpha)}+\cdots+p_{\nu n}y_n^{(\alpha)}+q_\nu h_\alpha+Y_\nu^{(\alpha)})\mu^\alpha$$
$$(\nu=1,\ldots,n)$$

где, как легко проверить, все $Y_\nu^{(\alpha)}$ суть известные целые рациональные функции с периодическими относительно τ (период — 2π) и не зависящими от μ коэффициентами только от тех $y_1^{(\sigma)},\ldots,y_n^{(\sigma)},h_\sigma$, для которых $\sigma<\alpha$; в частности, $Y_\nu^{(1)}=p_\nu$. Первое из чисел $\alpha=2,3,\ldots$, для которого хотя бы одна из величин $Y_1^{(\alpha)},\ldots,Y_n^{(\alpha)}$ зависит хотя бы от одной из величин $y_1^{(1)},\ldots,y_n^{(1)}$, обозначим через $c+1$. Система (2.1) формально будет удовлетворена, если коэффициенты рядов (3.1) последовательно определять как какие-либо решения следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_\nu^{(\alpha)}}{d\tau}=\mu^{\varkappa_\nu}(p_{\nu 1}y_1^{(\alpha)}+\cdots+p_{\nu n}y_n^{(\alpha)}+q_\nu h_\alpha+Y_\nu^{(\alpha)}) \tag{3.3}$$
$$(\nu=1,\ldots,n,\quad \alpha=1,2,\ldots)$$

Но требуется, чтобы ряды (3.1) были периодическими и вместе с рядами (3.2) обращались в нуль при $\mu=0$; поэтому сначала определяются $h_1,\ldots,h_c$ и прозвольные постоянные, которые, быть может, содержатся в периодическом решении упрощенной системы, по мере возможности так, чтобы система (3.3) при $\alpha=1,\ldots,c$ допускала периодическое решение и чтобы при этом периодическое решение упрощенной системы и $h_1,\ldots,h_c$ были непрерывны и вещественны в некоторой полосе[1] $d(\mu, \tau)$; затем, если такое решение найдено, определяем h_{c+1} и произвольные постоянные, которые, быть может, содержатся в $y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$, по мере возможности так, чтобы система (3.3) и при $\alpha = c + 1$ допускала периодическое решение и чтобы при этом $y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}$ и h_{c+1} тоже были непрерывными и вещественными в $d(\mu, \tau)$ и т. д. Допустим, что каким-либо образом удалось установить, что при некоторых условиях вычисления указанным способом, как долго ни длился бы этот процесс, можно вести так, чтобы коэффициенты рядов (3.1) были периодическими; тогда при этих условиях существуют периодические ряды, формально удовлетворяющие основной системе, которые получим после возврата от переменных $y_1, \ldots, y_n$ и τ к переменныт $x_1, \ldots, x_n$ и t. Период этих рядов относительно t равен $(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots)\, 2\pi / \omega$; коэффициенты, вообще говоря, зависят от μ, и, чтобы построить ряды, очевидно достаточно знать общее решение определяющей системы (2.4). Пусть $\zeta_\nu = \zeta_\nu(\mu, B_1, \ldots, B_l, \tau)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ — периодическое решение определяющей системы, содержащее l (l — максимальное число произвольных постоянных в периодическом решении, допускаемом определяющей системой) произвольных постоянных $B_1, \ldots, B_l$. Тогда при любом $\alpha = 1, 2, \ldots$ всякое периодическое решение системы (3.3) содержится в формулах

$$y_\nu^{(\alpha)} = \varphi_\nu^{(\alpha)}(\mu, \tau) + \zeta_\nu(\mu, B_1^{(\alpha)}, \ldots, B_l^{(\alpha)}, \tau)$$
$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

