Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О ЗНАКЕ НАИМЕНЬШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЧИСЛА

Н. Г. Четаев

(Москва)

Среди задач об устойчивости движения вопрос о знаке наименьшего характеристического числа системы линейных дифференциальных уравнений является крайне интересным. Его значение освещено теоремами Ляпунова[1] и моей[2]. Мной было найдено доказательство его очевидного решения для случая, когда коэффициенты уравнений стремятся с неограниченным ростом независимого переменного к определенным пределам[3], годное также для отдельных случаев, когда коэффициенты имеют ограниченные вариации¹; общий случай уравнений с коэффициентами, имеющими ограниченные вариации, разрешен К. П. Персидским[4]. Критерии положительности наименьшего характеристичного числа в общем случае переменных коэффициентов приводили к бесконечной последовательнос неравенств, причем на пути решения вопроса было известное преобразование Пуанкаре к комплексным значениям независимого переменного (К. П. Персидский[5]) либо весьма неэффективное использование характеристик Кронекера[6]. В настоящей статье задача сводится на исследование характеристических чисел n выражений, зависящих от коэффициентов уравнений.

Пусть предложена система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sk} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

с коэффициентами p_{sr}, являющимися вещественными, ограниченными и непрерывными функциями времени t. За начальный момент примем $t = 0$. Начальные значения переменных x_s обозначим соответственно через $x_s^{(0)}$.

Будем искать методом последовательных приближений начальные значения $x_s^{(0)}$, чтобы, начав изменяться с них, значения переменных в момент t были x_s.

Если ввести для независимого переменного t обозначения $t_1, t_2, \ldots$ и положить

$$p_{sr}^{(k)} = p_{sr}(t_k)$$

то будем иметь

$$x_s^{(0)} = \sum_r x_r \left\{ \delta_{sr} + \int_t^0 p_{sr}\, dt + \ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_n} [s, i_1, \ldots, i_n, r] + \ldots \right\}$$

где для сокращения положено

$$[s, i_1, \ldots, i_n, r] = \int_t^0 dt_1 \int_{t_1}^0 dt_2 \ldots \int_{t_n}^0 p_{si_1}{}^{(1)} p_{i_1 i_2}{}^{(2)} \ldots p_{i_n r}{}^{(n+1)}\, dt_{n+1}$$

---

¹ Пользуясь случаем, замечу, что в статье [3] в начале стр. 196 опущено, что производные a_{rs}' предполагаются ограниченными.

Обозначим

$$A_{sr} = \delta_{sr} + \int_t^0 p_{sr}\,dt + \ldots + \sum_{i_1,\ldots,i_n} [s, i_1, \ldots\ i_n, r] + \ldots$$

и рассмотрим функцию

$$V = \sum_s \Big(\sum_r A_{sr}\, x_r \Big)^2 = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

где

$$c_{\alpha\beta} = \sum_s A_{s\alpha}\, A_{s\beta} = c_{\beta\alpha}$$

Взятая согласно заданным дифференциальным уравнениям полная производная по времени dV/dt равна тождественно нулю.

Если в матрице $\| c_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\,\mu \|$ все главные диагональные миноры положительны для некоторого положительного числа μ и для всех значений времени, больших некоторого числа T, то функция V будет определенно положительной в смысле Ляпунова, ибо при этом согласно критерию Сильвестра функция

$$V - \mu\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

будет положительной для значений t, больших T; $\delta_{\alpha\beta}$ обозначает нуль, когда α и β различны, и единицу, когда α и β равны между собой. Если эти условия соблюдены, то согласно известной теореме Ляпунова об устойчивости можем утверждать, что невозмущенное движение $(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0)$ будет при этом устойчивым.

Положительное число μ будет существовать, если существуют неравенства

$$\frac{c_r}{c_{r-1}} > \eta > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

где

$$c_r = \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{r1} \ldots c_{rr} \end{vmatrix} \qquad (c_0 = 1)$$

Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво, то найдется неограниченно возрастающая положительная функция η, и наоборот, если может быть найдена положительная функция η с отрицательным характеристичным числом, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, а наименьшее характеристичное число решений заданной системы дифференциальных уравнений будет положительным. Доказательство последнего непосредственно следует из рассмотрения функции

$$e^{-\varepsilon t}\,V$$

при достаточном положительном ε.

Если функция η получается исчезающей с положительным характеристичным числом, то наименьшее характеристичное число решений заданных дифференциальных уравнений отрицательно.

Поступила в редакцию
6 XII 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. 1935 (n°13).
2. Четаев Н. Г. ПММ. 1944. T VIII.
3. Четаев Н. Г. ПММ. 1945. Т. IX.
4. Персидский К. П. Докторская диссертация.
5. Персидский К. П. Математический сборник. 1938.
6. Четаев Н. Г. Сборник трудов Казанского авиационного института, 1934.