Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

А. И. Гусейнов

(Баку)

В статье рассматривается задача о стационарном распределении температуры в теле, когда коэффициент теплопроводности в различных его частях принимает различные постоянные значения. Эта задача приводится к системе интегральных уравнений, которая в отличие от интегрального уравнения, соответствующего обычным задачам для уравнения Лапласа, имеет комплексные собственные значения.

1. Пусть имеем $(m+1)$ области $D_1, \ldots, D_{m+1}$; область D_1 ограничена поверхностями $S, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, области $D_2, \ldots, D_m$ ограничены соответственно поверхностями $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Поверхности $S, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ имеют ограниченную кривизну. Эти поверхности не имеют общих точек, и все $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ лежат внутри S. Требуется определить гармоническую функцию u в областях $D_1, \ldots, D_m$, непрерывную в $D_1 + \ldots + D_m + D_{m+1} + \sigma_1 + \ldots + \sigma_m + S$, удовлетворяющую краевым условиям

$$u = f(s) \quad \text{на } S; \qquad K_{2i-1} \frac{\partial u}{\partial n_{2i-1}} = K_{2i} \frac{\partial u}{\partial n_{2i}} \quad \text{на } \sigma_i \tag{1.1}$$

где $\partial u / \partial n_{2i-1}$ — внутренние нормальные производные, $\partial u / \partial n_{2i}$ — внешние нормальные производные $K_1, \ldots, K_m, \ldots, K_{2m}$ — положительные постоянные для всех точек поверхности σ_i $(i = 1, \ldots, m)$.

2. Для простоты доказательства единственности решения и при всех дальнейших рассуждениях мы будем рассматривать случай, когда область D_1 ограничена двумя поверхностями S и σ_1.

Предположим, что $f(s) = 0$; при этом покажем, что $u = 0$. Введем обозначения: $u = u_1$ — в области D_1 и $u = u_2$ — в области D_2.

Тогда согласно формуле Грина в D_1 и в D_2 соответственно будем иметь

$$\begin{gathered}\iiint\limits_{D_1} (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\tau + \iint\limits_{\sigma_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \, d\tau = 0 \\ \iiint\limits_{D_2} (\operatorname{grad} u_2)^2 \, d\tau - \iint\limits_{\sigma_2} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \, d\sigma = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Умножим первое из этих соотношений на K_1, второе на K_2 и сложим результаты; принимая во внимание второе из условий (1.1), где $i = 1$ и непрерывность u на поверхности σ_1, получим

$$K_1 \iiint\limits_{D_1} (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\tau + K_2 \iiint (\operatorname{grad} u_2)^2 \, d\tau = 0$$

Так как K_1 и K_2 положительные, то каждый интеграл обращается в нуль, откуда следует, что $u \equiv 0$ в области $D_1 + D_2 + \sigma_1$.

3. Приведем задачу к системе интегральных уравнений. Искомую функцию представим как сумму двух потенциалов

$$u = \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r} d\sigma \tag{3.1}$$

Здесь φ — угол между внешней нормалью в точке M поверхности S и направлением MP, где P есть некоторая точка с координатами (x, y, z). Тогда на основании (1.2) имеем

$$\begin{gathered} 2\pi\mu + \iint\limits_S \mu \frac{\cos(rv)}{r^2} ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r} d\sigma = f(s) \qquad \left(A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right) \\ 2\pi\rho + \iint\limits_S \mu \frac{\cos(vn) = 3\cos(rn)\cos(rv)}{r^3} A\, ds + \iint\limits_{\sigma_1} \rho \frac{\cos\psi}{r^2} A\, d\sigma = 0 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь ψ — угол, составляемый направлением PP_0, идущим от переменной точки P к точке P_0, с внешней нормалью n к поверхности σ_1.