если только совокупность величин $\varphi_1^{(\alpha)}, \ldots, \varphi_n^{(\alpha)}$ представляет какое-либо периодическое решение этой системы. Начиная с $\beta = 2$ (а может быть, и с $\beta = 1$), соотношения, получаемые из условия, чтобы коэффициенты рядов (3.1) были периодическими, каждый раз представляют систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $B_1^{(\beta+r)}, \ldots, B_l^{(\beta+r)}, h_{c+\beta+r}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, причем одна такая система отличается от другой лишь свободными членами; первое из указанных линейных условий попрежнему[1] будем называть «главным условием (A)». Может случиться, что при соблюдении условия вещественности и непрерывности в некотором отрезке изменения μ всех величин $B_1^{(\beta)}, \ldots, B_l^{(\beta)}, h_{c+\beta}$ главное условие (A) может быть удовлетворено при всяких наперед заданных значениях некоторой части (обозначим это число через δ) из неопределенных постоянных $B_1^{(\beta)}, \ldots, B_l^{(\beta)}$; для определенности допустим, что этими произвольными постоянными являются δ первых. Тогда, начиная с $r = 1$, величины $B_1^{(\beta+r)}, \ldots, B_\delta^{(\beta+r)}$ условимся полагать каждый раз равными нулю.

В связи с вопросом о неопределенных постоянных отметим одно обстоятельство, являющееся специфическим для автономных систем. Если

$$x_\nu = \mu^{m_\nu} x_\nu^*\left(0, \frac{\omega}{1+h} t\right) + \mu y_\nu^{(1)}\left(\mu, \frac{\omega}{1+h} t\right) + \cdots$$
$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем мы сохраняем терминологию, принятую в статье[1].

периодическое решение основной автономной системы, соответствующее периодическому решению $x_\nu^\circ = x_\nu^\circ(\mu, \omega t)$ упрощенной системы, то (t_0 — произвольная постоянная)

$$x_\nu = \mu^{m_\nu} x_\nu^* \left[0, \frac{\omega}{1+h}(t-t_0)\right] + \mu y_\nu^{(1)} \left[\mu, \frac{\omega}{1+h}(t-t_0)\right] + \cdots \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

есть периодическое решение основной автономной системы, соответствующее периодическому решению $x_\nu{}^\circ = x_\nu{}^\circ[\mu, \omega(t-t_0)]$ упрощенной системы. Поэтому, не рискуя потерять какое-либо периодическое решение, допускаемое основной автономной системой, вычисления можно вести при наперед заданном начальном условии для какой-либо одной из содержащих произвольные постоянные величин $x_1{}^\circ, \ldots, x_n{}^\circ$, а также одной из содержащих произвольные постоянные величин $y_1, \ldots, y_n$ (не обязательно того же номера), которую впредь будем обозначать через y_a, лишь бы только в построенных рядах заменить t на $t - t_0$.

§ 4. Об условиях существования формальных периодических рядов, когда определяющая система нормальна. Говоря об условиях существования формальных периодических рядов для автономных систем, в дальнейшем всюду будем полагать, что соответствующие соотношения, которым должны удовлетворять величины $B_1^{(\gamma)}, \ldots, B_l^{(\gamma)}$, $h_{c+\gamma}$, каждый раз дополнены равенствами $y_a^{(\gamma-c)}(\mu, 0) = 0$. Аналогичное будем полагать, говоря и о главном условии (A).

Будем полагать, что определяющая система нормальна в некотором отрезке g изменения μ, и под $b_{\nu r}$, $s_{\nu-1}$, ρ_ν $(r, \nu = 1, \ldots, n)$ будем подразумевать то же, что и в работе[1]. Равные нулю и представляющие целую кратность числа $\sqrt{-1}$ не зависящие от μ характеристические показатели определяющей системы обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\sum_{r=1}^{n} b_{\alpha r} q_r = A_\alpha^{(0)} e^{\lambda_\alpha \tau}, \qquad \sum_{r=1}^{n} b_{\beta r} q_r = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, m \\ \beta = m+1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

