Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБЗОРЫ

ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОЛСТЫХ И ТОНКИХ ПЛИТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СССР

Г. Ю. Джанелидзе

(Ленинград)

Значительная часть работ советских ученых в области механики упругого тела посвящена теории тонких и толстых плит. Развитие этой области теории упругости в нашей стране шло по многим направлениям. Отметим из них следующие: 1) исследования по статике плит, 2) исследования по динамическим задачам теории плит, 3) исследования вопросов устойчивости плит. Наконец, особо нужно упомянуть исследование ряда нелинейных задач, связанных с теорией весьма тонких пластин.

Естественно, что приводимый ниже обзор, в котором мы уделим особое внимание работам, опубликованным за последнее десятилетие, не претендует на полноту и в основном затрагивает лишь работы, посвященные статике плит, лежащие в кругу научных интересов автора. Поэтому в стороне остается большая группа весьма важных работ, в которых рассматриваются вопросы устойчивости и динамики плит. Этим работам необходимо посвятить отдельный обзор.

Для удобства мы разобьем работы на три основные группы:

1) исследования по теории толстых плит и плит переменной толщины,
2) исследования, примыкающие к классическому направлению,
3) исследования по теории тонких плит, проведенные новыми методами.

§ 1. Исследования по теории толстых плит

В СССР первые исследования по теории толстых плит выполнены академиком Б. Г. Галеркиным, применившим при изучении задачи об изгибе толстой плиты развитый им ранее метод решения пространственной задачи теории упругости с помощью трех бигармонических функций [3]. Подобным методом Б. Г. Галеркин получил в двойных тригонометрических рядах решение для случая свободно опертой прямоугольной и треугольной толстых плит [4,5], а затем в ординарных рядах для прямоугольной толстой плиты [8]. В исследовании [8] решение доведено до численных результатов и путем сравнения с вычислениями по формулам теории тонких плит установлено, что обычная теория тонких плит пригодна даже при расчете равномерно нагруженной плиты с отношением толщины h к наименьшему другому размеру a равным $h/a=1/3$.

Этот метод Б. Г. Галеркин использовал при изучении изгиба круглой толстой и секториальных плит, нагруженных по торцам произвольной нормальной нагрузкой.

Все полученные Б. Г. Галеркиным решения на краю плиты удовлетворяют геометрическим условиям только на определенной линии $z=\text{const}$ и силовым граничным условиям в смысле принципа Сен-Венана.

Задача изгиба толстых плит, нагруженных гармонической нагрузкой (т. е. нагрузкой, удовлетворяющей уравнению Лапласа) изучена в работе С.Г.Гутмана [15a]. Им показано, что при удовлетворении граничных условий на краях плиты в смысле принципа Сен-Венана, общее решение задачи об изгибе плиты гармонической нагрузкой можно представить как сумму двух слагаемых:

1. Частного решения, определяемого прогибом срединной поверхности, находимым из обычного уравнения $\triangle\triangle w = p/D$.

2. Решения задачи о плоском напряженном состоянии в плите.

Выбор второго слагаемого определяется граничными условиями.

В другой работе [156] С. Г. Гутман использовал этот метод для решения задачи о равновесии толстых упругих плит при учете собственного веса плиты.

Следующий шаг в теории толстых плит был сделан А. И. Лурье[43,46], который разработал на примере уравнений теории упругости новый метод решения задач математической физики для тел, ограниченных двумя параллельными плоскостями.

А. И. Лурье строит решение уравнений равновесия теории упругости

$$\nu\partial_1\vartheta + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \triangle\right)u = 0\ ,\quad \nu\partial_2\vartheta + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \triangle\right)v = 0,\quad \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \triangle\right)w = 0$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}\ ,\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}\ ,\quad \nu = \frac{1}{1-2\sigma}\ ,\quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x^2}{\partial y^2}\ ,\quad \vartheta = \partial_1 u + \partial_2 v + \frac{\partial w}{\partial z}$$

рассматривая их как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной z и разыскивая решение этой системы при начальных условиях

$$z = 0,\qquad u = u_0,\qquad v = v_0,\qquad w = w_0,\qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u_0{}',\qquad \frac{\partial v}{\partial z} = v_0{}',\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = w_0$$

Подобное решение имеет вид

$$u = \cos z\sqrt{\triangle}u_0 - \frac{\nu}{2}\frac{z\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}\partial_1(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0{}') + \frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}u_0{}' -$$

$$-\frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\triangle\sqrt{\triangle}} - \frac{z\cos z\sqrt{\triangle}}{\triangle}\right]\partial_1(\partial_1 u_0{}' + \partial_2 v_0{}' - \triangle w_0)$$

$$v = \cos z\sqrt{\triangle}v_0 - \frac{\nu}{2}\frac{z\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}\partial_2(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0{}') + \frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}v_0{}' -$$

$$-\frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\triangle\sqrt{\triangle}} - \frac{z\cos z\sqrt{\triangle}}{\triangle}\right]\partial_2(\partial_1 u_0{}' + \partial_2 v_0' - \triangle w_0) \tag{11}$$

$$w = \cos z\sqrt{\triangle}w_0 + \frac{\nu}{2}\left[\frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}} - z\cos z\sqrt{\triangle}\right](\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0'') +$$

$$+\frac{\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}w_0{}' - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\frac{z\sin z\sqrt{\triangle}}{\sqrt{\triangle}}(\partial_1 u_0{}' + \partial_2 v_0{}' - \triangle w_0)$$

При конкретных вычислениях в этих выражениях нужно заменить $\sin z\sqrt{\triangle}/\sqrt{\triangle}$ и $\cos z\sqrt{\triangle}$ их разложениями в ряды по степеням $z\sqrt{\triangle}$, но ряд операций можно производить и над символическими выражениями (1.1). Например, можно вычислить напряжения, соответствующие этим перемещениям.

Рассмотрим теперь для простоты задачу о равновесии плиты, образованной плоскостями $z = \pm h$ и нагруженной по этим плоскостям только нормальными нагрузками $q_1(x, y)$ и $q_2(x, y)$ (обобщение на случай произвольного загружения не представляет затруднений). Граничные условия на торцах плиты приводят к двум системам дифференциальных уравнений, служащим для определения $u_0, v_0, w_0{}'$ и $u_0{}', v_0{}', w_0$. Выпишем первую систему (вторая имеет аналогичный вид и содержит в правой части s)

$$\begin{aligned} A_{11}u_0 + A_{12}v_0 + A_{13}w_0{}' &= 0, & q &= \frac{1}{2\mu}(q_1 - q_2) \\ A_{21}u_0 + A_{22}v_0 + A_{23}w_0{}' &= 0, \\ A_{31}u_0 + A_{32}v_0 + A_{33}w_0{}' &= q, & s &= \frac{1}{2\mu}(q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь A_{ik} суть некоторые дифференциальные операторы бесконечно высокого порядка. Введем функцию напряжений $\psi(x, y)$

$$u_0 = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \psi, \qquad v_0 = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{11} \\ A_{23} & A_{21} \end{vmatrix} \psi, \qquad w_0' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \psi$$

с помощью которой система (1.2) сводится к уравнению

$$\left[\frac{\sin 2h\sqrt{\triangle}}{2h\sqrt{\triangle}} - 1\right] \triangle\psi = \frac{q}{2\gamma h} \tag{1.3}$$

Из второй системы, соответствующей величине s, получается уравнение для определения функции напряжений χ

$$\left[\frac{\sin 2h\sqrt{\triangle}}{2h\sqrt{\triangle}} + 1\right] \triangle\chi = \frac{s}{2\gamma h} \tag{1.4}$$

Для построения решений, удовлетворяющих уравнениям (1.3) и (1.4), прежде всего необходимо найти частные решения, соответствующие нагрузкам q и s. Они могут быть легко получены в случае, когда q является полиномом, ибо тогда можно взять и ψ в виде полинома. При $q = q_0 \sin \alpha x \sin \beta y$ частное решение имеет вид

$$\psi = -\frac{2}{3} \frac{q_0 h^2}{D\gamma} \frac{2\gamma h}{2\gamma h - sh 2\gamma h} \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{Eh^3 m^2}{m^2 - 1}$$

Поэтому, если $q(x, y)$ можно представить в форме тригонометрического ряда, то и функция ψ представляется подобным рядом. Однородному уравнению для ψ удовлетворяют бигармонические функции. Более общий класс однородных решений получается из решения дифференциального уравнения

$$\left(\triangle - \frac{\gamma_k^2}{h^2}\right) \psi_k(x, y) = 0$$

где $2\gamma_k$—комплексные корни уравнения $x^{-1} \sin x - 1 = 0$. Тогда

$$\psi = \sum_1^\infty \psi_k(x, y)$$

Аналогичным образом строятся и решения другой системы.

