Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРАЕКТОРИЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

А. К. Никитин

(Свердловск)

1. Как известно, любую задачу динамики системы с голономными связями при силах, допускающих потенциал, можно привести к решению уравнения в частных производных первого порядка Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n},q_1,\ldots,q_n,t\right)=0 \tag{1.1}$$

или к решению канонической системы уравнений

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p^i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

которая является частью уравнений характеристик уравнения (1.1).

Свойства траекторий существенным образом зависят от особенностей уравнения Гамильтона-Якоби, или, что равносильно, от особенностей канонических уравнений. Изучением особенностей как обыкновенных уравнений, так и уравнений в частных производных первого порядка подробно занимался Дарбу[1]. Особенностями системы совместных дифференциальных уравнений занимался Гурса[2]. Но уравнение Гамильтона-Якоби обладает той особенностью, что искомая функция S в него не входит явно, а входит только своими производными. Это создает значительные трудности при изучении особенностей как уравнения Гамильтона-Якоби, так и канонических уравнений динамики.

Ниже рассматриваются свойства траекторий консервативной системы в связи со свойствами дискриминанта уравнения Гамильтона-Якоби.

2. Особенности характеристик. Для консервативной системы уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$F=-h+H(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)=0 \tag{2.1}$$

где $p_k=\partial V/\partial q_k$. Уравнениями его характеристик будут (2.2)

$$\frac{dq_1}{\partial H/\partial p_1}=\ldots=\frac{dq_n}{\partial H/\partial p_n}=\frac{-dp_1}{\partial H/\partial q_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{\partial H/\partial q_n}=\frac{dt}{1}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)^{-1}dV$$

Первая часть уравнений (2.2) представляет собой канонические уравнения динамики (1.2).

Все случаи, которые могут встретиться при рассмотрении системы (1.2) или уравнения (2.1), могут быть сведены к следующим четырем. В данной точке имеет место для всех $i = 1, \ldots, n$

$$1. \quad \partial H / \partial p_i \neq 0, \quad \partial H / \partial q_i \neq 0 \tag{2.3}$$

$$2. \quad \partial H / \partial p_i = 0, \quad \partial H / \partial q_i \neq 0 \tag{2.4}$$

$$3. \quad \partial H / \partial p_i \neq 0, \quad \partial H / \partial q_i = 0 \tag{2.5}$$

$$4. \quad \partial H / \partial p_i = 0, \quad \partial H / \partial q_i = 0 \tag{2.6}$$

(Если некоторые из $\partial H / \partial q_i$ или $\partial H / \partial p_i$ в данной точке обращаются в нуль, то линейным преобразованием переменных (контактным) можно привести задачу к случаю 1, когда никакие из чисел $\partial H / \partial q_i$ и $\partial H / \partial p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в рассматриваемой точке не будут нулем. Аналогично, если все $\partial H / \partial p_i = 0$, но не все $\partial H / \partial q_i = 0$, линейным преобразованием можно задачу привести ко второму случаю. Если же все $\partial H / \partial q_i = 0$, но не все $\partial H / \partial p_i = 0$, задача приведется к третьему случаю).

Для простоты предположим, что $p_i = q_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, в рассматриваемой точке, к чему всегда можно притти линейным преобразованием переменных. Возьмем за начальное значение t нуль. Тогда, отбрасывая несущественную постоянную, разложение H можно представить в виде

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i + \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} p_i p_k + \sum_{i,k=1}^{n} B_{ik} p_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} C_{ik} q_i q_k + \varphi(q_i, q_i) \tag{2.7}$$

где $\varphi(q_i, p_i)$ содержит члены третьей и выше степеней от q_i и p_i, а для коэффициентов имеет место $A_{ik} = A_{ki}$, $C_{ik} = C_{ki}$, $B_{ik} \neq B_{ki}$.