Система (3.2) представляет частный случай системы

$$\begin{gathered} y_1 = \lambda \iint\limits_S K_{11} y_1 ds + \lambda \iint\limits_{\sigma_1} K_{12} y_2 d\sigma + f_1 \\ y_2 = \lambda \iint\limits_S K_{21} y_1 ds + \lambda \iint\limits_{\sigma_1} K_{22} y_2 d\sigma \end{gathered} \tag{3.3}$$

В рассматриваемом нами случае

$$\mu = y_1, \qquad \rho = y_2, \qquad f(s) = f$$

$$K_{11} = -\frac{\cos(vn)}{2\pi r^2}, \qquad K_{21} = -\frac{\cos(vn) - 3\cos(rn)\cos(rv)}{2\pi r} A$$

$$K_{12} = -\frac{1}{2\pi r}, \qquad K_{22} = -\frac{\cos\psi}{2\pi r^3} A$$

Величины K_{11} и K_{21} ограничены. Из K_{12} и K_{22} путем итерации можно получить ограниченное ядро. Следовательно, к системе (3.3) можно применить теорию Фредгольма. Из единственности нашей задачи вытекает, что неоднородная система (3.3) имеет единственное решение.

4. Рассмотрим, каким краевым задачам эквивалентна система интегральных уравнений (3.2) при произвольном λ.

Для этой цели значение функции u в области D_1, D_2, D_3 обозначим соответственно через u_1, u_2, u_3, где D_3 есть внешняя область поверхности S. Тогда на поверхности S будем иметь

$$u_3 = -2\pi\mu + \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r} \qquad u_1 = 2\pi\mu + \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r} d\sigma$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2}(u_1 - u_3) = 2\pi\mu, \qquad \frac{1}{2}(u_1 + u_3) = \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r} d\sigma \tag{4.1}$$

На поверхности S имеем следующую краевую задачу:

$$u_1 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} u_3, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_3}{\partial n} \tag{4.2}$$

Здесь первое условие получается подстановкой (4.1) в (3.2) и заменой $f(s)$ нулем, а n означает внешнюю нормаль к поверхности S.

Используя формулу Пуассона для нормальной производной потенциал простого слоя, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial n}-\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)=2\pi\rho \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)=\iint\limits_S \mu\,\frac{\cos(vn)-3\cos(rn)\cos(rv)}{r^3}\,A\,ds+\iint\limits_{\sigma_1}\rho\,\frac{\cos\psi}{r^2}\,A\,d\sigma$$

Принимая во внимание первое уравнение (3.2) и непрерывность u на поверхности σ_1, получим

$$\frac{\partial u_2}{\partial n}=\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial n}, \qquad u_2=u_1 \tag{4.4}$$

Таким образом, система интегральных уравнений (3.2) эквивалентна краевым задачам (4.2) и (4.4).

5. Докажем, что λ не принимает комплексного значения в круге радиуса 1, В самом деле, предположим, что λ комплексное число $\lambda=\alpha+\beta i$. Тогда однородная система будет иметь решение $\rho=\rho_1'+\rho_1''i$ и $\mu=\mu_1'+\mu_1''i$ и гармонические комплексные функции $u_1=u_1'+u_1''i$ и $u_2=u'_2+u_2''i$ будут удовлетворять соотношениям (4.2) и (4.4). Согласно (4.4) $\bar{u}_1=\bar{u}_2$, поэтому

$$\bar{u}_2\frac{\partial u_2}{\partial n}=\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\bar{u}_1\frac{\partial u_1}{\partial n} \tag{5.1}$$

Интегрируя (5.1) по поверхности σ_1 и принимая во внимание, что u_2' и u_2'' — гармонические функции внутри σ_1, имеем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma_1}\left(u_2'\frac{\partial u_2'}{\partial n}+u_2''\frac{\partial u''_2}{\partial n}\right)d\sigma=\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\Bigg[\iint\limits_{\sigma_1}\left(u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial n}+u_1''\frac{\partial u_1''}{\partial n}\right)d\sigma+\\ +i\iint\limits_{\sigma_1}\left(u_1'\frac{\partial u_1''}{\partial n}-u_1''\frac{\partial u_1'}{\partial n}\right)d\sigma\Bigg]\end{aligned} \tag{5.2}$$