Указанный класс решений, зависящих от корней трансцендентного уравнения, оставляет торцы свободными от напряжений. Поэтому результаты работы не только содержат все ранее полученные решения (Б. Г. Галеркина, Войновского-Кригер, Бирхгоффа и др.), но и позволяют с наперед заданной точностью удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности плиты. В частных задачах, например в задаче о равновесии равномерно нагруженной круглой плиты, нетрудно выполнить намеченные здесь вычисления и удовлетворить граничным условиям вида (для круглой плиты)

$$u = 0 \text{ при } r = r_0, \ -h \leqslant z \leqslant h; \qquad w = 0 \text{ при } r = r_0, \ z = 0$$

В работе А. И. Лурье[43] выведено уравнение равновесия плиты переменной толщины, имеющее в случае тонкой симметричной относительно плоскости $z = 0$ плиты вид

$$\triangle(D\triangle w) - \frac{m-1}{m} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \right\} =$$

$$= P_z + \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} \qquad \left(D(x, y) = \frac{2}{3} \frac{Emh^3}{(m^2 - 1)}\right) \tag{1.5}$$

где P_z—нормальная нагрузка, C_x и C_y—компоненты главного момента внешних сил.

Более точное решение задачи о равновесии плиты переменной толщины можно получить, если отбросить гипотезу прямых нормалей, лежащую в основе вывода уравнения (1.5), и воспользоваться уже описанным символическим методом (заметим, впервые опубликованным в этой работе). В задаче о плите несимметричного профиля А. И. Лурье, используя принцип Кастильяно, вывел для случая вращающегося круглого диска следующие уравнения:

$$u''+\frac{1}{r}u'-\frac{1}{r^2}u+\left(u'+\frac{1}{m}\frac{u}{r}\right)(\ln h)'+\frac{m^2-1}{m^2E}\rho\omega^2r=0;$$
$$\varphi''+\frac{1}{r}\varphi'-\frac{1}{r^2}\varphi+\left(\varphi'+\frac{1}{m}\frac{\varphi}{r}\right)(\ln D)'=3g'(r)\left(\frac{du}{dr}+\frac{1}{m}\frac{u}{r}\right) \tag{1.6}$$

где u и φ—радиальное смещение и угол поворота, $2h(r)$ толщина диска, $z=g(r)$—уравнение срединной поверхности.

П. Г. Шулежко[68] обобщил уравнение (1.5) на случай равновесия и движения плиты из анизотропного и неоднородного материала и показал, что касательные напряжения мало влияют на деформацию плиты. Выведенное им уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{J\left[\alpha_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\alpha_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\right\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{J\left[\alpha_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\alpha_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{J\left[\alpha_{61}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha_{62}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\alpha_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[T_1\frac{\partial w}{\partial x}+S\frac{\partial w}{\partial y}+M'\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[S\frac{\partial w}{\partial x}+T_2\frac{\partial w}{\partial y}+L'\right]+Z'(x,y,t)$$
$$\left(J=\int_{-h}^{+h}z^2\,dz\right) \tag{1.8}$$

где α_{ik}—упругие постоянные, T_1, ..., Z'—усилия и моменты в срединной плоскости.

Обширное исследование П. Г. Шулежко содержит большое число аналогичных и более частных уравнений. Отметим, что уравнение (1.5) может быть решено в рядах и для более общих случаев, чем это сделано в известных работах Гран-Олссона.

Ряд результатов в этом направлении получен И. А. Баславским[1]. Им, например, рассмотрена задача о плите, жесткость которой меняется по линейному закону $D=D_0(1+\varepsilon y/b)$, для плиты, опертой по краям, параллельным оси x (а не y, как у Гран-Олссона), и произвольно закрепленной по краям переменной толщины. Решение задачи при законе вида $D=D_0\exp(\mu y/b)$, а также и для других случаев нетрудно получить с помощью метода Ритца-Галеркина. Численные подсчеты И. А. Баславского показали, что метод замены эквивалентной плитой постоянной толщины не применим при расчете плит переменной толщины. Например, для свободно опертой равномерно нагруженной плиты с $D=D_0(1+2y/b)$ разница в усилиях и деформациях достигает 40%; при этом максимальные моменты в плите переменной толщины больше.

§ 2. Исследования, примыкающие к классическому направлению

Под классическим направлением в теории тонких пластин мы понимаем исследования Навье, Леви, Эстанава и др., характерной чертой которых является использование метода Фурье при интегрировании неоднородного бигармонического уравнения и представление решения в виде двойных или ординарных бесконечных рядов.

Замечательные работы академика Б. Г. Галеркина, во многом дополнившие классические исследования, суммированы им в монографии [7], опубликованной в период, предшествующий рассматриваемому в настоящем обзоре.

В этой монографии он интегрирует уравнение изгиба тонкой плиты следующим методом. Решение бигармонического уравнения с правой частью представляется как сумма специально подобранного частного решения и ряда с неопределенными коэффициентами, удовлетворяющего однородному уравнению. Частное решение подбирается в виде алгебраического полинома так, чтобы бесконечный ординарный ряд, входящий в выражение прогиба плиты, быстро сходился. Это частное решение Б. Г. Галеркин обычно брал в форме, соответствующей задачам об изгибе балок, выделяемых в плите.

Большое число таблиц и графиков, доведение каждой задачи до числа, оригинальные решения многих новых задач—вот основные черты работ Б. Г. Галеркина по теории плит. Без преувеличения можно сказать, что классическая теория плит, бывшая до выхода работ Б. Г. Галеркина достоянием математиков, стала после появления его книги действенным орудием в руках инженеров.

Значительное развитие классическое направление получило в обширной монографии П. Ф. Папковича [55], стр. 494—948 которой посвящены изгибу и устойчивости пластин. Трудно охватить новые результаты, содержащиеся в этой монографии, настолько оригинально и изящно изложены даже и известные классические решения. Отметим только следующую расчетную схему (см. также [56]), являющуюся обобщением метода М. Леви на случай прямоугольной пластины с двумя закрепленными противоположными сторонами и произвольным закреплением остальных сторон. Решение уравнения

$$D \triangle \triangle w = p(x, y) \tag{2.1}$$

где w—прогиб пластины, D—жесткость пластины и $p(x, y)$—распределенная нагрузка естественно искать в виде ряда

$$w = w_0(x, y) + \sum X_i(x) Y_i(y) \tag{2.2}$$

где $w_0(x, y)$—любое частное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям на заделанных кромках, так же как и заданые функции $Y_i(y)$. Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к уравнению

$$\sum \{X_i^{\mathrm{IV}}(x) + 2 X_i''(x) Y_i''(y) + X_i(x) Y_i^{\mathrm{IV}}(y)\} = 0$$

Умножая это соотношение, на $Y_j(y)$ и интегрируя по координате y, получаем бесконечную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, общий интеграл которой имеет вид

$$X_i(x) = \sum_k A_k \nu_{ik} \exp s_k x$$

где s_k—корни бесконечного определителя, ν_{ik}—им соответствующие решения системы

$$\sum_i \left\{ A_{ij} s_k^4 + 2B_{ij} s_k^2 + C_{ij} \right\} \nu_{ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Постоянные A_k определяют из предварительно умноженных на $Y_j(y)$ и проинтегрированных граничных условий на сторонах $x = 0$ и $x = a$. Решение усеченной системы приводит к приближенному решению задачи. В некоторых случаях этот метод дает возможность эффективного построения решения, например, когда нагрузка такова что упругая поверхность симметрична относительно оси x. Выбирая в качестве функций $Y_j(y)$ решения уравнений

$$\frac{Y_i^{\mathrm{IV}}}{Y_i''} = \left(\frac{\mu_i}{b}\right)^2, \qquad \operatorname{tg}\frac{\mu_i}{2} = -\operatorname{th}\frac{\mu_i}{2}$$

и следуя указанному методу, имеем (α_k—корни уравнения, представленного в скобках)

$$X_j(x) = \sum_k \frac{A_k}{(\alpha_k^2 - j^2)^2} \exp\frac{2\pi\alpha_k x}{b} \qquad \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - j^2)^2} = -\frac{1}{2}\right)$$

Аналогичный прием был использован П. Ф. Папковичем при расчете продольных стен каркаса плотины системы А. М. Сенкова [53]. Им же были рассмотрены различные модификации этого метода.

П. Ф. Папковичем [56] отмечены чрезмерная общность и малая пригодность для численных расчетов общего интеграла уравнения изгиба тонких упругих плит, ограниченных двумя радиусами и двумя дугами концентрических окружностей, и указан путь составления решения, свободного от этих недостатков.

