Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ЛИНИИ

П. И. Кузнецов

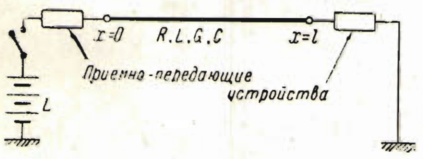
(Москва)

Распространению электромагнитных волн вдоль линий бесконечной и конечной длины с приемно-передающими устройствами посвящены известные работы В. Томсона[1], Кирхгофа[2], Пуанкаре [3], Пикара [4], Зоммерфельда [5], Ми [6] и других.

В последнее время (1936—1946) исследованием этого вопроса занимались Картер [7], Блондель [8,9], Коппенфельс [10], Течнер [11], Карслоу и Егер [12], Мальти и Голомб [13], Баярд [14], Коваленков [15] и другие. В этих работах решение задачи представляется посредством определенных интегралов, которые вычисляются приближенными методами.

Ниже, пользуясь функциями Ломмеля от двух мнимых аргументов [16,17], решение задачи представлено в замкнутом виде через функции Ломмеля и Бесселя.

1. Рассмотрим распространение электромагнитных волн вдоль однопроводной линии конечной длины с равномерно распределенными постоянными при условии, что к ее концам присоединены приемно-передающие устройства с источником постоянного тока на ближнем конце (фиг. 1). Эта задача приводится к решению системы уравнений



Фиг. 1.

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=RI+L\frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x}=GV+C\frac{\partial V}{\partial t} \tag{1.1}$$

в интервале $0<x<l$ для значений времени $t>0$ при начальных условиях

$$V(x, 0)=0, \quad I(x, 0)=0 \tag{1.2}$$

Граничные условия для линии, вообще говоря, могут быть различны и на основе законов Кирхгофа задаются системой линейных дифференциальных уравнений.

Здесь $V(x, t)$ и $I(x, t)$ обозначают напряжение и ток; распределенные постоянные R, L, C, G представляют собой соответственно сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость изоляции.

Для нахождения решения этой задачи воспользуемся преобразованием Лапласа [12,18]. Предполагая $\operatorname{Re}(\lambda)>0$, умножим уравнение (1.1) на $e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Принимая во внимание начальные условия (1.2), получим вспомогательную систему уравнений для $\overline{V}$ и $\overline{I}$

$$-\frac{d\overline{V}}{dx}=(R+\lambda L)\overline{I}, \qquad -\frac{d\overline{I}}{dx}=(G+\lambda C)\overline{V} \tag{1.3}$$

где

$$\overline{V}(x, \lambda)=\int_0^\infty V(x, t)e^{-\lambda t}dt, \qquad \overline{I}(x, \lambda)=\int_0^\infty I(x, t)e^{-\lambda t}dt$$

Применяя то же преобразование к дифференциальным уравнениям, описывающим граничные условия, будем иметь

$$z_1(\lambda)\,\overline{I}(0,\lambda)=\frac{1}{\lambda}-\overline{V}(0,\lambda),\qquad \left(\frac{1}{\lambda}=\int_0^\infty 1e^{-\lambda t}\,dt\right)$$
$$z_2(\lambda)\,\overline{I}(l,\lambda)=\overline{V}(l,\lambda) \tag{1.4}$$

где $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda)$ — импеданцы приемно-передающих устройств.

Решение системы уравнений (1.3) будет

$$\overline{V}=Ae^{-\mu x}+Be^{\mu x},$$
$$\overline{I}=\frac{1}{z}(Ae^{-\mu x}-Be^{\mu x})\qquad \left(\mu=\sqrt{(R+\lambda L)(G+\lambda C)},\quad z=\sqrt{\frac{R+\lambda L}{G+\lambda C}}\right) \tag{1.5}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Используя решение (1.5), из граничных условий (1.4) найдем

$$\frac{z_1}{z}(A-B)=\frac{1}{\lambda}-(A+B),\qquad \frac{z_2}{z}(Ae^{-\mu l}-Be^{\mu l})=Ae^{-\mu l}+Be^{\mu l}$$