где $A_1^{(0)}, \ldots, A_m^{(0)}$ — некоторые постоянные, среди которых по меньшей мере одна не обращается в нуль при $\mu = 0$. Это легко усматривается из того, что совокупность величин $\zeta_\nu = \mu^{x_\nu} X_\nu{}^\circ\, 1/\omega$ при $x_i{}^\circ = x_i{}^\circ(\mu, \tau)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ есть одно из решений определяющей системы, которое по условию не обращается в $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = 0$ при $\mu = 0$. Пусть

$$z_1^{(\alpha)} = \rho_1 e^{\lambda_1 \tau} \int_0^\tau e^{-\lambda_1 \tau} \sum_{r=1}^{n} b_{1r} (Y_r^{(\alpha)} + q_r h_\alpha)\, d\tau$$

$$z_\sigma^{(\alpha)} = \rho_\sigma e^{\lambda_\sigma \tau} \int_0^\tau e^{-\lambda_\sigma \tau} \left[s_{\sigma-1}^{(\alpha)} z_{\sigma-1}^{(\alpha)} + \sum_{r=1}^{n} b_{\sigma r} (Y_r^{(\alpha)} + q_r h_\alpha) \right] d\tau \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots \\ \sigma = 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Тогда, применив необходимые и достаточные условия существования у неавтономных систем формальных периодических рядов, установленные в работе[1] (§ 4), к системе (2.3) и перейдя затем к основной системе, рассматриваемой в настоящей работе, непосредственно устанавливаем, учитывая соотношения (4.1), что необходимые и достаточные условия существования формальных периодических рядов у автономных систем имеют вид ($a=1, 2, \ldots;\quad \sigma=2, \ldots, m$)

$$y_a^{(\dot{a}-c)}(\mu, 0)=0$$

$$T^* h_{\dot{a}} A_1^{(0)} + \int_0^{T^*} e^{-\lambda_1 \tau} \sum_{r=1}^{n} b_{1r} Y_r^{(\dot{a})} d\tau = 0. \qquad (A_\alpha)$$

$$T^* h_\alpha A_\sigma^{(0)} + \int_0^{T^*} e^{-\lambda_\sigma \tau} \left(s_{\sigma-1} z_{\sigma-1}^{(\alpha)} + \sum_{r=1}^{n} b_{\sigma r} Y_r^{(\alpha)} \right) d\tau = 0$$

где T^* означает либо 2π, либо 4π.

Заметив, что для автономных систем величина m всегда отлична от нуля, рассмотрим следующие два частных случая.

Случай 1. Пусть среди не зависящих от μ характеристических показателей определяющей системы имеется не более одного, равного нулю, и нет ни одного, представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}$.

Равный нулю характеристический показатель определяющей системы обозначим через λ_1. Условия (A_α) ($\alpha=1, 2, \ldots$) имеют вид

$$y_a^{(\alpha-c)}(\mu, 0)=0, \qquad h_{\dot{a}} = -\frac{1}{T^* A_1^{(0)}} \int_0^{T^*} \sum_{r=1}^{n} b_{1r} Y_r^{(\alpha)} d\tau$$

причем, как это ранее установлено, $A_1^{(0)}$ не обращается в нуль при $\mu=0$. Учитывая, кроме того, что в рассматриваемом случае величины $b_{11}, \ldots, b_{1n}$, так же как и величина $A_1^{(0)}$, вещественны при вещественных μ и τ в некоторой полосе, устанавливаем, что *в этом случае основная автономная система всегда допускает формально удовлетворяющие ей периодические ряды, строящиеся установленным способом, независимо от вида отброшенных по сравнению с упрощенной системой членов в дифференциальных уравнениях основной системы.*

Случай 2. Пусть среди равных нулю или представляющих целую кратность числа $\sqrt{-1}$ характеристических показателей определяющей системы нет одинаковых. Почти дословно повторив выкладки, проведенные при рассмотрении аналогичного случая в статье[1] (§ 4, случай 2), устанавливаем, что в рассматриваемом случае имеет место следующее: *если $x_\nu^{(0)}$ и $y_\nu^{(1)}$ ($\nu=1, \ldots, n$) суть периодические, непрерывные и вещественные в какой-либо полосе (μ, τ) и если при этом определитель, составленный из коэффициентов при неопределенных постоянных в главном условии (A), отличен от нуля при $\mu=0$, то основная система допускает формально удовлетворяющие ей периодические ряды.*

§ 5. Основная теорема. Применив «основную» теорему о периодических решениях неавтономных систем, доказанную в статье[1], к системе (2.3) и возвратившись затем от этой системы к основной системе, рассматриваемой в настоящей работе, получим следующую теорему о периодических решениях автономных систем.