В. З. Власовым [2] сделана попытка применения методов строительной механики к задачам о равновесии тонких упругих плит. Приближенно представляя прогиб прямоугольной плиты в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x) \chi_k(y)$$

где линейно независимые функции $\chi_k(y)$ (обобщенные координаты) выбраны в соответствии с кинематическими условиями закрепления на сторонах, параллельных оси x, и используя принцип возможных перемещений, В. З. Власов приходит к системе уравнений, определяющей n функций $W_k(x)$,

$$\sum_k a_{ik} W_k^{\mathrm{IV}} - 2\sum_k b_{ik} W_k'' + \sum_k c_{ik} W_k - \frac{1}{D} q_i = 0$$

коэффициенты $a_{ik}, \ldots, c_{ik}$ вычисляются по формулам

$$a_{ik} = \int \chi_i \chi_k \, dy, \qquad b_{ik} = \int \chi_i' \chi_k' \, dy - \frac{\nu}{2}[\chi_k \chi_i' + \chi_k' \chi_i]$$

$$c_{ik} = \int \chi_i'' \chi_k'' \, dy, \qquad q_i = \int p \chi_i \, dy$$

Граничные условия для этой системы должны быть записаны в соответствии с выбранными «обобщенными координатами» $\chi_k(y)$. Таким методом нетрудно получить приближенные решения ряда практически важных задач: об изгибе призматической оболочки, состоящей из достаточно узких прямоугольных пластинок, об устойчивости тонких плит и т. п.

А. С. Локшин [40] изучил ряд задач об изгибе, колебаниях и устойчивости прямоугольных пластинок, подкрепленных ребрами одинаковой жесткости, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии a. Считая пластинку опертой по краям, параллельным оси x, и равномерно нагруженной, А. С. Локшин представил прогиб на $k+1$ участке плиты в виде ряда

$$w_{k+1} = \sum_{m=1,3,5,\ldots} Y_m^{(k+1)}(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Для определения функций $Y_m^{(k+1)}$ обозначим через η_k и η_{k+1} неизвестные значения функции $Y_m^{(k+1)}$ в начале и конце участка, а соответствующие значения $Y_m^{(k+1)''}$ через μ_k и μ_{k+1}. При использовании этих величин можно легко построить решения Леви для любого участка пластины. Величины η_k и μ_k должны быть определены из условий сопряжения, которые сводятся к соотношениям

$$\left(\frac{\partial W_k}{\partial y}\right)_{y=y_k} = \left(\frac{\partial W_{k+1}}{\partial y}\right)_{y=}$$

$$\left(\frac{\partial^3 W_{k+1}}{\partial y^3}\right)_{y=y_k} = \left(\frac{\partial^3 W_k}{\partial y^3}\right)_{y=y_k} - \frac{EJ}{D}\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)_{y=y_k}$$

представляющим в развернутом виде систему уравнений в конечных разностях с неизвестными η_k и μ_k, решение которой дано А. С. Локшиным.

Более общие задачи были рассмотрены А. П. Филипповым [61], изучившим изгиб, колебания и устойчивость прямоугольной пластинки, подкрепленной упругими ребрами, а также упругими опорами в ряде отдельных точек. А. П. Филиппов исходит из решения по методу Леви для пластинки, опертой по двум противоположным краям

$$w = \sum_n V_n(\eta) \sin n\pi\xi$$

где $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ безразмерные координаты,

$$V_n(\eta) = A_n \operatorname{sh} n\pi\eta + B_n \operatorname{sh} n\pi\eta + C_n \eta \operatorname{sh} n\pi\eta + D_n \eta \operatorname{ch} n\pi\eta + \Phi_n(\eta)$$

и $\Phi_n(\eta)$—частное решение, соответствующее нагрузке, действующей на пластину.

В случае нагрузки $p(\xi)$, распределенной по линии $\eta=\eta_1$:

$$\Phi_n(\eta)=\frac{2a^3}{D}\int_0^1 p(\xi)\,\psi_n(\eta-\eta_1)\sin n\pi\xi\,d\xi \qquad \text{при } \eta_1<\eta$$

$$\Phi_n(\eta)=0 \qquad \text{при } \eta_1<\eta_1$$

а при нагрузке P, сосредоточенной в точке $\xi=\xi_1$ и $\eta=\eta_1$:

$$\Phi_n(\eta)=\frac{2a^2}{D}P\,\psi_n(\eta-\eta_1)\sin n\pi\xi_1 \qquad \text{при } \eta_1<\eta$$

$$\Phi_n(\eta)=0 \qquad \text{при } \eta<\eta_1$$

функция $\psi_n(\eta-\eta_1)$ имеет вид

$$\psi_n(\eta-\eta_1)=\frac{1}{2n^2\pi^2}\left[(\eta-\eta_1)\operatorname{ch} n\pi(\eta-\eta_1)-\frac{1}{n\pi}\operatorname{sh} n\pi(\eta-\eta_1)\right]$$

При использовании указанных частных решений можно составить общее решение для пластины, подпертой по прямым $\eta=\eta_1,\ \eta_2,\dots,\eta_k$ ребрами жесткости $B_1, B_2, \dots, B_k$ и, кроме того, подпертой упругими опорами C_{ij} и нагруженной сосредоточенными силами P_{ij} в точках, расположенных на пересечении прямых $\eta=\eta_1,\dots,\eta_k$ с прямыми $\xi=\xi_1,\dots,\xi_l$. В интервале $\eta_k\leqslant\eta\leqslant\eta_{k+1}$ оно имеет вид

$$w(\xi,\eta)=\sum_n\left\{Y_n(\eta)+\Phi_{1n}-\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{B_i n^4\pi^4}{aD}V_n(\eta_j)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{l}\frac{2a^2}{D}\sin n\pi\xi_i\left[C_{ij}w(\xi_i,\eta_j)-P_{ij}\right]\right]\psi_n(\eta-\eta_j)\right\}\sin n\pi\xi \qquad (2.3)$$

Частное решение $Y_n(\eta)$ после удовлетворения условий при $\eta=0$ будет зависеть от двух произвольных постоянных. Подставляя последовательные значения $w(\xi_i,\eta_j)$ и $Y_n(\eta)$ и удовлетворяя условиям при $\eta=b/a$, получаем уравнение для определения оставшихся постоянных.

К. А. Китовер[20,2-] упростил решение задачи о симметрично нагруженной и подпертой круглой плите, используя предложенные Н. М. Герсевановым функциональные прерыватели. Для этого он выбрал специальную систему частных решений, позволяющую развить метод, аналогичный методу Клебша в теории балок. Подобный способ развит К. А. Китовером[21] и для случая произвольного загружения плиты.

Среди работ, посвященных расчету безбалочных перекрытий, как плит, подпертых в отдельных точках, необходимо прежде всего отметить исследования по обобщению и развитию известной задачи Леве.

С. А. Гершгорин[11] разработал метод точного исследования изгиба бесконечных безбалочных перекрытий, основанный на сведéнии вопроса к задаче о пластине, опертой по краям. Прогиб перекрытия удовлетворяет уравнению $D\Delta\Delta w=p(x,y)$.

В случае бесконечного безбалочного перекрытия с одинаковыми опорами произвольной формы, расположенными в прямоугольном порядке на линиях $x=ma$ и $y=nb$ $(m, n=1, 2,\dots,)$, функция w удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Delta w=0 \quad \text{при } x=ma, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Delta w=0 \quad \text{при } y=nb \qquad (2.4)$$

легко получаемым из симметрии. Вводя «обобщенные» производные от нагрузки

$$p_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x,y)-p(x,y)}{\Delta x}, \qquad p_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{p(x,y+\Delta y)-p(x,y)}{\Delta y}$$

вычисляемые по следующим правилам.

1. В точках дифференцируемости функции $p(x, y)$ будет $p_x = \partial p / \partial x$ и $p_y = \partial p / \partial y$.
2. В точках разрыва производной $\partial p / \partial x$ и функция p_x испытывает разрыв.
3. При разрыве нагрузки $p(x, y)$ вдоль какой-либо кривой K в производной нагрузке p_x появляется распределенная вдоль той же кривой линейная нагрузка напряженностью (n—нормаль к кривой K)

$$p_x = (p_+ - p_-) \cos(n, x)$$

С. А. Гершгорин составляет уравнение

$$D \triangle \triangle \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = p_{x,y}$$

Из (2.4) следует, что функция $\partial^2 w / \partial x \, \partial y$ на контуре основного прямоугольника удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = 0, \qquad \triangle \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = 0 \tag{2.5}$$

т. е. $\partial^2 w / \partial x \, \partial y$ определяется решением задачи об изгибе опертой прямоугольной плиты. Если решение этой задачи известно, то $w(x, y)$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = F(x, y)$$

при граничных условиях (2.4). Тогда

$$w(x, y) = \iint F(x, y) \, dx \, dy + \int \varphi(x) \, dx + \int \psi(y) \, dy$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$—решения уравнений

$$D \frac{d^4 \varphi}{dx^4} = p_x - D \triangle \triangle \Phi_x, \quad D \frac{d^4 \psi}{dy^4} = p_y - D \triangle \triangle \Phi_y, \quad \Phi = \iint F(x, y) \, dx \, dy$$

соответствующие граничным условиям, легко получаемым из (2.4). Пользуясь этим, С. А. Гершгорин построил и довел до расчетных формул решение следующих задач:

1) безбалочное перекрытие с точечными опорами;
2) безбалочное перекрытие с круглыми опорами;
3) безбалочное перекрытие с прямоугольными опорами.

