Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНАМ

М. А. Лукомская

(Минск)

1. Формулировка задачи. Будем рассматривать задачу о плоском стационарном потоке совершенной и несжимаемой жидкости при следующих граничных условиях.

Имеются две (или более) области G_1 и G_2, заполненные жидкостью. Требуется найти характеристическую функцию потока $w_1(z)$ в области G_1 и характеристическую функцию потока $w_2(z)$ в области G_2 по заданным особенностям этих функций. Условия на границе L даются равенствами

$$\psi_1 = \psi_2, \qquad \varphi_1 / c_1 = \varphi_2 / c_2 \qquad (\varphi_1 + i\psi_1 = w_1, \ \varphi_2 + i\psi_2 = w_2) \tag{1.1}$$

где c_1 и c_2—константы.

Эта задача представляет интерес в теории фильтрации нефти [1]. Областями G_1 и G_2 являются тогда части нефтяного пласта с различной проницаемостью грунта или части, заполненные жидкостями с различной вязкостью (нефть и вода). В последнем случае для обеспечения стационарности потока приходится пренебречь перемещением границы между нефтью и водой в процессе фильтрации. Константы c_1 и c_2 определяются проницаемостью грунта и вязкостью просачивающейся жидкости. Скважины, через которые происходит добыча нефти, являются отрицательными источниками жидкости, т. е. логарифмическими точками ветвления соответствующей характеристической функции.

Рассмотрим три частных случая этой задачи.

1. Областями G_1 и G_2 являются верхняя и нижняя полуплоскости, причем на конечной части плоскости имеется только один источник (скважина) [1].

2. Областями G, G_1 и G_2 с различными проницаемостями грунта являются полоса $-h < y < 0$ и две полуплоскости $y > 0$ и $y < -h$, причем на конечной части плоскости имеется только один источник внутри полосы.

3. Областями G_1, G_2 и G являются два круга и область, внешняя по отношению к ним, причем на конечной части плоскости имеется один и только один источник внутри одного из кругов.

Задачи эти принципиально не усложняются, если источников несколько.

---

[1] Другой способ решения этой задачи дан С. В. Фальковичем [2].

2. Вывод функциональных уравнений, эквивалентных граничным условиям. На границе L, считая, что граничная кривая L имеет параметрическое представление $z=z(t)$, где t вещественно, согласно (1.1) имеем

$$w_1[z(t)]-\overline{w_1[z(\bar{t})]}=w_2[z(t)]-\overline{w_2[z(\bar{t})]},\qquad \frac{w_1[z(t)]+\overline{w_1[z(\bar{t})]}}{C_1}=\frac{w_2[z(t)]+\overline{w_2[z(\bar{t})]}}{C_2}$$

Здесь в силу того, что t вещественно, во вторых членах t заменено на $\bar{t}$.

Если функция $z(t)$ аналитическая, то все четыре члена каждого из последних равенств — аналитические функции от t и самые равенства имеют место во всей области существования этих функций [3].

В силу принципа симметрии точки $z(t)$ и $z(\bar{t})$ симметричны относительно аналитической кривой L в плоскости z, и полученные функциональные уравнения можно переписать так:

$$w_1(z)-\overline{w_1(z^*)}=w_2(z)-\overline{w_2(z^*)},\qquad \frac{w_1(z)+\overline{w_1(z^*)}}{C_1}=\frac{w_2(z)+\overline{w_2(z^*)}}{C_2} \tag{2.1}$$

где z^* обозначает точку, симметричную с точкой z относительно L.

В случаях, когда кривая L есть: 1) вещественная ось, 2) прямая $y+h=0$, параллельная вещественной оси, 3) окружность с центром C и радиусом R, то соответственно будет

$$z^*=\bar{z},\qquad z^*=\bar{z}-2h,\qquad z^*=C+\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{C}} \tag{2.2}$$

В общем случае положение осложняется тем, что возникает вопрос о существовании и единственности точки z^*, соответствующей точке z, если мы не пожелаем ограничиться исследованием лишь значений z, достаточно близких к L. Ограничимся случаем, когда кривая L есть часть прямой линии или окружности. Тогда точке z соответствует одна и только одна точка z^*.

