Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

НАГРЕВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВРАЩАЮЩИМСЯ ДИСКОМ

И. А. Кибель

(Москва)

Со времен работ Кармана [1] и Кокрэна [2] известно, что уравнения стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=\frac{1}{\rho}\nabla p-\nu\,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{v},\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, имеют точные решения вида

$$v_r=rf(z),\qquad v_\theta=rg(z),\qquad v_z=h(z),\qquad p=p(z) \tag{2}$$

где v_r, v_θ и v_z — составляющие скоростей в цилиндрической системе координат r, θ, z, а f, g, h, p удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &f^2-g^2+h\frac{df}{dz}=\nu\frac{d^2f}{dz^2}, &\qquad 2fg+h\frac{dg}{dz}=\nu\frac{d^2g}{dz^2}\\ &h\frac{dh}{dz}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}-2\nu\frac{df}{dz}, &\qquad 2f+\frac{dh}{dz}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Это движение принято интерпретировать как движение, возникающее в вязкой жидкости в результате вращения вокруг оси z бесконечной плоскости $z=0$, приближенно — диска большого радиуса. При этом краевые условия для решения уравнений (3) будут

$$f(0)=0,\quad g(0)=\omega,\quad h(0)=0,\ f(\infty)=0,\quad g(\infty)=0,\quad p(0)=p_0$$

где ω — угловая скорость вращения «диска», p_0 — давление на поверхности «диска». Если взять краевые условия в виде

$$f(0)=0,\quad g(0)=0,\quad h(0)=0,\quad f(\infty)=0,\quad g(\infty)=\omega,\quad p(0)=p_0$$

как это делает Бёдевадт [3], можно говорить о торможении неподвижной плоскостью $z=0$ вязкой жидкости, вращающейся с угловой скоростью ω.

Насколько нам известно, в обеих этих задачах не затрагивался до сих пор вопрос о распределении температур. В этой заметке мы хотим доказать, что и для температур можно получить точное решение.

Для несжимаемой вязкой жидкости в случае движения стационарного и обладающего симметрией относительно оси z (ни один из элементов не зависит от угла θ) мы можем написать уравнение притока тепла в виде

$$\begin{gathered} c\rho\left(v_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right)+\\ +A\mu\left\{2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2+2\left(\frac{v_r}{r}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2\right\} \end{gathered} \tag{4}$$

где T — температура, c — теплоемкость, k — теплопроводность (считается постоянной), A—термический эквивалент работы. Легко видеть, что этому уравнению можно удовлетворить, если скорость взять попрежнему согласно (2), а температуру T искать в виде

$$T = T_1(z) + T_2(z) r^2 \tag{5}$$

где T_1 и T_2—функции одного z. Действительно, вставляя (5) и (2) в (4) и собирая члены при одинаковых r, мы получим

$$c\rho\left(2T_2 f + h\frac{dT_2}{dz}\right) = k\frac{d^2T_2}{dz^2} + \mu A\left[\left(\frac{df}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dz}\right)^2\right] \tag{6}$$

$$c\rho h\frac{dT_1}{dz} = k\left(\frac{d^2T_1}{dz^2} + 4T_2\right) + 2\mu A\left[2f^2 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right] \tag{7}$$

Краевые условия мы будем брать в одном из следующих двух видов: а) диск предоставлен сам себе так, что на поверхности его $\partial T / \partial z = 0$, тогда

$$\frac{dT_1}{dz} = \frac{dT_2}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \qquad T_1(\infty) = T_2(\infty) = 0 \tag{8}$$

(T_1 входит только под знак производной и определяется с точностью до постоянной температуры на бесконечности, которую мы принимаем равной нулю); б) диск поддерживается при постоянной температуре T_0, так что

$$T_1(0) = T_0, \quad T_2(0) = 0; \qquad T_1(\infty) = 0, \quad T_2(\infty) = 0 \tag{9}$$

Следуя предыдущим авторам, введем безразмерные величины F, G, H, ζ по формулам

$$f = \omega F, \qquad g = \omega G, \qquad h = \sqrt{\nu\omega}\, H, \qquad z = \sqrt{\nu / \omega}\, \zeta \tag{10}$$

Вместо T_1 и T_2 будем искать функции τ_1 и τ_2 такие, что

$$T_1(z) = A\frac{\mu\omega\nu}{k}\tau_1(\zeta), \qquad T_2(z) = A\frac{\mu\omega^2}{k}\tau_2(\zeta) \tag{11}$$

Уравнение (6) примет тогда вид

$$\frac{d^2\tau_2}{d\zeta^2} - P\left(H\frac{d\tau_2}{d\zeta} + 2F\tau_2\right) = -\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 - \left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2 \tag{12}$$

где $P = \mu c / k$—число Прандтля. Уравнение (6) дает

$$\frac{d^2\tau_1}{d\zeta} - PH\frac{d\tau_1}{d\zeta} = -4\tau_2 - 4F^2 - 2\left(\frac{dH}{d\zeta}\right)^2 \tag{13}$$