При решении этих задач предполагалось, что нагрузка по опоре распределена равномерно, а сами опоры относительно основного прямоугольника расположены произвольным образом.

М. В. Николаева [52] изучила обобщение задачи Леве на случай безбалочного перекрытия, свободно опертого по контуру и опирающегося на девять колонн с квадратными капителями.

А. С. Малиев [48,49] отказался от предположения Леве о равномерном распределении реакций по площади опор и приближенно учел влияние постоянства смещений на опоре. Разбив опорную площадку на ряд равновеликих по площади участков, А. С. Малиев предположил, что опорное давление на каждом данном малом участке опоры остается постоянным. Введенные таким образом лишние неизвестные можно определить, если составить одно уравнение статики, соответствующее равновесию опоры в целом, и ряд соотношений, выражающих равенство прогибов в отдельных точках опоры или же относящихся к условиям на краях опоры.

Результаты многочисленных расчетов А. С. Малиева лучше соответствуют данным опыта, чем вычисления Леве, проведенные в предположении постоянства опорного давления по всей площади опоры.

К классическому направлению примыкают и работы об изгибе плит, опертых на упругое основание. Их можно разбить на две группы. К первой относятся исследования, в которых главным образом рассматривается изгиб плиты, а упругое основание учитывается лишь в смысле гипотезы Винклера-Циммермана. Вторая группа относится к расчету плит, опирающихся на упругое полупространство.

Из работ первой группы отметим исследования, содержащие решение задачи об изгибе безбалочного перекрытия, опертого на упругое полупространство и загруженного рядом колонн.

Этот вопрос с помощью специального метода функциональных прерывателей был изучен Н. М. Герсевановым [9]. Подобный же метод применяется и в обширной монографии О. Я. Шехтер и А. В. Винокуровой [65], содержащей подробно разработанные и снабженные большим числом таблиц решения следующих задач.

1. Плита конечной ширины, загруженная двумя рядами симметрично расположенных колонн.

2. Плита конечной ширины, загруженная одним рядом колонн.

3. Плита конечной ширины, загруженная четным числом равноудаленных колонн.

4. Бесконечная плита, загруженная одним рядом равноудаленных колонн.

5. Среднее поле бесконечной плиты, загруженной колоннами, расположенными в вершинах прямоугольной сетки.

6. Полубесконечная плита, загруженная равноудаленными рядами колонн.

7. Полубесконечная плита, загруженная одним рядом колонн, находящихся на конечном расстоянии от края плиты.

Случай плиты конечной ширины, загруженной одной колонной, а также полубесконечной плиты под нагрузкой: *а*) сосредоточенной силой на краю; *б*) равномерно распределенной на участке края; *в*) равномерно распределенной на участке, перпендикулярном краю, методом Н. М. Герсеванова был рассмотрен Г. С. Шапиро [64].

А. С. Малиев [47] решил в ординарных рядах задачу о бесконечной плите (ленте), опертой на упругое основание и загруженной распределенным давлением вида

$$\frac{1}{D}\,p(x,y)=f(y)\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\sin\alpha_m x+B_m\cos\alpha_m x)=f(x)\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(x)$$

Решение уравнения

$$\Delta w+\lambda^4 w=f(y)\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m(x),\qquad \lambda^4=\frac{k_0}{D}$$

может быть представлено в виде ряда

$$w=\sum_m Y_m(x)\,Y(y)$$

где функции $X_m(x)$ и $Y_m(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$X_m''+\alpha_m^2X_m=0,\qquad Y_m^{\mathrm{IV}}-2\alpha_m^2Y_m''+(\alpha_m^4+\lambda^4)Y_m=f(y)$$

Интегрирование этих уравнений, которое при использовании разработанного автором метода нахождения частного интеграла не представляет особых затруднений, приводит к решению, удовлетворяющему произвольным граничным условиям на сторонах $y=\pm b$. На сторонах $x=\pm a$ можно удовлетворить условиям свободного опирания или же нужно рассматривать задачу о безграничной в направлении оси x плите. Используя этот прием, А. С. Малиев решил задачу о плите-ленте, загруженной по прямоугольной сетке колоннами прямоугольного сечения (в предположении постоянства давления по площади опоры).

Из работ второй группы отметим прежде всего статьи М. И. Горбунова-Посадова [13, 14, 15], посвященные расчету плит, опирающихся на упругое полупространство. Решение этой задачи сводится к решению системы уравнений

$$\frac{D}{a^2b^2}\left\{\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}=q(x,y)-p(x,y) \tag{2.6}$$

$$w(x,y)=\frac{(1-\nu_0^2)\,ab}{\pi E_0}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{p(\bar{x},\bar{y})\,d\bar{x}\,d\bar{y}}{\sqrt{a^2(\bar{x}-x)^2+b^2(\bar{y}-y)^2}} \tag{2.7}$$

Здесь E_0 и ν_0—упругие постоянные основания, $2a$ и $2b$—размеры плиты, $w(x, y)$—прогиб плиты, $p(x, y)$—реактивное давление, $x = x'/a$, $y = y'/b$—безразмерные переменные, D—жесткость плиты, $\alpha = 1/\beta = a/b$.

Рассматривая равномерно нагруженную прямоугольную плиту, свободно опертую на упругое полупространство, М. И. Горбунов-Посадов, используя идею Л. С. Гильмана[1] и В. А. Флорина[2], впервые предложенную ими для аналогичной задачи расчета балок, ищет решение в виде симметричных относительно x и y двойных рядов с неопределенными коэффициентами

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2i, 2j} x^{2i} y^{2j}, \qquad w(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} A_{2u, 2v} x^{2u} y^{2v} \tag{2.8}$$

и составляет бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов, в которую входят, кроме уравнений (2.8), и граничные условия на краю плиты. Приближенно решая укороченную условиями $2i + 2j \leqslant 2n$ и $2u + 2v \leqslant 2n + 4$ систему, автор получает возможность точно удовлетворить уравнению плиты и интегральному условию равновесия

$$\iint p(x', y')\, dx'\, dy' = qab$$

и приближенно условиям на краях плиты и условию тождества осадок плиты и грунта. Сравнивая результаты расчетов для гибкой плиты с вычислениями для жесткой плиты, автор приходит к заключению, что при

$$r = \frac{\pi a^3 E_0}{D(1-\nu_0^2)} \leqslant 10$$

любые квадратные плиты можно приближенно принимать за жесткие.

Используя этот результат и найденное им ранее приближенное выражение реактивных давлений в случае жесткого квадратного штампа

$$\begin{aligned} p(x, y) = \{&0.543 + 0.250\,(x^2 + y^2) - 0.020 x^2 y^2 + 0.252\,(x^4 + y^4) + \\ &+ 0.280\,(x^6 + y^6) + 0.008\,(x^4 y^2 + x^2 y^4) + 0.491\,(x^8 + y^8) + \\ &+ 0.050\,(x^6 y^2 + x^2 y^6) - 0.194 x^4 y^4\} \frac{P}{4a^2} \end{aligned}$$

(P—суммарная нагрузка на плиту), М. И. Горбунов-Посадов сводит задачу о квадратной плите, опирающейся на упругое полупространство, к задаче теории плит. Таким же методом им изучены:

1) квадратная плита на упругом полупространстве, равномерно нагруженная по малой площадке в центре;

2) квадратная плита на упругом полупространстве, защемленная по контуру малого квадрата в центре;

3) квадратная плита на упругом полупространстве, нагруженная в центре сосредоточенной силой;

4) задачи пунктов 1 и 3 при равномерном реактивном давлении.

Сравнивая результаты численных расчетов, М. И. Горбунов-Посадов приходит к выводу, что существенная разница между решениями задач 1—3 проявляется только вблизи колонны и поэтому практически результатом решения задачи 3 можно пользоваться и в других случаях. М. И. Горбунов-Посадов решил также задачу, аналогичную № 3 для прямоугольной плиты.

---

[1] Гильман Л. С. Труды Ленинградского института промышленных сооружений. 1930. № 1.

[2] Флорин В. А. Сборники Гидростройпроекта. 1936. № 1. 1938. № 2.