3. Связь между особенностями функций. Нетрудно видеть, что если одна из функций $w(z)$ и $\overline{w(z^*)}$ имеет точку a точкой ветвления, то другая имеет точку a^* точкой ветвления, т. е. совокупность точек ветвления функции $\overline{w(z^*)}$ симметрична с совокупностью точек ветвления функции $w(z)$ относительно кривой L. То же относится и к совокупности точек ветвления логарифмического вида.

Последнее обстоятельство имеет в дальнейшем существенное значение, так как источники жидкости являются логарифмическими точками ветвления соответствующих характеристических функций. Обратное не всегда имеет место, так как при замене граничных условий функциональными уравнениями (2.1) имело место аналитическое продолжение характеристических функций, и поэтому может случиться, что точка ветвления характеристической функции потока лежит вне той области, где расположен самый поток.

Будем говорить, что характеристическая функция имеет фиктивный источник в этом последнем случае и реальный источник, если точка ветвления расположена в области потока. По аналогии будем также называть источниками (конечно, фиктивными) точки ветвления функций вида $\overline{w(z^*)}$, где $w(z)$ — характеристическая функция. Тогда, если a есть источник одной из функций $w(z)$ или $\overline{w(z^*)}$, то a^* есть источник для другой.

Отметим еще следующее, простое, но для нас важное положение.

Если одна из четырех аналитических функций, удовлетворяющих двум линейным соотношениям

$$f_1(z) + a_2 f_2(z) = a_3 f_3(z) + a_4 f_4(z), \qquad f_1(z) + a_2' f_2(z) = a_3' f_3(z) + a_4' f_4(z) \quad (3.1)$$

где a_i и a_i' — комплексные числа и $a_i \neq a_i'$, $a_i \neq 0$, $a_i' \neq 0$, имеет точку a особой точкой, то по крайней мере еще две из этих функций имеют ее своей особой точкой. Это положение относится и к логарифмическим точкам ветвления, т. е. к источникам жидкости, если рассматриваемые функции являются характеристическими функциями некоторых потоков.

4. Две полуплоскости с различными проницаемостями грунта. Пусть поток в верхней полуплоскости плоскости $z = x + iy$ имеет характеристическую функцию $w_1(z)$, а в нижней — характеристическую функцию $w_2(z)$. На конечной части плоскости существует только один реальный источник жидкости в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$.

Тогда точка z_0 является источником для функции $w_1(z)$. В силу (3.1) и (2.1) она является источником еще по крайней мере для двух из функций $\overline{w_1(\bar{z})}$, $w_2(z)$ и $\overline{w_2(\bar{z})}$. Но $\overline{w_2(\bar{z})}$ не может иметь источника в точке z_0, так как в этом случае в силу § 3 функция $w_2(z)$ имела бы реальный источник в точке $\bar{z}_0$, чего по условию задачи нет. Таким образом, точка z_0 является источником для $\overline{w_1(\bar{z})}$ и для $w_2(z)$. Но тогда точка $\bar{z}_0$ будет источником для $w_1(z)$.

Итак, источники $w_1(z)$ расположены в точках z_0 (реальный источник) и $\bar{z}_0$ (фиктивный источник), а источник $w_2(z)$ (фиктивный) — в точке z_0.

Нетрудно видеть, что других источников (хотя бы фиктивных) на конечной части плоскости ни функция $w_1(z)$, ни функция $w_2(z)$ не имеют, В самом деле, ни одна точка верхней полуплоскости не может быть источником ни для $w_1(z)$, ни для $\overline{w_2(\bar{z})}$ (последнее в силу § 3 и условия об отсутствии реальных источников в нижней полуплоскости). Но тогда в силу (3.1) она не может быть источником и для $w_2(z)$. Для нижней полуплоскости доказательство аналогичное.