Решая эти уравнения относительно A и B, получим

$$A=\frac{z}{\lambda\delta},\qquad B=\frac{\mu_2 z}{\lambda\delta}e^{-2\mu l} \tag{1.6}$$

где

$$\delta=(z+z_1)(1-\mu_1\mu_2e^{-2\mu l}),\qquad \mu_1=\frac{z_1-z}{z_1+z},\qquad \mu_2=\frac{z_2-z}{z_2+z}$$

Подставляя (1.6) в (1.5), будем иметь

$$\overline{V}=\frac{ze^{-\mu x}}{\lambda\delta}(1+\mu_2e^{-2\mu(l-x)}),\qquad \overline{I}=\frac{e^{-\mu x}}{\lambda\delta}(1-\mu_2e^{-2\mu(l-x)}) \tag{1.7}$$

Пользуясь теоремой обращения Лапласа, получим решение в виде

$$V(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{z(1+\mu_2e^{-2\mu(l-x)})}{\delta}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda}$$
$$I(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{(1-\mu_2e^{-2\mu(l-x)})}{\delta}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.8}$$

где a — постоянная, большая, чем действительная часть любой особенности функции $\overline{V}(x,\lambda)$ и $I(x,\lambda)$.

Легко убедиться, что интегралы (1.8) существуют, удовлетворяют уравнениям (1.1), начальным и граничным условиям, т. е. являются решением поставленной задачи [12,18].

Интегрирование по прямой $\mathrm{Re}(\lambda)=a$ можно заменить интегрированием по любому замкнутому контуру γ_1, расположенному в конечной части плоскости и содержащему все особые точки функции $\overline{V}(x,\lambda)$ и $\overline{I}(x,\lambda)$.

Для вычисления интегралов (1.8) мы используем метод суперпозиции [12]. Применяя разложение к δ^{-1} и подставляя его в (1.7), получим

$$\overline{V}=\frac{1}{\lambda}\frac{z}{z+z_1}(e^{-\mu x}+\mu_2 e^{-\mu(2l-x)}+\mu_1\mu_2 e^{-\mu(2l+x)}+\mu_1\mu_2^2 e^{-\mu(4l-x)}+\ldots)$$

$$\overline{I}=\frac{1}{\lambda}\frac{1}{z+z_1}(e^{-\mu x}-\mu_2 e^{-\mu(2l-x)}+\mu_1\mu_2 e^{-\mu(2l+x)}-\mu_1\mu_2^2 e^{-\mu(4l-x)}+\ldots)$$

По теореме обращения Лапласа решение задачи будет иметь вид

$$V(x,\ t)=V_0(x,\ t)+V_1(2l-x,\ t)+V_2(2l+x,\ t)+V_3(4l-x,\ t)+\ldots \tag{1.9}$$

$$I(x,\ t)=J_0(x,\ t)-J_1(2l-x,\ t)+J_2(2l+x,\ t)-J_3(4l-x,\ t)+\ldots \tag{1.10}$$

где

$$V_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{z}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad V_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{z\mu_2}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu(2l-x)}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

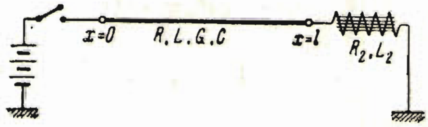
$$V_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{z\mu_1\mu_2}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu(2l+x)}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.11}$$

$$J_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{1}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad J_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\mu_2}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu(2l-x)}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\mu_1\mu_2}{z+z_1}e^{\lambda t-\mu(2l+x)}\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.12}$$

Эти интегралы, как показано в работах [16,17], могут быть выражены в замкнутом виде через функции Ломмеля и Бесселя.

В разложениях (1.9) и (1.10) для каждого момента времени t лишь конечное число его членов будет отличным от нуля; члены с четными индексами представляют собой прямые волны, распространяющиеся от ближнего к дальнему концу линии, члены с нечетными индексами — обратные волны. Скорость распространения фронта прямых и обратных волн одна и та же, она не зависит от приемно-передающих устройств, которые оказывают влияние на форму волн. Заметим, что для практики достаточно рассмотреть только два-три члена разложений (1.9) и (1.10). Изложенным методом задачу можно рассмотреть при других начальных условиях [12, 13].