Пусть упрощенная система допускает периодическое решение, которому в каком-либо отрезке g изменения параметра μ соответствует нормальная определяющая система; если при этом основная система допускает формально удовлетворяющие ей периодические ряды, строящиеся установленным способом, то внутри g существует отрезок, во всех точках которого основная система допускает периодическое решение, причем оно при достаточно малых |μ| сколь угодно мало отличается от соответствующего периодического решения упрощенной системы; это решение основной системы представляется указанными рядами.

Так же, как для неавтономных систем, имеют место следующие положения и для автономных систем.

а) Возможны случаи, когда существуют ряды, формально удовлетворяющие основной системе, строящиеся по правилам, отличным от принятых нами; но вопрос о том, представляется ли этими рядами действительно периодическое решение основной системы, остается открытым и подлежит специальному рассмотрению в каждом конкретном случае.

б) В зависимости от того, в каком отрезке изменения параметра μ определяющая система нормальна, возможны соответственно случаи, когда отрезок, во всех точках которого основная система допускает периодическое решение, включает либо только неположительные значения, либо только неотрицательные значения, либо и те и другие значения μ.

в) Могут иметь место случаи, когда ни одно из периодических решений упрощенной системы не в состоянии «породить» периодическое решение основной системы, и случаи, когда это в состоянии сделать лишь некоторые классы, или только несколько вполне определенных, или даже только одно из всех периодических решений, допускаемых упрощенной системой.

§ 6. Некоторые частные случаи задачи. Основная теорема, доказанная выше в применении к двум частным случаям, рассмотренным в § 4, непосредственно приводит к следующим выводам.

Теорема I. Пусть упрощенная система допускает периодическое решение, которому соответствует в каком-либо отрезке g изменения параметра μ нормальная определяющая система; если при этом основная система автономна и среди не зависящих от μ характеристических показателей определяющей системы имеется не более одного, равного нулю, и нет ни одного, представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}$, *то внутри g существует отрезок, во всех точках которого основная система допускает периодическое решение, строящееся установленным способом, причем оно при достаточно малых |μ| сколь угодно мало отличается от соответствующего периодического решения упрощенной системы.*

В частности, для случая, когда $k_1 = \ldots = k_n = 0$, эта теорема устанавливает: если дифференциальные уравнения основной автономной системы допускают при $\mu = 0$ периодическое решение $x_\nu{}^\circ = x_\nu{}^\circ(t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, среди характеристических показателей которого не более одного, равного нулю, и нет ни одного, представляющего целую кратность числа $\sqrt{-1}$, то они же допускают периодическое решение и при любых численно достаточно малых значениях параметра, обращающееся в $x_\nu^\circ(t)$ при $\mu = 0$; это решение может быть представлено под видом рядов, расположенных по целым положительным степеням μ. Последний частный результат представляет одну из основных теорем в теории периодических решений Пуанкаре для автономных систем[3].

Теорема II. Пусть упрощенная система допускает периодическое решение, которому соответствует нормальная в какам-либо отрезке g изменения параметра μ определяющая система, обладающая тем свойством, что среди равных нулю и представляющих целую кратность числа $\sqrt{-1}$ не зависящих от μ характеристических показателей нет одинаковых; если при этом, строя формальные периодические ряды по установленным правилам, неопределенными постоянными можно распорядиться так, чтобы x_ν^0 и $y_\nu^{(1)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ были периодическими, непрерывными и вещественными в некоторой полосе (μ, τ), и если, кроме того, определитель, составленый из коэффициентов при неопределенных постоянных в главном условии (A), при $\mu = 0$ отличен от нуля, то внутри g существует отрезок, во всех точках которого основная система допускает периодическое решение, строящееся установленным способом, причем оно при достаточно малых $|\mu|$ сколь угодно мало отличается от соотвествующего периодического решения упрощенной системы.

Как легко заметить, случай, предусмотренный первой теоремой, является единственным, когда существование периодического решения у автономной основной системы может быть гарантировано независимо от вида отброшенных по сравнению с дифференциальными уравнениями упрощенной системы членов в дифференциальных уравнениях основной системы.