Следовательно, если решение существует, то оно имеет вид

$$w_1(z) = A \log(z - z_0) + B \log(z - \bar{z}_0) + F_1(z), \quad w_2(z) = D \log(z - z_0) + F_2(z) \quad (4.1)$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — целые функции.

Если Q есть дебит скважины в точке z_0, то $A = -Q/2\pi$ по физическому смыслу функции $w_1(z)$,

Подставляя (4.1) в (2.1) и сравнивая коэффициенты при бесконечных частях функций, убеждаемся, что уравнения (2.1) обращаются в тождества, если положить

$$B = \lambda A, \qquad D = (1 - \lambda) A, \qquad F_1(z) = F_2(z) = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right) \quad (4.2)$$

Таким образом, формулы (4.1) являются решением поставленной задачи при условиях (4.2). Окончательно получаем

$$w_1(z) = -\frac{Q}{2\pi}\left[\log(z - z_0) + \lambda \log(z - \bar{z}_0)\right], \qquad w_2(z) = -\frac{Q}{2\pi}(1 - \lambda)\log(z - z_0) \quad (4.3$$

5. Полоса и две полуплоскости. Положим теперь, что имеется полоса $-h < y < 0$, $h > 0$ плоскости $z = x + iy$ и две полуплоскости $y > 0$ и $y < -h$ с различными проницаемостями грунта. Пусть на конечной части плоскости существует только один источник в точке z_0, расположенный внутри полосы.

В этом случае имеем три характеристические функции: $w(z)$ для полосы, $w_1(z)$ для полуплоскости $y > 0$ и $w_2(z)$ для полуплоскости $y < -h$. Вследствие наличия двух граничных кривых каждой точке z отвечают две точки z^*, одна по отношению к линии $y = 0$, другая — к линии $y = -h$.

Докажем, что функции $w(z)$, $w_1(z)$ и $w_2(z)$ не могут иметь на конечной части плоскости никаких особых точек, кроме логарифмических точек ветвления (источников), и что все эти точки ветвления принадлежат совокупности M, построенной следующим образом. Отобразим зеркально точку z_0 около прямой $y = 0$ и полученную точку обозначим через z_1. Точку z_1 отобразим зеркально около прямой $y = -h$ и полученную точку обозначим через z_{12}. Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность точек $z_{121\ldots l}$ $(l = 1, 2)$. Аналогично построим последовательность $z_2, z_{21}, z_{212}, \ldots$, где z_2 является зеркальным отображением точки z_0 около прямой $y = -h$, точка z_{21} — зеркальным отображением z_2 около прямой $y = 0$ и т. д. Нетрудно видеть, что все точки совокупности M различны.

Для доказательства того, что все особые точки функций $w(z)$, $w_1(z)$ и $w_2(z)$ принадлежат совокупности M, рассмотрим некоторую точку a, лежащую внутри полосы и не совпадающую с z_0. Точка эта не может быть особой точкой ни для $w(z)$, ни для $\overline{w_1(z^*)}$, ни для $\overline{w_2(z^*)}$. Последнее вытекает из условия § 3 и физического смысла функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$; точка z^* берется по отношению к линии $y = 0$ для функций $w_1(z)$ и по отношению к линии $y = -h$ для функции $w_2(z)$. Но тогда из условия (3.1) следует, что она не может быть особой точкой ни для одной из функций $w(z)$, $w_1(z)$ и $w_2(z)$.

Согласно § 3 это свойство переносится на всякую точку, которая получается посредством конечного числа зеркальных отображений точки a около прямых $y = 0$ и $y = -h$. Но, с другой стороны, всякая точка плоскости z, не принадлежащая совокупности M, есть точка этого последнего класса.