Фиг. 2.

2. В качестве примера рассмотрим линию с электромагнитным приемником на дальнем конце [15] (фиг. 2). В этом случае $z_1=0$ и $z_2=R_2+\lambda L_2$ и, следовательно, $\mu_1=-1$ и решение согласно (1.9)—(1.12) будет иметь вид

$$\begin{aligned}V(x,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\mu_2 e^{\lambda t-\mu(2l-x)}\frac{d\lambda}{\lambda}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\mu_2 e^{\lambda t-\mu(2l+x)}\frac{d\lambda}{\lambda}-\ldots\\ I(x,t)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{1}{z}e^{\lambda t-\mu x}\frac{d\lambda}{\lambda}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\mu_2}{z}e^{\lambda t-\mu(2l-x)}\frac{d\lambda}{\lambda}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\mu_2}{z}e^{\lambda t-\mu(2l+x)}\frac{d\lambda}{\lambda}+\ldots\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пользуясь представлением интегралов, указанными в работах [16,17], получим

$$V_0(x,\,t)=e^{-\rho t}\,[I_0(\zeta_0)+\Upsilon_1(\eta_{10},\,\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{10},\zeta_0)+$$
$$+\Upsilon_1(\eta_{20},\,\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{20},\,\zeta_0)]\,H(t-\xi_0)$$

$$J_0(x,\,t)=\sqrt{\frac{G}{R}}\,e^{-\rho t}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,I_0(\zeta_0)+\Upsilon_1(\eta_{10},\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{10},\zeta_0)-\right. \tag{2.2}$$
$$\left.-\Upsilon_1(\eta_{20},\,\zeta_0)-\Upsilon_2(\eta_{20},\,\zeta_0)\right]H(t-\xi_0)$$

где $I_n(\zeta)$ и $\Upsilon_n(\eta,\,\zeta)$ — функции Бесселя и Ломмеля от мнимых аргументов,

$$\alpha=\frac{R}{2L},\qquad \rho=\alpha+\beta,\qquad m=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta},\qquad v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\beta=\frac{G}{2C},\qquad \sigma=\alpha-\beta,\qquad n=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta},\qquad \xi_0=\frac{x}{v},$$
$$\eta_{10}=m^2(t-\xi_0),\qquad H(t-\xi_0)=0\quad \text{при } t<\xi_0$$
$$\eta_{20}=n^2(t-\xi_0),\qquad H(t-\xi_0)=1\quad \text{при } t>\xi_0\qquad \zeta_0=\sigma\sqrt{t^2-\xi_0^2}$$

Тем же путем для интегралов $V_1(2l-x,\,t)$ и $J_1(2l-x,\,t)$ найдем

$$V_1(2l-x,\,t)=e^{-\rho t}\left[I_0(\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{11},\,\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{11},\,\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{21},\,\zeta_1)+\right.$$
$$\left.+\Upsilon_2(\eta_{21},\,\zeta_1)+\sum_{s=1}^{s=5}b_s\{\Upsilon_1(\eta_{s1},\,\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{s1},\,\zeta_1)\}\right]H(t-\xi_1)$$
$$J_1(2l-x,\,t)=\sqrt{\frac{G}{R}}\,e^{-\rho t}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,I_0(\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{11},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{11},\,\zeta_1)-\right. \tag{2.3}$$
$$\left.-\Upsilon_1(\eta_{21},\,\zeta_1)-\Upsilon_2(\eta_{21},\,\zeta_1)+\sum_{s=1}^{s=5}c_s\{\Upsilon_1(\eta_{s1},\,\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{s1},\,\zeta_1)\}\right]H(t-\xi_1)$$