М. Я. Леонов[32, 33, 34] привел задачу об изгибе неограниченной плиты, лежащей на упругом полупространстве, к решению системы уравнений

$$D\triangle\triangle w = q(x, y) - p(x, y)$$

$$\triangle\triangle\triangle p + \frac{E_0^2}{4D^2(1-\nu_0^2)^2}\, p = \frac{E_0^2}{4D^2(1-\nu_0^2)^2}\, q + \frac{E_0}{4\pi D(1-\nu_0^2)} \triangle\triangle \iint \frac{q}{r}\, dF$$

и построил общее решение вида

$$w = \int_0^\infty \frac{1}{Dt^3 + E_0/2(1-\nu_0^2)} \left\{ \frac{A_0(t) J_0(tr)}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty J_n(tr)\left[A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right] \right\} dt$$

$$p = \int_0^\infty \frac{1}{1 + 2D(1-\nu_0^2)t^3/E_0} \left\{ \frac{A_0(t) J_0(tr)}{2} + \right.$$

$$\left. + \sum_1^\infty J_n(tr)\left[A_n(t)\cos n\varphi + B_n(t)\sin n\varphi\right] \right\} dt$$

где

$$A_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \xi J_n(\xi t)\cos n\varphi\, q(\xi, \varphi)\, d\xi\, d\varphi$$

$$B_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \xi J_n(\xi t)\sin n\varphi\, q(\xi, \varphi)\, d\xi\, d\varphi$$

С помощью этих формул М. Я. Леонов получил интересные решения более простых задач (случай циклической симметрии $q(r)$, действие сосредоточенной силы и т. п.). В другой работе М. Я. Леонов[31] учел наличие горизонтальных сил трения между плитой и упругим основанием и пришел к выводу, что для бесконечной плиты пренебрежение силами трения при определении нормальных перемещений и реакций равносильно отбрасыванию множителя $4(1-\nu_0)^2/(3-4\nu_0)$ перед модулем упругости основания, т. е. примерно равносильно уменьшению E_0 на 10%.

Ряд частных задач в основном о плитах с жесткой частью (подколонник), обладающих к угловой симметрией, изучен М. Я. Леоновым[33] с помощью выведенной им специальной формы решения интегрального уравнения Буссинеска.

В монографии Б. Н. Жемочкина[19] рассмотрен приближенный метод расчета круглой плиты на упругом основании, основанный на приведении задачи к расчету статически неопределимой системы методами строительной механики. Заменяя круглую плиту стержневой системой и предполагая, что по окружностям число стержней бесконечно велико, автор составляет для кольцевых усилий в стержнях систему уравнений

$$X_0\delta_{k0} + X_1\delta_{k1} + \ldots + X_i\delta_{ki} + \ldots - y_0 + \Delta_{kp} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$X_0 + X_1 + \ldots + X_k + \ldots - \sum P = 0$$

где y_{ik}—осадка основания в месте приложения силы X_k от действия единичной силы по направлению X_i, а v_{ik}—аналогичная величина для плиты, при этом $\delta_{ik} = y_{ik} + v_{ik}$, далее, y_0—осадка центра плиты, Δ_{kp}—перемещение по X_k от внешней нагрузки.

Величины y_{ik} и v_{ik} вычисляются из решений соответствующих задач теории упругости для полупространства и плиты. При этом приходится ввести ряд усредненных величин. Найдя X_i, строят ступенчатую эпюру опорных реакций и рассчитывают плиту.

§ 3. Исследования, проведенные новыми методами

А. И. Лурье[42, 45] рассмотрел изгиб произвольно нагруженной круглой пластины, применив метод, аналогичный предложенному для плоской задачи Мусхелишвили.

Решение бигармонического уравнения, имеющего в комплексных переменных вид

$$16\frac{\partial^4 w}{\partial z\,\partial \bar z}=\frac{1}{D}\,p\,(z,\bar z)\qquad\left(\begin{matrix} z=x+iy\\ \bar z=x-iy\end{matrix}\right)\tag{3.1}$$

может быть с помощью двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представлено формулой

$$w=\tilde w\,(z,\bar z)+\bar z\,\varphi\,(z)+z\,\bar\varphi\,(\bar z)+\psi\,(z)+\bar\psi\,(\bar z)\tag{3.2}$$

где $\tilde w\,(z,\bar z)$—частное решение уравнения (3.1), представляемое интегралом Стильтьеса:

$$\tilde w\,(z,\bar z)=\frac{1}{16\pi D}\int(z-\zeta)\,(\bar z-\bar\zeta)\log\,(z-\zeta)\,(\bar z-\bar\zeta)\,dp\,(\zeta,\bar\zeta)$$

Используя граничные условия, выписанные также в комплексной форме, и интегрируя их после умножения на $[2\pi i\,(\sigma-z)]^{-1}$ по контуру единичного круга (для простоты взята плита единичного радиуса) на основании правил вычисления интегралов типа Коши, получаем систему из двух уравнений для определения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. В случае пластины с защемленными краями эта система будет

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z}\,\varphi(z)+\bar\varphi'(0)+\psi(z)+\bar\psi(0)=L(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tilde w\,(\sigma,\sigma^{-1})}{\sigma-z}\,d\sigma\\ &\varphi'(z)+2\bar\varphi'(0)+\frac{1}{z}\,\varphi(z)+z\psi'(z)=K(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{[A\,\tilde w\,(\sigma,\sigma^{-1})]}{\sigma-z}\,d\sigma\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$A\,[w]=n\frac{\partial w}{\partial z}+\bar n\frac{\partial w}{\partial\bar z}$$

$$w\,(z,\bar z)=\tilde w\,(z,\bar z)+2\,\mathrm{Re}\,\{L(z)-\tfrac{1}{2}L(0)-\tfrac{1}{2}(1-z\bar z)\,[K(z)-\tfrac{1}{2}K(0)-zL'(z)]\}.$$

Из этой формулы, например, легко получить, как частный случай решение Митчеля для круглой плиты, нагруженной сосредоточенной силой. Таким же путем А. И. Лурье[42] в 1927 г. нашел общее решение задачи об опертой круглой плите, из которого как частный случай получается решение Рейсснера (1935). Решения для произвольно нагруженной круглой плиты со свободными краями не представляет затруднений.

Этим же методом С. Г. Лехницкий[37] подробно изучил задачу об изгибе изотропной плиты произвольной формы, нагруженной распределенной нормальной нагрузкой, и моментами m и усилиями P, приложенными на краю. Он выяснил характер многозначности функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и их производных в случае задач о пластинах с отверстиями; для плиты с N отверстиями функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$ имеют вид

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{M_{xk}^*-M_{yk}^*i}{8D}\,z+iA_k\right\}\log\,(z-z_k)+F_1(z)$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{P_{kz}i}{8D}\,z-\frac{M_{xk}^*+iM_{yk}^*}{8D}\right\}\log\,(z-z_k)+F_2(z)$$

$$\psi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{M_{xk}^*-iM_{yk}^*}{8D}\log\,(z-z_k)+f_1(z)$$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{P_{zk}i}{8D}\log\,(z-z_k)+f_2(z)$$

где M_{xk}^* и M_{yk}^* и P_{zk}—составляющие главного вектора и главного момента на контуре k-го отверстия, A_k—вещественные постоянные, $F_1(z)$, $F_2(z)$, $f_1(z)$ и $f_2(z)$—функции, однозначные и непрерывные в области плиты.

Изящное обобщение метода комплексного переменного на случай задач об изгибе анизотропных плит дано С. Г. Лехницким [37], которому также принадлежит ряд исследований по изгибу и устойчивости анизотропных плит [38,36] (см. его монографию [39]).

Считая срединную плоскость плиты плоскостью упругой симметрии, имеем

$$B_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4B_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\,\partial y}+2\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+4B_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}+B_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{3q}{2h^3} \qquad (3.4)$$

где

$$B_{ik}=A_{ik}-\frac{A_{i3}A_{k3}}{A_{33}} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 6)$$

а A_{ik}—упругие постоянные, входящие в обобщенный закон Гука. С. Г. Лехницкий разыскивает общий интеграл однородного уравнения в виде

$$w=\sum_{k=1}^{4}F_k\left(x+\mu_k y\right)$$

где F_k—произвольные функции, и приходит к характеристическому уравнению

$$B_{22}\mu_k^4+4B_{26}\mu_k^3+2\left(B_{12}+2B_{66}\right)\mu_k^2+4B_{16}\mu_k+B_{11}=0$$

не имеющему вещественных корней (это следствие положительности потенциальной энергии). В соответствии с этим, если исключить случай равных корней, можно общий интеграл уравнения (3.4) записать так:

$$w=w_1(z_1)+w_2(z_2)+\overline{w}_1(\overline{z}_1)+\overline{w}_2(\overline{z}_2)+w_0$$

Здесь $w_1(z_1)$ и $w_2(z_2)$—произвольные аналитические функции комплексных переменных $z_1=x+\mu_1 y$, $z_2=x+\mu_2 y$, а w_0 — частное решение, соответствующее внешней нагрузке. Заметим, что z_1 и z_2 можно считать обычными комплексными переменными: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, причем

$$x_1=x+\alpha y,\quad y_1=\beta y,\quad x_2=x+\gamma y,\quad y_2=\delta y \qquad [\mu_1=\alpha+i\beta;\ \mu_2=\gamma+i\delta]$$

Однако необходимо помнить, что при изменении x и y в области плиты z_1 и z_2 будут изменяться в областях S_1 и S_2, отличных от области плиты. Развитие метода позволило С. Г. Лехницкому [37] изучить характер функций w_1 и w_2 в случае плиты с отверстием, и получить решение частных задач [37,36] (изгиб полубесконечной плиты силами и моментами, приложенными на краю; изгиб бесконечной плиты с эллиптическим отверстием силами и моментами, приложенными на краю отверстия и др.).