Из (3.1) и физического смысла $w(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, легко установить, что:

1) точка z_0, являющаяся по условию задачи источником для функции $w(z)$, является также источником (фиктивным) для $w_1(z)$ и $w_2(z)$;

2) все точки $z_{121\ldots l}$ и $z_{212\ldots l}$ $(l = 1, 2)$ — источники (фиктивные) для $w(z)$;

3) каждая из точек $z_{12\ldots l}$ и $z_{212\ldots l}$ является источником (фиктивным) для одной и только одной из функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$, а именно, точки $z_{121\ldots 2}$ и $z_{212\ldots 2}$ источники для $w_1(z)$, а $z_{121\ldots 1}$ и $z_{212\ldots 1}$ — источники для $w_2(z)$.

Поэтому целесообразно искать решение в форме рядов (5.1)

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi}\log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \log(z - z_{12\ldots l_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \log(z - z_{21\ldots l_k}) + F(z)$$

$$w_1(z) = D_1 \log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \log(z - z_{12\ldots l_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(1)} \log(z - z_{21\ldots l_k}) + F_1(z)$$

$$w_2(z) = D_2 \log(z - z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \log(z - z_{12\ldots l_k}) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(2)} \log(z - z_{21\ldots l_k}) + F_2(z)$$

где $F(z)$, $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — целые функции,

$$A_k^{(1)}=0 \text{ если } k=2n-1, \quad A_k^{(2)}=0 \text{ если } k=2n$$
$$B_k^{(1)}=0 \text{ если } k=2n, \quad B_k^{(2)}=0 \text{ если } k=2n-1 \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (2.1), убеждаемся, что уравнения (2.1) обращаются в тождества, если положить

$$A_{2n-1}=-\frac{Q}{2\pi}\lambda_1^n\lambda_2^{n-1}, \qquad A_{2n}=-\frac{Q}{2\pi}\lambda_1^n\lambda_2^n, \qquad D_1=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_1)$$

$$B_{2n-1}=-\frac{Q}{2\pi}\lambda_1^{n-1}\lambda_2^n, \qquad B_{2n}=-\frac{Q}{2\pi}\lambda_1^n\lambda_2^n, \qquad D_2=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_2)$$

$$A_{2n}^{(1)}=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_1)\lambda_1^n\lambda_2^n, \qquad B_{2n-1}^{(1)}=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_1)\lambda_1^{n-1}\lambda_2^n \tag{5.3}$$

$$B_{2n}^{(2)}=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_2)\lambda_1^n\lambda_2^n, \qquad A_{2n-1}^{(2)}=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_2)\lambda_1^n\lambda_2^{n-1}$$

$$F_1(z)=F_2(z)=F(z)=0 \qquad \left(\lambda_1=\frac{c_1-c}{c_1+c}, \quad \lambda_2=\frac{c_2-c}{c_2+c}\right)$$

Окончательно получаем

$$w(z)=-\frac{Q}{2\pi}\left\{\log(z-z_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{[\frac{1}{2}(k+1)]}\lambda_2^{k-[\frac{1}{2}(k+1)]}\log(z-z_{12\ldots l_k})+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k-[\frac{1}{2}(k+1)]}\lambda_2^{[\frac{1}{2}(k+1)]}\log(z-z_{12\ldots l_k})\right\}$$

$$w_1(z)=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_1)\left\{\log(z-z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n\lambda_2^n\log(z-z_{12\ldots l_{2n}})+\right. \tag{5.4}$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^{n-1}\lambda_2^n\log(z-z_{2\ldots l_{2n-1}})\right\}$$

$$w_2(z)=-\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda_2)\left\{\log(z-z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n\lambda_2^{n-1}\log(z-z_{12\ldots l_{2n-1}})+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^n\lambda_2^n\log(z-z_{21\ldots l_{2n}})\right\}$$

где $[\frac{1}{2}(k+1)]=\frac{1}{2}(k+1)$, если $k+1$ есть число четное и $[\frac{1}{2}(k+1)]=\frac{1}{2}k$, если k есть число четное.

Абсолютная и равномерная сходимость рядов (5.4), каждого в области, где он имеет физический смысл, обеспечена тем, что $|\lambda_1|<1$ и $|\lambda_2|<1$.