Здесь

$$b_s=\frac{a_0}{u_s}(v_s^2-1)(1+v_s)\qquad\qquad u_s=\prod_{k=1}^{k=5}(v_s-v_k)\quad \text{при } s\neq k$$
$$c_s=\sqrt{\frac{R}{G}}\,\frac{a_0}{u_s}(v_s^2-1)(1-v_s)$$

$$a_0=\frac{4}{L_2\sigma}\sqrt{\frac{L}{C}},\qquad \xi_1=\frac{2l-x}{v},\qquad \eta_{s1}=\frac{\sigma}{v_s}(t-\xi_1),\qquad \zeta_1=\sigma\sqrt{t^2-\xi_1^2},$$

где $v_1=n/m$, $v_2=m/n$, а через v_3, v_4, v_5 обозначены корни кубического уравнения $v^3+a_1v^2+a_2v-1=0$, причем

$$a_1=\frac{2R_2}{L_2\sigma}-\frac{\sigma+2\rho}{\sigma}-\frac{2}{L_2\sigma}\sqrt{\frac{L}{C}},\qquad a_2=-\frac{2R_2}{L_2\sigma}+\frac{\sigma+2\rho}{\sigma}-\frac{2}{L_2\sigma}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Заметим, что мы предполагаем случай, когда корни этого уравнения действительны.

Интегралы $V_2(2l+x,\,t)$ и $J_2(2l+x,\,t)$ будут определяться также выражением (2.3); только вместо ξ_1 следует подставить $\xi_2=(2l+x)/v$. Аналогично вычисляются и следующие интегралы.

Подставляя найденные выражения интегралов в (1.9) и (1.10), получим

$$V(x, t)=e^{-\rho t}\left\{[I_0(\zeta_0)+\Upsilon_1(\eta_{10},\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{10},\zeta_0)+\Upsilon_1(\eta_{20},\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{20},\zeta_0)]H(t-\xi_0)+\right.$$

$$+\left[I_0(\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{11},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{11},\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{21},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{21},\zeta_1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{s=5}b_s\{\Upsilon_1(\eta_{s1},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{s1},\zeta_1)\}\right]H(t-\xi_1)-$$

$$-\left[I_0(\zeta_2)+\Upsilon_1(\eta_{12},\zeta_2)+\Upsilon_2(\eta_{12},\zeta_2)+\Upsilon_1(\eta_{22},\zeta_2)+\Upsilon_2(\eta_{22},\zeta_2)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{s=5}b_s\{\Upsilon_1(\eta_{s2},\zeta_2)+\Upsilon_2(\eta_{s2},\zeta_2)\}\right]H(t-\xi_2)-\ldots\right\}$$

$$J(x, t)=\sqrt{\frac{G}{R}}\,e^{-\rho t}\left\{\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,I_0(\zeta_0)+\Upsilon_1(\eta_{10},\zeta_0)+\Upsilon_2(\eta_{10},\zeta_0)-\right.\right.$$

$$\left.-\Upsilon_1(\eta_{20},\zeta_0)-\Upsilon_2(\eta_{20},\zeta_0)\right]H(t-\xi_0)-$$

$$-\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,I_0(\zeta_1)+\Upsilon_1(\eta_{11},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{11},\zeta_1)-\Upsilon_1(\eta_{21},\zeta_1)-\Upsilon_1(\eta_{21},\zeta_1)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{s=5}c_s\{\Upsilon_1(\eta_{s1},\zeta_1)+\Upsilon_2(\eta_{s1},\zeta_1)\}\right]H(t-\xi_1)-$$

$$-\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,I_0(\zeta_2)+\Upsilon_1(\eta_{12},\zeta_2)+\Upsilon_2(\eta_{12},\zeta_2)-\Upsilon_1(\eta_{22},\zeta_2)-\Upsilon_2(\eta_{22},\zeta_2)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^{s=5}c_s\{\Upsilon_1(\eta_{s2},\zeta_2)+\Upsilon_2(\eta_{s2},\zeta_2)\}\right]H(t-\xi_2)+\ldots\right\}$$

Было найдено решение задачи для случая, когда напряжение источника изменялось по закону

$$V(0, t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0\\ 1 & \text{при } t>0\end{cases}\tag{2.4}$$