Во всех прочих случаях решение вопроса о существовании периодического решения у автономной основной системы, помимо знания дифференциальных уравнений упрощенной системы, требует еще знания по меньшей мере некоторого конечного числа (как это имеет место, например, в случае, предусмотренном теоремой II) членов в разложениях правых частей дифференциальных уравнений основной системы в ряды по целым степеням параметра μ.

§ 7. Пример, иллюстрирующий метод. Пусть, дана система

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu y \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu}\left(y + x\frac{dx}{dt}\right) \tag{7.1}$$

где k — вещественная, не зависящая от μ постоянная, а μ — малый параметр.

Дифференциальные уравнения упрощенной системы

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2x_0 = 0, \qquad \frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\mu}\left(y_0 + x_0\frac{dx_0}{dt}\right)$$

допускают следующее семейство периодических решений:

$$x_0 = A_0\cos kt + B_0\sin kt$$

$$y_0 = \frac{k}{2(1+4k^2\mu^2)}\left\{(B_0^2 - A_0^2 - 4k\mu A_0B_0)\sin 2kt + \right.$$
$$\left. + 2\left[k\mu(B_0^2 - A_0^2) + A_0B_0\right]\cos 2kt\right\}$$

где A_0 и B_0 — произвольные постоянные.

В соответствии с установленным в § 3, не рискуя потерять какое-либо периодическое решение основной системы, вычисления можно вести при дополнительном условии, чтобы, например, dx_0/dt обратилось в нуль при $t=0$.

Положив $B_0=0$, сделаем замену переменных:

$$\xi = x - A_0 \cos\tau, \qquad \eta = y - \frac{1}{2} kA_0^2 \sin 2\tau, \qquad t = \frac{1+h}{k}\tau$$

Характеристические показатели определяющей системы

$$\frac{d^2\xi_0}{d\tau^2} = -\xi_0, \qquad \frac{d\eta_0}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{k}\eta_0 - A_0\xi_0 \sin\tau + A_0 \frac{d\xi_0}{d\tau}\cos\tau\right)$$

суть

$$\lambda_1 = \sqrt{-1}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{-1}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{\mu k}$$

и последняя нормальна в любом конечном отрезке изменения μ.

Периодическое решение ищем в виде рядов

$$\xi = \xi_1\mu + \xi_2\mu^2 + \cdots, \qquad \eta = \eta_1\mu + \eta_2\mu^2 + \cdots, \qquad h = h_1\mu + h_2\mu^2 + \cdots$$

Первое из условий (A) приводит к соотношению $h_1 = -1/8A_0^2$ Далее, получаем

$$\xi_1 = -\frac{1}{32}A_0^3\cos 3\tau + A_1\cos\tau + B_1\sin\tau$$

$$\eta_1 = \frac{kA_0}{1+4k^2\mu^2}\left\{\frac{1}{32}A_0^3 + A_1 + 2k\mu(B_1 - kA_0)\sin 2\tau - \right.$$
$$\left. -\left[[B_1 - kA_0 - 2k\mu\left(\frac{1}{32}A_0^3 + A_1\right)\right]\cos 2\tau\right\} +$$
$$+ \frac{kA_0^4}{16(1+16k^2\mu^2)}(4k\mu\cos 4\tau - \sin 4\tau)$$

Второе из условий (A) приводит к следующим соотношениям между величинами A_1, B_1, h_2

$$\frac{1}{1+4k^2\mu^2}\left[B_1 - kA_0 - 2k\mu\left(\frac{1}{32}A_0^3 + A_1\right)\right] + \frac{3A_0^3}{64} + B_1 = 0$$

$$\frac{A_0}{2(1+4k^2\mu^2)}\left[\frac{1}{32}A_0^3 + A_1 + 2k\mu(B_1 - kA_0)\right] - \frac{A_0^4}{64} - 2h_2 = 0$$