С другой стороны, из соотношения (4.2) имеем

$$\iint\limits_S\bar{u}_1\frac{\partial u_1}{\partial n}ds=\frac{1-\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}\iint\limits_S\bar{c}_3\frac{\partial u_3}{\partial n}\,ds$$

Умножив последнее на $(1-A\lambda)/(1+A\lambda)$ и сложив с (5.2), на основании формулы Грина получим

$$a+\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}b+\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\frac{1-\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}c=0 \tag{5.3}$$

где

$$a=\iint\limits_{\sigma_1}\left(u_2'\frac{\partial u_2'}{\partial n}+u_2''\frac{\partial u_2''}{\partial n}\right)d\sigma, \qquad c=\iint\limits_S\left(u_3'\frac{\partial u_3'}{\partial n}+u_3''\frac{\partial u_3''}{\partial n}\right)ds$$

$$b=-\left[\iint\limits_S\left(u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial n}+u_1''\frac{\partial u_1''}{\partial n}\right)ds+\iint\limits_{\sigma_1}\left(u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial n}+u_1''\frac{\partial u_1''}{\partial n}\right)d\sigma\right] \tag{5.4}$$

Для бесконечной области D_3, ограниченной поверхностью s, и в области D_1 имеем

$$\iiint\limits_{D_3}(\operatorname{grad}u)^2\,d\tau=\iint\limits_S u\,\frac{\partial u}{\partial n}ds \tag{5.5}$$

$$\iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n_i}-v\frac{\partial u}{\partial n_i}\right)ds+\iint\limits_{\sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n_e}-v\frac{\partial u}{\partial n_e}\right)d\sigma=0 \tag{5.6}$$

Согласно (5.5) и (5.6) $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Легко видеть, что если $a=0$, $b=0$, $=0$, то $u=0$. В случае, когда $a>0$, $b>0$, $c>0$, имеем

$$a=\frac{A^2(\alpha^2+\beta^2)-1}{(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2}\,b-\frac{[A^2(\alpha^2+\beta^2)-1]\,[(\alpha^2+\beta^2)-1]+4A\beta^2}{[(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2]\,[(\alpha+1)^2+\beta^2]}\,c-$$

$$-\left\{\frac{-2A\beta}{[(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2]}\,b+\frac{2A\beta\,[(\alpha^2+\beta^2)-1]-2\beta\,[A^2(\alpha^2+\beta^2)-1)]}{[(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2]\,[(\alpha+1)^2+\beta^2]}\,c\right\}i$$

Это равенство имеет место, если

$$-2A\beta\,[(1+\alpha)^2+\beta^2]\,b+2\beta\,(1-A)\,[1+A\,(\alpha^2+\beta^2)]\,c=0$$

Отсюда $\beta=0$. Если $\beta\neq 0$, то

$$c=\frac{A\,[(\alpha+1)^2+\beta^2]}{(1-A)\,[1+A\,(\alpha^2+\beta^2)]}\,b$$

С другой стороны, мы имеем

$$a+\frac{1-A^2(\alpha^2+\beta^2)}{(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2}\,b+\frac{[1-A^2(\alpha^2+\beta^2)]\,[1-(\alpha^2+\beta^2)]+4A\beta^2}{[(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2]\,(\alpha+1)^2+\beta}\,c=0 \tag{5.7}$$

Из последних двух соотношений получим

$$a=\frac{[1-A^2(\alpha^2+\beta^2)]^2+4A^2\beta^2}{[(A\alpha+1)^2+A^2\beta^2]\,(1-A)\,[1+A\,(\alpha^2+\beta^2)]}\,b=0 \tag{5.8}$$

Отсюда $a=0$, $b=0$, т. е. $u=0$.