Первый случай (2.3). Ни один из коэффициентов a_i и b_i не равен нулю. Уравнения характеристик в этом случае имеют вид

$$\frac{dq_1}{b_1 + \ldots} = \ldots = \frac{dq_n}{b_n + \ldots} = \frac{-dp_1}{a_1 + \ldots} = \ldots = \frac{-dp_n}{a_n + \ldots} = dt, \quad dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i dt$$

Отсюда получаем

$$q_i = b_i t + \ldots, \quad p_i = -a_i t + \ldots, \quad V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i t^2 + \ldots \tag{2.8}$$

Начало координат является обыкновенной точкой. Характеристика не имеет в этой точке особенностей, и ее приближенные уравнения будут

$$q_2 = \frac{b_2}{b_1} q_1 + \ldots, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{b_n}{b_1} q_1 + \ldots, \quad V = \frac{1}{2a_1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i q_i^2 + \ldots \tag{2.9}$$

Второй случай (2.4). Из уравнений

$$-h + H(p_i, q_i) = 0, \quad \partial H / \partial p_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

предполагая, что они совместны, можно исключить все p_i.

Результат такого исключения $R(q_1, \ldots, q_n) = 0$ носит название p-дискриминанта, а поверхность — дискриминатной поверхности.

Так как $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, то разложение (2.7) примет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} p_i p_k + \sum_{i,k=1}^{n} B_{ik} p_i q_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} C_{ik} q_i q_k + \varphi(q_i, \ _i) \quad (2.11)$$

Тогда уравнения характеристик будут иметь вид (2.12)

$$\frac{dq_1}{S_{1q} + \partial\varphi/\partial p_1} = \ldots \frac{dq_n}{S_{nq} + \partial\varphi/\partial p_n} = \frac{-dp_1}{a_1 + S_{1p} + \partial\varphi/\partial q_1} = \ldots \frac{-dp_n}{a_n + S_{np} + \partial\varphi/\partial q_n} = dt$$

$$dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p^i} p_i dt \qquad \left(S_{\nu q} = \sum_{i=1}^{n} A_{\nu i} p_i + \sum_{i=1}^{n} B_{\nu i} q_i, \ S_{\nu p} = \sum_{i=1}^{n} B_{\nu i} p_i + \sum_{i=1}^{n} C_{\nu i} q_i \right)$$

В наиболее простом и общем случае, когда коэффициенты A_{ik} не нули, получим уравнения характеристики, проходящей через начало

$$p_i = -a_i t + \ldots, q_i = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k t^2 + \ldots, \ V = \frac{1}{3} \sum_{i,k} A_{ik} a_i a_k t^3 + \ldots \quad (2.13)$$

Так как q_i начинаются членами второго порядка от t, а V — членами третьего порядка, то характеристика в начале координат имеет точку возврата в пространстве переменных $q_1, \ldots, q_n, V$. Таким образом, *дискриминантная поверхность* $R(q_1, \ldots, q_n) = 0$ *в общем* (наиболее простом) *случае является местом точек возврата характеристик.*

Докажем обратное предложение: *все точки возврата характеристик типа* (2.13) *лежат на дискриминантной поверхности.*

В самом деле, в общем случае уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dq_1}{b_1 + S_{1q} + \partial\varphi/\partial p_1} = \ldots = \frac{dq_n}{b_n + S_{nq} + \partial\varphi/\partial p_n} = \frac{-dp_1}{a_1 + S_{1p} + \partial\varphi/\partial q_1} =$$

$$= \ldots = \frac{-dp_n}{a_n + S_{np} + \partial\varphi/q_n} = dt = \frac{dV}{S}$$

$$\left(S = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} p_i p_k + \sum_{i,k=1}^{n} B_{ik} p_i q_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial p_i} p_i \right)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$q_i = + b_i t + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} b_k t^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k t^2 + \ldots$$

$$p_i = -a_i t - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} b_k t^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} a_k t^2 + \ldots \quad (2.14)$$

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i a_i t^2 + \frac{1}{3} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} a_i a_k t^3 - \frac{1}{3} \sum_{i,k=1}^{n} B_{ik} a_i b_k t^3 + \ldots$$

Но по условию разложения q_i начинаются членами второго порядка относительно t, а V — членами третьего порядка. Следовательно, все b_i должны равняться нулю и функция H должна иметь вид (2.11). А тогда в точке возврата характеристики $p_i = q_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

все производные $\partial H / \partial p_i = 0$, т. е. точка эта лежит на дискриминантной поверхности. Таким образом, предложение доказано.