Используя результаты С. Г. Лехницкого [37], М. М. Фридман [62] рассмотрел некоторые задачи об изгибе круглой плиты с отверстием, нагруженной по контурам усилиями, нормальными к срединной поверхности, и изгибающими моментами. В отличие от А. И. Лурье [45] автор искал функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в форме бесконечных рядов Лорана по степеням z, коэффициенты которых определены из граничных условий.

Тем же автором [63] разобрана задача об изгибе тонкой бесконечной изотропной плиты с криволинейным отверстием. При определении $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ М. М. Фридман отображает область плиты с отверстием на внешность единичной окружности, сохраняя соответствие бесконечно удаленных точек. Используя затем отображающую функцию вида

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+m\zeta^{-n}\right)$$

где $n=1, 2\ldots$ и $-1<mn<1$, и интегрируя после умножения на

$$\frac{1}{2\pi i}\left(1-mn\sigma^{\pm(n+1)}\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

отображенные граничные условия, он находит функции φ и ψ. М. М. Фридманом выполнецы решения для плит с эллиптическим, «треугольным» и «прямоугольным» отверстиями, а также с такими же отверстиями, запаянными жесткими шайбами.

Ю. Б. Репман [58] предложил оригинальный общий метод решения задачи об изгибе произвольно нагруженной прямоугольной плиты при любых граничных условиях. Суть этого метода «фиктивных нагрузок» состоит в следующем: к действующей на плиту нагрузке q добавляют расходящиеся ряды

$$\bar{q} = \frac{P_1 + P_2}{2a}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{a}\right] + \frac{P_1 - P_2}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

$$\bar{\bar{q}} = -\frac{M_1 + M_2}{2a^2}\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a} + \\ + \frac{M_1 - M_2}{2a^2}\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

которые соответствуют силам $P_1(y)$, $P_2(y)$ и моментам $M_1(y)$, $M_2(y)$, распределенным по краям $x = \pm a$. Затем решают задачу об изгибе плиты для тех граничных условий, для которых известен способ построения решения. После этого фиктивные нагрузки $P_1(y)$, $P_2(y)$ и моменты $M_1(y)$, $M_2(y)$ подбирают так, чтобы точно или приближенно удовлетворить действительно поставленным граничным условиям. В качестве примера рассмотрим изгиб равномерно нагруженной ($q=1$) прямоугольной плиты, жестко защемленной по всем краям. Разложение заданной нагрузки вместе с присоединенной фиктивной нагрузкой (мы принимаем $P_1 = P_2 = 0$ и $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}\varphi(y)$) имеет вид

$$q + \bar{\bar{q}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a} - \frac{\varphi(y)\pi}{2a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

Перенеся таким образом «моменты в нагрузку», ставим упрощенные граничные условия $w=0$, $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ при $x = \pm a$. Тогда по методу М. Леви легко найти

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

где w_n — решение обыкновенного дифференциального уравнения ($m_n = (2n-1)\pi/2a$)

$$w_n^{\mathrm{IV}} - 2m_n^2 w_n'' + m_n^4 w_n = \frac{4}{\pi D}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{\pi\varphi(y)}{2Da^2}(-1)^n(2n-1),$$

Для приближенного решения задачи автор задает $\varphi(y)$ в виде формулы с одним неопределенным коэффициентом

$$\varphi(y) = 2c\left(1 + \cos\frac{\pi y}{b}\right)$$

Тогда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n^{\mathrm{I}}\operatorname{ch} m_n y + A_n^{\mathrm{II}} y \operatorname{sh} m_n y + \frac{2(-1)^{n-1}}{Da m_n^5} - \\ - \frac{2c(-1)^n}{Da}\left[\frac{1}{m_n^3} + \frac{m_n}{(m_n^2 + \pi^2/b^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b}\right]\right\}\cos m_n x$$

Постоянные A_n^{I} и A_n^{II} определяем через параметр c из условий $[w]_{y=\pm b} = 0$ $[\partial w/\partial y]_{y=\pm b} = 0$. Затем оставшийся параметр c находим из действительного граничного условия $[\partial w/\partial x]_{y=\pm a} = 0$, которое мы в соответствии с приближенным характером решения ставим только в точках $y = 0$.

Задание функции $\varphi(y)$ в виде ряда Фурье с неопределенными коэффициентами позволило бы свести точное решение поставленной задачи к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. К рассмотренному методу фиктивных нагрузок по основной идее близок и метод компенсирующих нагрузок, развитый в ряде работ Б. Г. Коренева [24,25,26,27]. При построении решения краевой задачи теории тонких плит взамен изучаемой области Ω_0 рассматривается расширенная область Ω, для которой известна функция Грина. По функции Грина и заданной нагрузке строится решение, удовлетворяющее уравнению, но не контурным условиям на границе основной области Ω_0. На это решение накладывают дополнительное, проистекающее от неизвестных компенсирующих нагрузок, которые считают распределенными по двум заданным контурам, лежащим в области $\Omega-\Omega_0$. Неизвестные нагрузки q_1, q_2 подбирают так, чтобы суммарное решение удовлетворяло граничным условиям на контуре области. Это требование приводит к определению q_1 и q_2 из системы двух линейных интегральных уравнений первого рода, приближенное решение которой позволяет найти и искомое решение основной задачи. В качестве иллюстрации метода рассмотрим решение задачи о прямоугольной плите на упругом основании. Функция Грина уравнения $D\Delta\Delta w + k_0 w = p(x, y)$ для бесконечной области в безразмерных полярных координатах ξ и ϑ имеет вид

$$K(\eta, \varphi;\ \xi, \vartheta) = \frac{1}{4\lambda^2 D}\operatorname{Re} H_0^{(1)}(\bar{n}\sqrt{i}), \qquad \lambda^4 = \frac{k_0}{D}$$

где H_0'—функция Ганкеля, а $n = \sqrt{\eta^2 + \xi^2 - 2\eta\xi\cos(\vartheta - \varphi)}$. Тогда решение будет

$$w_1(\xi, \vartheta) = \iint\limits_{\Omega_0} K(\eta, \varphi;\ \xi, \vartheta)\, p(\eta, \varphi)\, d\Omega.$$

Определяя по нему прогиб точки на контуре f_1 и угол поворота f_2 и выбирая за линии фиктивных нагрузок, кривые $\eta_1 = \eta_1(\varphi)$ и $\eta_2 = \eta_2(\varphi)$, получаем для определения q_1 и q_2 систему интегральных уравнений

$$\oint q_1 \operatorname{Re} H_0'(\bar{n}_1\sqrt{i})\, ds_1 + \oint q_2 \operatorname{Re}(\bar{n}_2\sqrt{i})\, ds_2 = -4\lambda^2 D f_1$$

$$\oint q_1 [\operatorname{Re} H_0'(\bar{n}_1\sqrt{i})]' \cos\alpha_1 ds_1 + \oint q_2 [\operatorname{Re} H_0'(\bar{n}_2\sqrt{i})]' \cos\alpha_2\, ds_2 = -4\lambda^2 D f_2$$

Здесь α_1 и α_2—углы, образованные нормалями к контурам с отрезками $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$. Численное решение этой системы приводит к окончательному решению задачи

$$w = w_1 + w_2 + w_3$$

где w_1 и w_2—прогибы от компенсирующих нагрузок q_1 и q_2. Подобным же методом Б. Г. Коренев изучил ряд задач о расчете конструкций на упругом основании, о колебаниях плит и мембран, об устойчивости упругих систем.

С. С. Голушкевич [12] вывел общие формулы, определяющие деформацию бесконечной плиты, загруженной распределенной нагрузкой $p(x, y)$, имеющие в случае нагрузки $p(\xi)$, распределенной по прямой линии, вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{2D}\left(1 - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{2D}\, y\, \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{2D}\left(1 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_L p(\xi)\log r\, d\xi + A,$$

где A—константа, определяемая из условий на бесконечности.

В задаче о равновесии бесконечной плиты, нагруженной силами q, равномерно распределенными по прямой L, и уравновешивающими их силами P, точки приложения которых делят эту прямую на равные отрезки a, функция φ будет

$$\varphi = P\varphi_1 = \frac{P}{4\pi}\log\left[1 - 2\exp\frac{-2\pi|y|}{a}\cos\frac{2\pi x}{a} + \exp\frac{-4\pi|y|}{a}\right]$$

Это решение использовано при построении решений следующих задач:

1. Равновесие свободно опертой бесконечной плиты, имеющей форму полосы с параллельными краями, загруженной системой сосредоточенных сил.

2. Равновесие такой же плиты, ограниченной в одном направлении.

3. Равновесие свободно опертых прямоугольной и треугольной плит, нагруженных сосредоточенными силами.

4. Равновесие бесконечной плиты, опертой в вершинах прямоугольников.