6. Докажем, что между $+1$ и -1 нет ни одного полюса. В силу соотношений (5.1) и (5.2) имеем

$$\iint\limits_{\sigma_1} u_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\,d\sigma=\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\iint\limits_{\sigma_1} u_2\frac{\partial u_2}{\partial n}\,d\sigma,\qquad \iint\limits_{S} u_1\frac{\partial u_1}{\partial n}\,ds=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\iint\limits_{S} u_0\frac{\partial u_0}{\partial n}\,ds$$

Из этих соотношений легко можно получить

$$\iiint\limits_{D_2}(\operatorname{grad}u_2)^2\,d\tau+\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\iiint\limits_{D_1}(\operatorname{grad}u_1)^2\,d\tau+$$

$$+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\iiint\limits_{D_3}(\operatorname{grad}u_0)^2\,d\tau=0 \tag{6.1}$$

Такое соотношение невозможно, если λ заключено между $+1$ и -1. В самом деле, так как $|A|<1$, то

$$\frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}>0,\qquad \frac{1-A\lambda}{1+A\lambda}\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}>0$$

Поэтому необходимо, чтобы все три интеграла в (6.1) были равны нулю и, следовательно, $u_1=\text{const}$, $u_2=\text{const}$, $u_3=\text{const}$ в областях D_1, D_2, D_3 соответственно. В бесконечности u_3 обращается в нуль, поэтому $u_3=0$ в области D_3, а также на поверхности S. Но тогда $u_1=0$ на поверхности S согласно условию (4.2).

Так как u_1 — гармоническая функция внутри D_1 и $u_1=u_2$ на σ_1, то $u_2=0$ в области D_2. Таким образом, $u=0$ в области $D_1+D_2+\sigma_1+s$.

Если $u_2=0$ внутри D_2 и на σ_1, то $\partial u_2/\partial n=0$, тогда из (4.4) $\partial u_1/\partial n=0$ и $\rho=0$ согласно (4.3). Подставляя это значение в (3.1), будем иметь

$$\iiint\limits_{S}\mu\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds=0$$

Так как $\partial u_1/\partial n=0$, то $\partial u_3/\partial n=0$ в силу (4.2) и, следовательно, $u_3=\text{const}$. Далее, $u_0=0$ в бесконечности, поэтому $u_3=0$ в D_3, а также на S. С другой стороны, $u_1-u_3=4\pi\mu$, следовательно, $\mu=0$.

Таким образом, при $|\lambda| < 1$ имеем $\rho = 0$, $\mu = 0$. Это и значит, что между $+1$ и -1 нет полюса.

7. Докажем, что $\lambda = +1$ не есть особое значение. При $\lambda = 1$ из (6.1) получаем

$$\frac{1-A}{1+A} \iiint_{D_1} (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\tau + \iiint_{D_2} (\operatorname{grad} u_2)^2 \, d\tau = 0$$

Отсюда следует, что имеем u_1 и u_2 будут постоянными величинами в областях D_1 и D_2 соответственно и, следовательно, функция u является постоянной в замкнутой области $D_1 + D_2 + \sigma$.

Принимая во внимание, что $u = 0$ на S при $\lambda = 1$, то имеем $u \equiv 0$ внутри области $D_1 + D_2 + \sigma_1$, поэтому $\rho = 0$, $\mu = 0$.

8. Докажем, что $\lambda = -1$ есть особое значение. Из первого соотношения (4.2) следует, что при $\lambda = -1$ будет $u_3 = 0$. Последнее справедливо в бесконечной области D_3, поэтому $\partial u_3 / \partial n = 0$. Тогда в силу второго соотношения (4.2) имеем, что производная $\partial u_1 / \partial n = 0$.

Принимая это во внимание, имеем

$$\iiint_{D_1} (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\tau + \iint_{\sigma_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

Для u_2 будет

$$\iiint_{D_2} (\operatorname{grad} u_2)^2 \, d\tau - \iint_{\sigma_1} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

Согласно (4.4) из последних равенств получаем

$$\iiint_{D_2} (\operatorname{grad} u_2)^2 \, d\tau + \frac{1-A}{1+A} \iiint_{D_1} (\operatorname{grad} u_1)^2 \, d\tau = 0 \qquad \left(\frac{1-A}{1+A} > 0\right)$$

Отсюда $u_1 = \mathrm{const}$ в области D_1 и $u_2 = \mathrm{const}$ в области D_2. Таким образом, $u = \mathrm{const}$.