Эту систему соотношений согласно установленным правилам следует дополнить условием, чтобы одна из величины ξ, $d\xi/d\tau$, η обратилась, например, в нуль при $\tau=0$. Условие, чтобы $d\xi/d\tau$ равнялось нулю при $\tau=0$ эквивалентно требованию $B_1=0$; но тогда A_1 обратится в ∞ при $\mu=0$, чего согласно упомянутым правилам не имеем права допускать. Поэтому дальнейший счет будем вести при дополнительном условии, чтобы величина ξ обратилась в нуль при $\tau=0$. Имея последнее в виду, должны положить $A_1=0$; тогда второе из условий (A) принимает вид

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = \frac{A_0}{2(1+2k^2\mu^2)}\left[k - \frac{3A_0^2}{64} + \mu\frac{A_0^2k^2}{16}(1-3\mu)\right]$$

$$h_2 = \frac{k\mu A_0}{8(1+4k^2\mu^2)}[(k\mu A_0^3 - 16(B_1 - kA_0)]$$

Та́к как эта система соотношений относительно A_1, B_1 и h_2 линейна (она представляет, следовательно, главное условие (A)) и определитель, составленный из коэффициентов при A_1, B_1, h_2, для $\mu=0$ отличен от нуля, то выполняются все условия теоремы II. Согласно этой теореме система (7.1) при любых достаточно малых $|\mu|$ допускает периодическое решение. Это решение с точностью до величин второго порядка малости относительно μ аппроксимируется следующими равенствами:

$$h=-\frac{1}{8}A_0^2\mu,$$

$$x=A_0\left\{\cos\frac{k}{1+h}(t-t_0)-\mu\frac{1}{32}\left[A_0^2\cos\frac{3k}{1+h}(t-t_0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(16-\frac{3A_0^2}{2}\right)\sin\frac{k}{1+h}(t-t_0)\right]\right\},$$

$$y=\frac{kA_0^2}{2}\left\{\sin\frac{2k}{1+h}(t-t_0)+\mu\frac{1}{16}\left[A_0^2\sin\frac{2k}{1+h}(t-t_0)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(16+\frac{3A_0^3}{4}\right)\cos\frac{2k}{1+h}(t-t_0)-2A_0^2\sin\frac{4k}{1+h}(t-t_0)\right]\right\}$$

где A_0 и t_0 — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями,

Заметим, что если форму системы (7.1) сохранить, то теория периодических решений Пуанкаре к этой системе не применима потому, что в правые части параметр μ входит в отрицательной степени. Избавиться от указанного обстоятельства возможно лишь при помощи подстановки

$$t=\mu\vartheta,\qquad x=\mu^{\delta}u,\qquad y=V$$

2δ — любое целое положительное число), преобразующей систему (7.1) к виду

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}=-\mu^2\left(k^2u-V\frac{du}{d\vartheta}\right),\qquad \frac{dV}{d\vartheta}=V+\mu^{2\delta-1}u\frac{du}{d\vartheta}\tag{7.2}$$

Но в применении к системе (7.2) метод Паункаре может дать лишь тривиальные «периодические» решения (положения равновесия), ибо при $\mu=0$ эта система допускает периодическое решение лишь такое: $u_0=c$, $V_0=0$ (c — произвольная постоянная). А между тем методом, изложенным в настоящей статье, определены нетривиальные периодические решения не только системы (7.1), но и системы (7.2); периодические решения последней системы при достаточно малых $|\mu|$ аппроксимируются равенствами

$$h=-\frac{1}{8}A_0\mu^{2\delta+1}$$

$$u=A_0\left[\cos\frac{\mu k}{1+h}(\vartheta-\vartheta_0)+\frac{k}{2}\mu\sin\frac{\mu k}{1+h}(\vartheta-\vartheta_0)\right]$$

$$V=\frac{k}{2}A_0^2\mu^{2\delta}\left[\sin\frac{2\mu k}{1+h}(\vartheta-\vartheta_0)+\mu k\cos\frac{2\mu k}{1+h}(\vartheta-\vartheta_0)\right]$$

где A_0 и ϑ_0 — произвольные постоянные.

Поступила в редакцию
1 X 1946

Уральский индустриальный
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Волк И. М. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.
2. Волк И. М. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.
3. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 1892. T. I. Ch. IV. § 37. 62.