Решение задач облегчается составленными С. С. Голушкевичем таблицами функций

$$\varphi_1, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \varphi_4 = \frac{1}{2}(1 + y\varphi_3), \quad \varphi_5 = \frac{1}{2}(1 - y\varphi_3), \quad \varphi_6 = \frac{1}{2} y\varphi_2$$

Им же выведена обобщенная формула Максвелла-Мора для случая тонких плит

$$w(\xi, \eta) = \iint\limits_{\Omega} \varphi(x, y)\, \overline{\varphi}(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy \qquad (\triangle \overline{w} = \overline{\varphi}(x, y; \xi, \eta) \tag{3.5}$$

Здесь $\overline{w}$—прогиб в точке (x, y) от единичной силы, приложенной в точке $(\xi, \eta.)$

Ряд важных оригинальных результатов по теории изгиба плит содержится в монографии С. С. Голушкевича[11a]. Отметим из них следующие: 1) решение задачи об изгибе местным давлением бесконечной и полубесконечной плит, опирающихся на упругое основание; 2) изучение вопроса о влиянии круглых отверстий на распределение усилий в изогнутых тонких плитах; 3) изучение эффекта усиления упругой плиты ребром жесткости или утолщением некоторой ее части. При решении этих задач С. С. Голушкевич использовал аппарат теории интегралов Фурье.

Я. Л. Лунц [41] при изучении изгиба длинных защемленных пластин использовал предложенный Дунканом и обобщенный Д. Ю. Пановым метод малого параметра. Краевая задача защемленной тонкой длинной пластины, ограниченной кривыми $y = \lambda\eta_1(x)$ и $y = \lambda\eta_2(x)$, сводится к решению уравнения $D\triangle\triangle w = p(x, y)$; при контурном условии $w = \partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Замена $x = x$ и $y = \lambda\eta$ и представление

$$w(x, \lambda\eta, \lambda) = w_0(x, \eta) + \lambda w_1(x, \eta) + \lambda^2 w_2(x, \eta) + \ldots$$

при использовании разложения

$$p(x, \lambda\eta) = p_0(x) + \lambda\eta\, p_1(x) + \lambda^2\eta^2 p_2(x) + \ldots$$

приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} = 0, && \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_4}{\partial^4 \eta} = p_0 \\ &\frac{\partial^4 w_1}{\partial \eta^4} = 0, && \frac{\partial^4 w_1^0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_3}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_5}{\partial \eta^4} = \eta p_1 \\ 2\,&\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial \eta^4} = 0, \ldots, && \frac{\partial^4 w_{k-4}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_{k-2}}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial \eta^4} = \eta^{k-4} p_{k-4} \end{aligned} \tag{3.6}$$

В частном случае симметричной пластины решение системы (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} w(x, \lambda\eta, \lambda) = \lambda^4 (\eta^2 - \eta_1^2)^2 \Big\{ \frac{p_0}{24} + \frac{\lambda}{120} p_1 \eta + \frac{\lambda^2}{360} [(p_2 - p_0'')(\eta^2 + 2\eta_1^2) + \\ + 5(p_0 \eta_1^2)''] + \ldots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Этот ряд, вообще говоря, расходящийся, но можно показать, что при длинных и узких областях частичные суммы ряда мало отличаются от точного решения.

Подобным методом Я. Л. Лунц изучил задачу об изгибе параболической лунки, бесконечной полосы и эллиптической пластинки. В последних двух случаях при равномерной пагрузке ряды сходятся к точному решению.

С. А. Гершгорин[11] разработал изящный метод общего решения задачи об изгибе плит нагрузками, распределенными по площади круга и обладающими осевой симметрией. При действии на плиту нагрузки единичной интенсивности, распределенной по окружности L радиуса ρ с центром в точке ξ_0, η_0 прогиб $w(x, y)$ будет

$$w(x, y) = \int_L v(\xi, \eta; x, y)\, ds$$

где $v(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина. Используя установленную им ранее формулу усреднения, имеющую в случае бигармонической функции вид

$$\int_L f(\xi, \eta)\, ds = 2\pi\rho \left[f(\xi_0, \eta_0) + \frac{\rho^2}{4} \Delta_{\xi\eta} f(\xi_0, \eta_0) \right]$$

и осуществляя затем интегрирование по площади круга

$$W(x, y) = \int_0^R p(\rho)\, w(\xi, \eta)\, d\rho$$

С. А. Гершгорин получает решение поставленной задачи. Если x, y точка, внешняя по отношению к кругу загружения, то

$$W(x, y) = Pv(\xi_0, \eta_0; x, y) + \frac{A}{4} \Delta_{\xi\eta} v(\xi_0, \eta_0; x, y)$$

и во внутренней точке

$$W(x, y) = Pv(\xi_0, \eta_0; x, y) + \frac{A}{4} \Delta_{\xi\eta} v(\xi_0, \eta_0; x, y) - \frac{Pr_0^2 + A}{16\pi N} \log r_0^2 + \theta(r_0)$$

где

$$A = 2\pi \int_0^R p(\rho)\rho^3\, d\rho, \qquad P = 2\pi \int_0^R p(\rho)\, \rho\, d\rho, \qquad N = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

$$\theta(r_0) = \frac{1}{8N} \int_0^R P(\rho) \left[\rho(\rho^2 + r_0^2) \log \rho^2 + 2\rho r_0^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}\right) \right] d\rho$$

$$r_0^2 = (x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2$$

С. А. Гершгорин использовал эти формулы для решения частных задач и при законе нагрузки $p = p_n\rho^n$ получил обобщение решения Шмидта. Одно из этих решений было им использовано в работе [10].

Г. Ю. Джанелидзе [16,17] рассмотрена задача об определении перерезывающих сил при изгибе тонких пластин без предварительного определения прогиба. Это возможно только в случае опертых плит полигонального очертания, когда задача сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta \psi = p(x, y)$$

при контурном условии $\psi = 0$ и перерезывающие силы вычисляются по формулам $N_1 = -\partial\psi / \partial x$, $N_2 = -\partial\psi / \partial y$. В случае опертых прямоугольной и некоторых треугольных пластин, загруженных сосредоточенной нагрузкой, перерезывающие силы могут быть выражены в замкнутой форме через ϑ-функции и их производные. Использование этих формул для численных расчетов приводит к рядам, обладающим лучшей сходимостью, чем обычно применяемые. Например, в случае опертой квадратной пластины, нагруженной в центре сосредоточенной силой P, перерезывающая сила в середине стороны $x = 0$ дается формулой

$$N_1 = \frac{P}{a}\left(\operatorname{cth}\frac{\pi}{4} - \operatorname{th}\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2P}{a}\left\{ e^{-\pi}\frac{\operatorname{sh}{}^1/_2\pi}{\operatorname{sh}\pi} + e^{-3\pi}\frac{\operatorname{sh}{}^3/_2\pi}{\operatorname{sh}3\pi} + \ldots \right\}$$

Таким же путем может быть легко найдена в замкнутой форме функция ψ для равномерно загруженной равносторонней треугольной плиты и затем определен и прогиб w (другим методом эта задача решена Т. Н. Роговым [59]).

Поступила в редакцию
30 X 1946

ЛИТЕРАТУРА[1]

1. Баславский И. А. Изгиб прямоугольной плиты переменной толщины. Труды Высшего инженерно-технического училища ВМФ. 1943. Вып. 4. Стр. 37—80.
2. Власов В. З. Строительная механика тонких упругих пластинок. Прикладная математика и механика (дальше ПММ). 1946. Т. X. Вып. 1. стр. 173—192.
3. Галеркин Б. Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле. Доклады Академии Наук СССР (дальше ДАН). 1930. Стр. 353—358.
4. Галеркин Б. Г. К исследованию напряжений и деформаций в толстой прямоугольной плите. Изв. Научно-иссл. инст. гидротехники. 1932 Т. VI Стр. 28—38.
5. Галеркин Б. Г. Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу. ДАН. 1931. Стр. 273—280.
6. Галеркин Б. Г. Общее решение задачи о напряжениях и деформациях в толстой круглой плите и плите в виде кругового сектора. Известия Научно-исследовательского института гидротехники. 1932. т. VII. Стр. 1—7.
7. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. 1934. Стр. 1—372.
8. Галеркин Б. Г. Напряженное состояние при изгибе прямоугольной плиты по теории толстых плит и теории плит тонких. Труды Ленинградского института сооружений. 1935. Вып. 2. Стр. 3—21.
9. Герсеванов Н. М. Функциональные прерыватели в строительной механике и их приложение к расчету ленточных фундаментов. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института по изучению оснований и фундаментов инженерных сооружений. (Труды ВИОС.) 1933. Сб. № 2.
10. Гершгорин С. А. Бесконечная пластинка на опорах, расположенных в прямоугольном порядке. (Исследование о безбалочных перекрытиях). Сборник по теории сооружений. Изд. КУБУЧ. 1932. Стр. 18—68.
11. Гершгорин С. А. Об изгибе пластинок нагрузками, распределенными по площади круга. ПММ. 1933. Т. 1. Вып. 2. Стр. 159—166.
11а. Голушкевич С. С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова. 1947. Стр. 1—231.
12. Голушкевич С. С. О равновесии тонких плит. Труды Высшего военно-морского инженерно-строительного училища ВМФ. 1940. Вып. 2. Стр. 12—33.
13. Горбунов-Посадов М. И. Расчет центрально нагруженных квадратных фундаментных плит. Инж. сбор. Изд. АН СССР. Т. III. Вып. 1. Стр. 35—50.
14. Горбунов-Посадов М. И. Расчет балок и плит на упругом полупространстве. ПММ. 1940. т. IV. Вып. 3. Стр. 61—80.
15. Горбунов-Посадов М. И. Осадки и давления под жесткими прямоугольными фундаментными плитами. Строит. промышленность. 1940. № 8. Стр. 32—34.
15а. Гутман С. Г. Расчет толстых упругих плит под непрерывно распределенным давлением. Известия НИГИ. 1940. Т. 28. Стр. 212—237.
15б. Гутман С. Г. Расчет толстых упругих плит под действием собственного веса. Известия НИГИ. 1941. Т. 29. Стр. 153—158.
16. Джанелидзе Г. Ю. Суммирование решения Навье для прямоугольной плиты. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 4. Стр. 154—162.
17. Джанелидзе Г. Ю. Определение перерезывающих сил при изгибе опертых тонких пластин. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 2. Стр. 221—228.
18. Диментберг Ф. М. Об одном случае изгиба круглой пластинки. Вестник инженеров и техников. 1938. № 7. Стр. 415—418.
19. Жемочкин Б. Н. Расчет круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. Изд. Воен.-инж. акад. им. В. В. Куйбышева. 1938. Стр. 1—135.