6. Два круга и область между ними. Пусть имеем два непересекающиеся круга: G_1 с центром в точке $g_1^{(1)}$ и G_2 с центром в точке $g_2^{(1)}$ и с произвольными радиусами, и область G, внешнюю по отношению к ним. В первом круге в точке a имеется источник, не совпадающий с его центром. Других источников на конечной части плоскости нет. Соответствующие характеристические функции потока обозначим через $w_1(z)$, $w_2(z)$ и $w(z)$. Кроме точки a, реальным источником жидкости является точка $z=\infty$ (для функции $w(z)$). Докажем, что все источники, как реальные, так и фиктивные, принадлежат точечной совокупности M, построенной следующим образом.

Отобразим точку $z=\infty$ около окружности круга G_1, полученную точку $g_1^{(1)}$ отобразим около окружности круга G_2 и вновь полученную точку обозначим $g_{12}^{(2)}$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $g_1^{(1)}$, $g_{12}^{(2)}$, $g_{121}^{(3)}, \ldots$ Точно так же построим последовательность $g_2^{(1)}$, $g_{21}^{(2)}$, $g_{212}^{(3)}, \ldots$ Аналогично, исходя из источника a, строим две последовательности: $a_1^{(1)}$, $a_{12}^{(2)}$, $a_{121}^{(3)}, \ldots$ и $a_2^{(1)}$, $a_{21}^{(2)}$ $a_{212}^{(3)}, \ldots$ Совокупность точек a, ∞, $g^{(n)}_{12\ldots l_n}$, $g^{(n)}_{21\ldots l_n}$, $a^{(n)}_{12\ldots l_n}$, $a^{(n)}_{21\ldots l_n}$, где верхний индекс указывает число нижних индексов, обозначим через M.

Будем предполагать, что точка a не совпадает с узлом пучка S окружностей, ортогональных к окружностям G_1 и G_2. Все точки совокупности M, кроме бесконечно удаленной точки и, может быть, точки $a_1^{(1)}$, лежат внутри G_1 и G_2. Отметим, что совокупность M инвариантна при отображениях около окружностей G_1 и G_2. Доказательство того, что все источники принадлежат совокупности M, основывается на следующем предложении.

Каждая точка областей G_1 или G_2, кроме узлов ζ_1 и ζ_2, может быть получена из некоторой точки области G или ее контура посредством конечного числа зеркальных отображений около окружностей кругов G_1 и G_2. Это становится очевидным, если рассмотреть образы этих точек в плоскости $\omega = \log[(z-\zeta_1)/(z-\zeta_2)]$ и сравнить их расстояния до полосы, являющейся образом области G в плоскости ω. Неоднозначность отображающей функции ω не имеет значения, так как все образы точки z в плоскости ω лежат на одном и том же расстоянии от этой полосы.

Рассмотрим не принадлежащую совокупности M точку p области G и симметричную с ней относительно окружности круга G_1 (или G_2) точку q. Точка p не может быть источником для функции $w(z)$, а точка q источником для функции $w_1(z)$ в силу физического смысле этих функций.

Принимая во внимание соотношения (3.1), убеждаемся, что точка p не может быть источником для какой бы то ни было из рассматриваемых функций. С помощью только что доказанного предложения это свойство обобщается на все точки плоскости, не принадлежащие совокупности M и не совпадающие с ζ_1 и ζ_2.

Поскольку известна счетная совокупность возможных особых точек функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ и $w(z)$ и известна природа этих точек (логарифмические точки ветвления), то самое решение можно искать по методу неопределенных коэффициентов в форме ряда функций логарифмического вида.

Предварительно отметим следующие предложения:

1) Точка a есть источник для $w_2(z)$ и $w(z)$ (и для $w_1(z)$ по условию)

2) Точка $a_1^{(1)}$ — источник для $w_1(z)$, но не для $w(z)$ и не для $w_2(z)$.