Если напряжение источника изменяется по закону

$$V(0, t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0\\ 1 & \text{при } 0<t<\tau\\ 0 & \text{при } t>\tau\end{cases}$$

то решение будет

$$V(x, t+\tau)-V(x, t),\qquad J(x, t+\tau)-J(x, t)$$

Наконец, заметим, что, зная решение задачи для условия (2.4), мы можем найти решение путем применения интеграла Дюгамеля [19] для случая, когда напряжение источника меняется по закону $V(0, t)=f(t)$, где $f(t)$ кусочно непрерывная функция. Для случая источника переменного тока

$$V(0, t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0\\ e^{i(\varphi_0+\omega t)} & \text{при } t>0\end{cases}$$

то для него нет необходимости использовать интеграл Дюгамеля. Действительно, преобразование Лапласа для этого случая будет

$$\bar{V}(0, \lambda) = \frac{i\varphi_0}{\lambda - i\omega}$$

Эта функция отличается от рассмотренной $\bar{V}(0, \lambda) = 1/\lambda$ наличием множителя $e^{i\varphi_0}$ и тем, что полюс перемещается в точку $\lambda = i\omega$.

Следовательно, решение и в этом случае выражается также в замкнутом виде через функции Ломмеля и Бесселя.

Поступила в редакцию
29 IV 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson W. On the Theory of the Electric Telegraph. Proc. of the Royal Society of London. 1855. Vol. 7. P. 61.
2. Kirchhoff G. Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten. Annalen der Physik und Chemie. 1857. Bd. 100. Nr 2. S. 193—217.
3. Poincaré H. Sur la propagation de l'électricité. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. 1893. T. 117. P. 1027—1032.
4. Picard E. Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité. Bulletin de la Société mathématique. 1894. T. 22. P. 2—8.
5. Sommerfeld A. Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs Drähtes. Wiedemann's Annalen. 1899. Bd. 67. Nr 2. S. 233—290.
6. Mie G. Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. Annalen der Physik. 1900. Bd. 2. Nr. 2. S. 201—249.
7. Carter F. Note on Surges of Voltage and Current in Transmission Lines. Proc. of the R. Soc. of London. 1936. A. Vol. 156. P. 1—5.
8. Blondel A. Introduction aux applications du calcul symbolique de Heaviside aux problèmes de l'électrotechnique. Revue générale de l'électricité. 1936. T. 39. P. 83—99, 133—146, 179—192, 219—229.
9. Blondel A. L'évolution des méthodes de calcul des phénomènes transitoires. Revue générale de l'électricité. 1937. T. 41. P. 227—240, 259—271. 298—311, 327—340, 579—598.
10. Koppenfels W. Das Einschaltproblem für das homogene Kabel bei beliebiger Endschaltung. ZAMM. 1937. Bd. 17. S. 137—154.
11. Teszner S. Étude analytique sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les circuits homogènes. Revue générale de l'électricité. 1939. T. 45. P. 47—58, 87—95.
12. Carslaw H. and Jaeger J. Operational Methods in Applied Mathematics. 1941.
13. Malti M. and Golomb M. Electric Propagation on Long Lines Terminated by Lumped Networks. Journal of the Franklin Institute. 1943. Vol. 235. P. 41—73. 101—118.
14. Bayard M. Sur la propagation des ondes le long des lignes de transmission et sur le calcul de l'onde résultante après les réflexions successives aux extrémités. Bulletin de la Société Française des Électriciens. 6-me série. 1943. T. 3. Nr. 23. P. 98—106.
15. Коваленков В. И. Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий. 1945.
16. Кузнецов П. И. О представлении одного контурного интеграла. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
17. Кузнецов П. И. Функции Ломмеля от двух мнимых аргументов. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
18. Диткин В. А. Операционное исчисление. Успехи математических наук. 1947. Т. II.
19. Duhamel J. Sur la méthode générale relative au mouvement de la chaleur dans les corps solides plongés dans des milieux dont la température varie avec le temps. Journal d'École Royale Polytechnique. 1833. T. 14. P. 20—77.