Достаточно предположить

$$u = \iint_S \frac{\cos \varphi}{r^2} \, ds$$

чтобы получить решение задачи, удовлетворяющее всем требованиям. Очевидно, что в этом случае $\rho = 0$, $\mu = 1$. Следовательно, однородная система имеет решение, отличное от нуля. А это значит, что $\lambda = -1$ есть особое значение.

9. Все результаты, которые были получены для случая пространства, будут справедливыми и для задачи на плоскости. Мы ограничимся примером, при помощи которого можно выяснить характер особых значений вне круга сходимости.

Заменим поверхность S и σ_1 двумя концентрическими окружностями. Предположим, что

$$u_1 = \frac{\beta \cos n\varphi}{r^n} + j r^n \cos n\varphi, \qquad u_2 = \delta r^n \cos n\varphi, \qquad u_3 = \frac{\alpha \cos n\varphi}{r^n}$$

Тогда условия (4.2) и (4.4) принимают вид

$$\frac{\beta}{R^n} + jR^n = \frac{\alpha}{R^n} \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \qquad \delta \rho^n = \frac{\beta}{\rho^n} + j\rho^n$$

$$-\frac{n\beta}{R^{n+1}} + jnR^{n-1} = -\frac{\alpha n}{R^{n+1}}, \qquad \delta n \rho^{n-1} = \frac{1-A\lambda}{1+A\lambda} \left(-\frac{\beta n}{\rho^{n+1}} + nj\rho^{n-1} \right) \qquad (9.1)$$

Из этой системы можно определить α, β, j, δ. Составив детерминант системы (9.1), легко получить

$$\lambda_n = \pm \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Таким образом, мы видим, что λ принимает мнимые значения при $A < 0$.

10. Изложенным методом можно решить следующую краевую задачу: найти гармоническую функцию u в области D_1 и D_2 и непрерывную в области $D_1 + D_2 + s + \sigma_1$, удовлетворяющую краевым условиям[1]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial n} = f(s) && \text{на поверхности } S \\ &k_1 \frac{\partial u}{\partial n_1} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n_2} && \text{на поверхности } \sigma_1 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Нетрудно показать, что наша задача имеет единственное решение, если пренебречь произвольным постоянным слагаемым.

Будем искать решение задачи в виде суммы двух потенциалов

$$u = \iint\limits_S \frac{\mu}{r}\, ds + \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho}{r}\, d\sigma \tag{10.2}$$

Принимая во внимание краевые условия (11.1) и разрыв непрерывности нормальной производной, решение задачи приведем к системе интегральных уравнений. Получим

$$\begin{aligned} &2\pi\mu + \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \iint\limits_{\sigma_1} \rho \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma = f(s) \\ &2\pi\rho + \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} A\, ds + \iint\limits_{\sigma_1} \rho \frac{\cos\varphi}{r^2} A\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Эта система представляет частный случай системы

$$\begin{aligned} &2\pi\mu + \lambda \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds + \lambda \iint\limits_{\sigma_1} \rho \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma = f(s) \\ &2\pi\rho + \lambda \iint\limits_S \mu \frac{\cos\varphi}{r^2} A\, ds + \lambda \iint\limits_{\sigma_1} \rho \frac{\cos\varphi}{r^2} A\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{10.4}$$

Значение нашей функции u в области D_1, D_2 и D_3 обозначим соответственно через u_1, u_2, u_3, где D_3 есть внешняя область поверхности S. Тогда нетрудно видеть, что при произвольном значении λ система (10.4) дает нам решение следующих краевых задач:

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{1 - A\lambda}{1 + A\lambda} \frac{\partial u_1}{\partial n} \qquad \text{на } \sigma_1 \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \frac{\partial u_0}{\partial n} + f(s), \qquad u_1 = u_0 \qquad \text{на } s \tag{10.6}$$

Пользуясь соотношениями (10.5) и (10.6), можно исследовать собственные значения λ и этим легко обнаружить, что внутри круга радиуса 1 нет ни одного характеристического ч сла. На окружности $\lambda = 1$ есть особое значение.

Поступила в редакцию
22 XII 1945

Азербайджанский
государственный университет

---

[1] Все обозначения прежние.