3) Точки $a_{12\ldots}^{(m)}$ $(m \geqslant 2)$ не являются источниками ни для одной из функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ и $w(z)$.

4) Точки $a_{21\ldots2}^{(2m-1)}$ $(m=1,2,3)$ являются источниками для $w_1(z)$ и $w(z)$, но не для $w_2(z)$.

5) Точки $a_{21\ldots1}^{(2m)}$ и точки $g_{(2m-1)}^{21\ldots1}$ являются источниками для $w_2(z)$ и $w(z)$, но не для $w_1(z)$.

6) Точки $g^{2m-1}_{21\ldots2}$ не являются источниками для функции $w_2(z)$.

Первое из этих предложений доказываем на основе § 3 для случая, когда точка, симметричная с a относительно круга G_1, не лежит внутри G_2, а потом освобождаемся от этого ограничения, пользуясь вышеуказанной возможностью перенести эту точку внутрь области G конечным числом зеркальных отображений. Остальные предложения доказываются аналогично.

Таким образом, на конечной части плоскости особыми точками для функции $w(z)$ могут быть все точки совокупности M, кроме точек $a_{12\ldots1}^{(2m-1)}$ для функции $w_1(z)$ — точки a, $a_1^{(1)}$, $a_{21\ldots2}^{(2m-1)}$, $g_{21\ldots2}^{(2m-1)}$, $g_{12\ldots2}^{(2m)}$, для функции $w_2(z)$ — точки a, $a_{21\ldots1}^{(2m)}$, $g_{12\ldots1}^{(2m-1)}$, $g_{21\ldots1}^{(2m)}$.

Будем искать решение в форме

$$w_1(z) = B^{(1)} + A^{(1)} \log(z-a) + A_1^{(1)} \log(z-a_1^{(1)}) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-1}^{(1)} \log(z - a_{21\ldots2}^{(2m-1)}) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m-1}^{(1)} \log(z - g_{21\ldots2}^{(2m-1)}) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m}^{(1)} \log(z - g_{12\ldots2}^{(2m)}) \tag{6.1}$$

$$w_2(z) = B^{(2)} + A^{(2)} \log(z-a) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}^{(2)} \log(z - a_{21\ldots1}^{(2m)}) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-1}^{(2)} \log(z - g_{12\ldots1}^{(2m-1)}) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m}^{(2)} \log(z - g_{21\ldots1}^{(2m)})$$

$$w(z) = B + A \log(z-a) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \log(z - a_{21\ldots}^{(m)}) + \sum_{m=1}^{m} B_m \log(z - g_{12\ldots}^{(m)}) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \log(z - g_{12\ldots}^{(m)})$$

Если написанные ряды сходятся равномерно, то функции $\overline{w_1(z^*)}$, $\overline{w_2(z^*)}$ и $\overline{w(z^*)}$ выражаются рядами такого же вида. Для того чтобы построенные ряды являлись решением задачи, необходимо, чтобы при подстановке их в функциональные уравнения (2.1) коэффициенты при членах, имеющих общую точку ветвления, сокращались. Из этого условия можно последовательно вычислить все коэффициенты построенных рядов, кроме $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ и B. Коэффициент $A^{(1)}$ отличается только множителем $-1/2\pi$ от дебита Q источника (скважины) в точке a.

При произвольных $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ и B функциональные уравнения (2.1) не удовлетворяются, но их левые части отличаются от правых на константы. При $B=0$ и при надлежащем выборе $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ эти константы обращаются в нуль и построенные ряды, при условии их равномерной сходимости, решают поставленную задачу. После преобразований получаем

$$w_1(z) = -\frac{Q}{2\pi} \Big\{ \log(z-a) + \lambda \log(z - a_1^{(1)}) - \tag{6.2}\\ -(1-\lambda_1)(1+\lambda_1) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k} [\log(z - a_{21\ldots2}^{(2k-1)}) - \log(z - g_{12\ldots2}^{(2k)})] \Big\} + B^{(1)}$$

$$w_2(z) = -\frac{Q}{2\pi} \Big\{ (1-\lambda_1)(1+\lambda_2) \log(z-a) + [\lambda_1 - \lambda_2(1-\lambda_1)] \log(z - g_1^{(1)}) + \\ + (1-\lambda_1)(1+\lambda_2) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^{k}\lambda_2^{k} [\log(z - a_{12\ldots1}^{(2k)}) + \log(z - g_{12\ldots1}^{(2k+1)})] \Big\} + B^{(2)}$$