[1] В литературный указатель включены также и некоторые работы, не рассмотренные в тексте статьи.

20. Китовер К. А. Определение расчетных усилий и деформаций в симметрично нагруженных круглых и кольцевых пластинках. Труды Одесского института инженеров коммунального и гражданского строит. 1939. Вып. 1. Стр. 317—355.

21. Китовер К. А. Определение расчетных усилий и деформаций круглых и кольцевых тонких плит под любой нагрузкой. Труды Одесского института инженеров коммунального и гражданского строительства. 1940. Вып. 2. Стр. 191—252.

22. Китовер К.А. Применение функциональных прерывателей к расчету круглых и кольцевых плит. Вестник инженеров и техников. 1939. Вып. 11. Стр. 469—472.

23. Китовер К.А. Определение упругой поверхности круглых плит, загруженных в центре моментом. Вестник инженеров и техников. 1940. Вып. 3. Стр. 170—172.

24. Коренев Б. Г. Приложение функций Грина к расчету конструкций на упругом основании методом коммпенсирующих нагрузок. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1936. Вып. 4. Стр. 1—44.

25. Коренев Б.Г. Расчет круглых плит на упругом основании. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1940. Вып. 29. Стр. 1—40.

26. Коренев Б. Г. Метод компенсирующих нагрузок в приложении к задачам о равновесии, колебаниях и устойчивости плит и мембран. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 5-6. Стр. 61—72.

27. Коренев Б.Г. К вопросу о применении компенсирующих нагрузок. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 1. Стр. 91—94.

28. Коренев Б.Г. О методе начальных параметров в задачах о круглых плитах и оболочках вращения. ПММ 1946. Т. X. Вып. 1. Стр. 165—172.

29. Кудрявцев Н. В. Изгиб круглой пластины с эксцентричным отверстием под действием сосредоточенной силы. ДАН. 1946. Т.53. Вып. 2. Стр. 107—110.

30. Кузьмина В. Д. К расчету средних полей бесконечной плиты на упругом основании, нагруженной колоннами по прямоугольной и квадратной сетке. Труды ВИОС. 1934. Сб. 2.

31. Леонов М. Я. Учет горизонтальных сил при расчете неограниченной плиты, лежащей на упругом полупространстве. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 3. Стр. 67—74.

32. Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ. 1939. т. III. Вып. 2. Стр. 53—78.

33. Леонов М. Я. К расчету фундаментных плит. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 3. Стр. 81—98.

34. Леонов М. Я. О расчете круглой фундаментной плиты на симметричную нагрузку. Вестник инженеров и техников. 1940. Вып. 4. Стр. 239—241.

35. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестник инж. и техн. 1936. № 12. Стр. 725—727.

36. Лехницкий С. Г. О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе. Вестник инж. и техников. 1937. № 4. Стр. 249—252.

37. Лехницкий С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2. Стр. 181—210.

38. Лехницкий С. Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 1. Стр. 71—92.

39. Лехницкий С. Г. Устойчивость анизотропных пластинок (Монография). Гостехиздат. 1943. Стр. 1—80.

39a. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГТТИ. 1947. Стр. 1—355.

40. Локшин А. С. К расчету пластинок, подкрепленных жесткими ребрами. ПММ. 1935. Т. II. Вып. 2. Стр. 225—240.

41. Лунц Я. Л. Изгиб длинных защемленных пластин. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 3.

42. Лурье А.И. К задаче о равновесии пластины с опертыми краями. Известия Ленинградского политехнического института. 1928. Т. XXXI. Стр. 305—320.

43. Лурье А. И. К задаче о равновесии плиты переменной толщины. Труды Ленинград. политехнического инст., физико-математ. серия. 1936. № 6. Стр. 57—80.

44. Лурье А.И. К теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Труды ЛПИ. 1937. № 6. Стр. 31—36.

45. Лурье А. И. Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1. Стр. 93—102.
46. Лурье А.И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3. Стр. 151—168.
47. Малиев А. С. Плиты на упругом основании (брошюра). Издание Ленинградского института сооружений. 1935. Стр. 1—40.
48. Малиев А.С. Решение безбалочного перекрытия с учетом защемления в массивах капителей. Труды Ленингр. инст. сооружений. 1935. Вып. 2. Стр. 33—56.
49. Малиев А.С. Решение прямоугольных плит и безбалочных перекрытий. Труды Ленинградского института промышленных сооружений. 1937. Вып. 4.
50. Малиев А. С. Исследование изгиба ребристых плит. Труды Высшего военно-морского инженерно-строительного училища ВМФ. 1939. Вып. 1. Стр. 1—186.
51. Мартюшов. Изгиб круглых плит. Ч. 1. Пластины постоянной толщины. Труды Эксперим.-конструкторского инст. азотного машиностроения. 1936. Техиздат.
52. Николаева М. В. Квадратное безбалочное перекрытие, свободно опертое по контуру и опирающееся на девять колонн с квадратными капителями. Труды Ленинградского института сооружений. 1935. Вып. 2. Стр. 57—74.
53. Папкович П. Ф. Статический расчет бетонного каркаса плотин системы Сенкова (Монография). Госстройиздат. 1939. Стр. 1—151.
54. Папкович П. Ф. К вопросу об общем случае деформации призматических тел. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 4. Стр. 27—36.
55. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Т. II. Пластины. Стр. 494—953 (Монография). Госстройиздат. 1941.
56. Папкович П. Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 3. Стр. 358—374.
57. Переходцева А. М. Расчет на изгиб круглых кольцевых пластин. Труды Центрального аэрогидродинамического института им. Н. Е. Жуковского. 1939. Вып. 403. Стр. 1—32.
58. Репман Ю.В. Общий метод расчета тонких плит. Сб. Пластинки и оболочки. Госстройиздат. 1939. Стр. 149—179.
59. Рогов Т.Н. Равносторонняя треугольная плита, свободно опертая по контуру. Тр. Высш. военно-мор. инж.-строит. училища ВМФ. 1940. Вып. 2. Стр. 34—43.
60. Семенов Н. С. Применение вариационного метода проф. Канторовича к решению задач об изгибе тонких прямоугольных пластин. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 4. Стр. 106—116.
61. Филиппов А.П. Прямоугольные пластинки, подкрепленные упругими ребрами и точечными упругими опорами. ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 2. Стр. 187—204.
62. Фридман Н.Н. О некоторых задачах теории изгиба тонких плит. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 1. Стр. 93—102.
63. Фридман Н.Н. Изгиб тонкой изотропной плиты с криволинейным отверстием. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 4. Стр. 334—338.
64. Шапиро Г.С. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 4. Стр. 316—320.
64 а. Шапиро Г. С. О расчете плиты, имеющей вид бесконечной ленты, лежащей на упругом основании. ДАН СССР. 1942. Т. 37. № 7—8.
65. Шехтер О. Я. и Винокурова А. В. Расчет плит на упругом основании. Госстройиздат (Монография). 1936. Стр. 1—228.
66. Шехтер О. Я. Расчет бесконечной фундаментной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой. Труды НИС треста глубинных работ. 1939. № 10. Стр. 133—139.
67. Шиманский Ю. А. Изгиб пластин (Монография). ОНТИ. 1934. Стр. 1—223.
68. Шулежко П.Г. Уравнения движения и равновесия анизотропной неоднородной тонкой плиты переменной толщины. Сб. № 2 Украинского научно-исследовательского института сооружений. 1938. Стр. 212—238.
69. Шулежко П.Г. К теории устойчивости тонких анизотропных неоднородных плит переменной жесткости. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3. Стр. 139—150.