Третий случай (2.5). Функция H имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} b_i p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} p_i p_k + \sum_{i,k=1}^{n} B_{ik} p_i q_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} C_{ik} q_i q_k + \varphi(p_i, q_i) \quad (2.15)$$

и уравнения характеристик будут

$$\frac{dq_1}{b_1 + \ldots} = \ldots \frac{dq_n}{b_n + \ldots} = \frac{-dp_1}{S_{1p} + \partial\varphi / \partial q_1} = \ldots \frac{-dp_n}{S_{np} + \partial\varphi / \partial q_n} = dt = \frac{dV}{b_1 p_1 + \ldots + b_n p_n + \ldots}$$

где $S_{\nu p}$ согласно (2.12). Отсюда получаем

$$q_i = b_i t + \ldots, \quad p_i = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} b_k t^2 + \ldots, \quad V = -\frac{1}{6} \sum_{i,k=1}^{n} C_{ik} b_i b_k t^3 + \ldots \quad (2.16)$$

Таким образом, в этом случае характеристическая кривая не имеет в данной точке особенностей.

Четвертый случай (2.6). Система уравнений (2.6), если они совместимы, определяет в общем случае одно или некоторое конечное число значений p_i, q_i (особых точек уравнений). Каждой такой особой точке соответствует либо положение равновесия, либо состояние стационарного движения. Вблизи особых точек приходится изучать устойчивость равновесия или стационарного движения. Эти точки будут изолированными. Исключение представляет случай, когда тождественно равен нулю гессиан

$$\frac{D(\partial H / \partial q_1, \ldots, \partial H / \partial q_n, \partial H / \partial p_1, \ldots, \partial H / \partial p_n)}{D(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)} \quad (2.17)$$

Тогда переменные q и p будут связаны одним или несколькими соотношениями. Из уравнений (2.6) можно определить в этом случае все p и некоторые из q через остальные из величин q_i и, вставив эти значения в уравнение Гамильтона-Якоби, получить некоторое соотношение $\Phi(q, h) = 0$, содержащее постоянную энергию и не содержащее других произвольных постоянных.

В этом случае мы получим геометрическое место особых точек, зависящее от одного параметра. Так как сама функция V в уравнении Гамильтона-Якоби не входит, то она не войдет и в полученное соотношение $\Phi(q, h) = 0$ и получить из этого соотношения функцию V нельзя.

Таким образом, для уравнения Гамильтона-Якоби мы вообще не можем получить особого интеграла, тогда как для общего случая уравнения в частных производных

$$F(q_1, \ldots, q_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

как показал Дарбу, особый интеграл при известных условиях существует. Если рассматривать каноническую систему как систему совместных уравнений, то и в этом случае нельзя получить особого интеграла. В самом деле, как показал Гурса, если имеется система уравнений

$$F_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \quad (2.18)$$

то для существования особого интеграла необходимо еще, чтобы

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1', \ldots, y_n')} = 0 \tag{2.19}$$

В случае же канонических уравнений якобиан (2.19) равен единице.

3. Свойства дискриминантной поверхности и траекторий. Как мы показали, уравнение дискриминантной поверхности получается исключением обобщенных импульсов p_i из уравнений

$$-h + H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Из канонических уравнений видно, что это будет геометрическое место точек, в которых обобщенные скорости равны нулю. Кроме того,

$$V = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i dt \tag{3.2}$$

На дискриминантной поверхности $\partial H / \partial p_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; следовательно, на ней $V = 0$, т. е. *дискриминантная поверхность является частью поверхности нулевого действия по Лагранжу*[1].