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi}\Big\{(1-\lambda_1)\log(z-a) + \lambda_1(z-g_1^{(1)}) -$$

$$-(1-\lambda_1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k}\,[\log(z-a_{21\ldots2}^{(2k-1)}) - \log(z-g_{12\ldots2}^{(2k)}) -$$

$$-\lambda_1\log(z-a_{21\ldots1}^{(2k)}) + \lambda_1\log(z-g_{12\ldots1}^{(2k+1)})]\Big\}$$

где Q есть дебит скважины; $\lambda_1 = (c_1-c)/(c_1+c)$, $\lambda_2 = (c_2-c)/(c_2+c)$.

В вычислении $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ надобности нет. Очевидные неравенства $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$ обеспечивают абсолютную сходимость рядов в области, получаемой исключением из плоскости z точек множества M. Они же обеспечивают равномерную сходимость этих рядов во всякой замкнутой части этой области.

Полагая $c_2 = c$ в формулах (6.2), получаем тот частный случай задачи, когда второй круг G_2 отсутствует. Решение имеет вид

$$w_1(z) = -\frac{Q}{2\pi}\Big\{\log(z-a) + \lambda_1\log(z-a_1^{(1)})\Big\} + B^{(1)}$$

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi}\Big\{(1-\lambda_1)\log(z-a) + \lambda_1\log(z-g_1^{(1)})\Big\} \tag{6.3}$$

7. Случай, когда источник совпадает с центром круга. Если реальный источник a совпадает с центром круга G_1, то решение задачи не получается как частный случай из формул (6.2), так как формулы эти теряют смысл в силу того, что $a_1^{(1)} = \infty$. Но оно может быть получено тем же самым методом. Совокупность M в этом случае содержит точки ∞, $g_{12\ldots l_n}^{(n)}$, $g_{21\ldots l_n}^{(n)}$ Вместо формул (6.2) получаем следующие:

$$w_1(z) = -\frac{Q}{2\pi}\Big\{\log(z-g_1^{(1)}) +$$

$$+(1+\lambda_1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k}\,[\log(z-g_{21\ldots2}^{(2k-1)}) - \log(z-g_{12\ldots2}^{(2k)})]\Big\} + B^{(1)}$$

$$w_2(z) = -\frac{Q}{2\pi}(1+\lambda_2)\Big\{\log(z-g_1^{(1)}) - \tag{7.1}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k}\lambda_2^{k}\,[\log(z-g_{12\ldots1}^{(2k)}) - \log(z-g_{12\ldots1}^{(2k+1)})]\Big\} + B^{(2)}$$

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi}\Big\{\log(z-g_1^{(1)}) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k}\,[\log(z-g_{21\ldots2}^{(2k-1)}) -$$

$$-\log(z-g_{12\ldots2}^{(2k)}) - \lambda_1\log(z-g_{21\ldots1}^{(2k)}) + \lambda_1\log(z-g_{12\ldots1}^{(2k+1)})]\Big\}$$

Когда $c_2 = c$, получаем решение для круга с источником в центре.

Поступила в редакцию
20 III 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. Полубаринова-Кочина. О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. ДАН СССР. 1942. Т. XXXIV. № 2.
2. С. В. Фалькович. Некоторые случаи движения грунтовых вод. (Диссертация).
3. Н. В. Ламбин. Пластинка с отверстиями в плоско-параллельном магнитном поле. ПММ. 1940. Т. IV.