Известно, что траектории ортогональны к поверхностям равного действия. Следовательно, *траектории ортогональны к дискриминантной поверхности*. А так как, кроме того, *дискриминантная поверхность* в общем случае является геометрическим местом точек возврата характеристик, то она *в общем случае является и местом точек возврата траекторий*.

4. Пример. Разберем в качестве примера движение свободной материальной точки под действием силы тяжести. В этом случае

$$H = T - U,\ T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2); \quad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

Если ось x направлена по горизонтали, а ось вертикально вверх, то

$$U = -mgy, \qquad H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy$$

Уравнение Гамильтона-Якоби примет вид

$$-h + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + mgy = 0 \tag{4.1}$$

Для получения p-дискриминанта мы должны приравнять нулю частные производные от H по импульсам

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m} p_x = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} p_y = 0 \tag{4.2}$$

Откуда получаем $p_x = p_y = 0$ и уравнение дискриминантной поверхности будет $-h + mgy = 0$, т. е. дискриминантная поверхность

$$y = h / mg = \text{const} = v_0^2/2g \tag{4.3}$$

[1] Поверхность нулевого действия $V = 0$, кроме дискриминантной поверхности, содержит еще полу

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i = 0, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$$

является горизонтальной плоскостью Она будет геометрическим местом точек возврата траекторий материальной точки, бросаемой вертикально вверх со скоростью v_0 с различных точек поверхности земли.

5. Случай циклических координат. Пусть координаты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ циклические. Тогда получим k циклических интегралов

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_2, \ldots, p_k = a_k \tag{5.1}$$

Подставим эти интегралы в уравнение Гамильтона-Якоби и будем рассматривать после этого p-дискриминант полученного уравнения

$$-h + H(a_1, \ldots, a_k, p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_n, q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n) = 0 \tag{5.2}$$

считая $a_1, \ldots, a_k$ параметрами, так же как и постоянную энергии h.

Полученная таким образом дискриминантная поверхность всегда будет удовлетворять циклическим интегралам (5.1) и, следовательно, она будет n-мерным многообразием в пространстве $n+1$ переменных $q_1, \ldots, q_n, V$, касательным к характеристикам. На этой поверхности действие уже не будет нулем, так как циклические интегралы не будут решениями уравнений $\partial H / \partial p_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Эта поверхность будет также касательной к траекториям, так как, исключив время t как параметр из уравнений характеристических кривых, мы получим уравнения траекторий.

6. Пример. Рассмотрим опять задачу движения точки под действием силы тяжести. Каноническая система имеет в этом случае вид

$$\frac{dx}{\partial H / \partial p_x} = \frac{dy}{\partial H / \partial y_y} = -\frac{dp_x}{\partial H / \partial x} = -\frac{dp_y}{\partial H / \partial y} = dt \tag{6.1}$$

Координата x является циклической, и получаем циклический интеграл движения $p_x = a$. Подставив этот интеграл в (4.1), получим

$$-h + \frac{1}{2m}(a^2 + p_y^2) + mgy = 0 \tag{6.2}$$

Кроме того, из уравнения $\partial H / \partial p_y = p_y / m = 0$ и уравнения (6.2) получим p-дискриминант

$$\Delta p = -h + \frac{1}{2m} a^2 + mgy = 0, \qquad y = \frac{1}{mg}\left(h - \frac{1}{2m} a^2\right) \tag{6.3}$$

Мы получили горизонтальную прямую, которой будут касаться все траектории при их параллельном переносе, когда точка бросания перемещается по горизонтали. Этот пример разбирается у Аппеля[3], причем Аппель получает эту прямую, исходя из полного интеграла.

Поступила в редакцию
9 X 1946

Уральский индустриальный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Darboux G. Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mémoires des savants étrangers à l'Académie des Sciences. T. XXVIII.
2. Goursat E. Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées. American Journal of Mathematics. T. XI.
3. Appel P. Traité de mécanique rationnelle. 1919. T. I. P. 573—575.