Рассмотрим сперва случай, когда число Прандтля $P = 1$. Задача решается в квадратурах, коль скоро H, G и F суть известные функции (что мы и предполагаем). Действительно, второе из уравнений (3) примет в безразмерных переменных вид

$$2FG + H\frac{dG}{d\zeta} = \frac{d^2G}{d\zeta^2} \tag{14}$$

Пусть $\tau_2 = Gm(\zeta)$, тогда (12) для $P = 1$ примет вид

$$\frac{d^2m}{d\zeta^2} + \left(\frac{2G'}{G} - H\right)\frac{dm}{d\zeta} = -\frac{1}{G}\left[\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2\right] \tag{15}$$

Уравнение это интегрируется и дает

$$m=\int_0^\zeta \frac{1}{G^2}\left(\exp\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\Big\{C_1- \tag{16}$$

$$-\int_0^\zeta G\exp\left(-\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\left[\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2+\left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2\right]d\zeta\Big\}\,d\zeta+C_2$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Таким образом,

$$\tau_2=G\int_0^\zeta \frac{1}{G^2}\exp\left(\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\Big\{C_1- \tag{17}$$

$$-\int_0^\zeta G\exp\left(-\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\left[\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2+\left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2\right]d\zeta\Big\}\,d\zeta+C_2G$$

После того как τ_2 определено, можно найти τ_1 из уравнения (13):

$$\tau_1=C_4+\int_0^\zeta \exp\left(\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\Big\{C_3-2\int_0^\zeta\Big[2\tau_2+2F^2+ \tag{18}$$

$$+\left(\frac{dH}{d\zeta}\right)^2\Big]\exp\left(-\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\Big\}\,d\zeta$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 должны быть определены из четырех условий

$$\frac{d\tau_1}{d\zeta}=\frac{d\tau_2}{d\zeta}=0 \quad \text{при} \quad \zeta=0, \qquad \tau_1(\infty)=\tau_2(\infty)=0 \tag{19}$$

или из четырех условий

$$\tau_1(0)=\tau_0, \quad \tau_2(0)=0; \qquad \tau_1(\infty)=\tau_2(\infty)=0 \tag{20}$$

В том случае, когда число Прандтля P отлично от единицы, приходится численно решать уравнения (12) и (13) наподобие того, как это делал Кокрэн для уравнений (3). Именно, для задачи «а» надо искать сперва τ_2 в виде ряда

$$\tau_2=t_0+t_2\zeta^2+t_3\zeta^3+\ \dots \tag{21}$$

в котором t_2, t_3 и т. д. все легко определяются через t_0. С другой стороны, асимптотическое представление для τ_2 будет

$$\tau_2=e^{-Pc\zeta}(M_0+M_1e^{-c\zeta}+M_2e^{-2c\zeta}+\ \dots)+N_1e^{-c\zeta}+Ne^{-2c\zeta}+\ \dots \tag{22}$$

причем все коэффициенты M_1, M_2, ..., N_1, N_2, ... определяются через M_0. Нам остается только сравнить в какой-то точке оба ряда (21) и (22) и производные от этих рядов, и мы получим два уравнения для определения t_0 и M_0. Определив τ_2, найдем τ_1 снова путем квадратур:

$$\tau_1=C+\int_0^\zeta \exp\left(P\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)\Big\{C'-2\int_0^\zeta\Big[2\tau_2+2F^2+$$

$$+\left(\frac{dH}{d\zeta}\right)^2\Big]\exp\left(-P\int_0^\zeta H\,d\zeta\right)d\zeta\Big\}\,d\zeta$$

где C и C' — произвольные постоянные, которые надо найти из условий (19)

Наконец, в случае задачи «б» разложение для τ_2 должно иметь вид $\tau_2 = \tau_2^* = \tau_0 + t_1\zeta + t_2\zeta^2 + \ldots$, где t_1 неизвестно, все же остальные коэффициенты $t_2, t_3, \ldots$ определятся через τ_0 и t_1. Асимптотическое разложение имеет снова вид (22) с неизвестным коэффициентом M_0; M и t найдутся путем сравнения двух рядов. Наконец, τ_1 определится квадратурами.

Для случая числа Прандтля $P = 1$ нами произведены подсчеты по формулам (17) и (18). При граничных условиях (19) убеждаемся, что

$$C_1 = \int_0^\infty G \exp\left(-\int_0^\zeta H\, d\zeta\right)(F'^2 + G'^2)\, d\zeta \approx 0.309, \qquad C_2 = \frac{C_1}{0.616} \approx 0.50164$$

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 4\int_0^\infty \exp\left(\int_0^\zeta H\, d\zeta\right)\left[\int_0^\zeta (\tau_2 + 3F^2)\exp\left(-\int_0^\zeta H\, d\zeta\right) d\zeta\right] d\zeta \approx 7.6$$

Соответствующие значения $\tau_1(\zeta)$ и $\tau_2(\zeta)$ приведены в таблице.

ζ	τ_1	τ_2	α	β	τ_2^*	ζ	τ_1	τ_2	α	β	τ_2^*
0.0	7.6000	0.5016	1.0000	0.0000	0.0000	1.8	4.7968	0.2105	0.3645	1.0492	0.0891
0.1	5896	5298	0.9602	1198	0588	1.9	5624	1957	3392	0325	0843
0.2	5580	5107	9204	2377	0703	2.0	3316	1810	3152	0114	0792
0.3	5052	4975	8808	3517	0867	2.1	1048	1679	2926	0.9866	0746
0.4	4316	4815	8413	4625	0993	2.2	3.8792	1560	2712	9590	0702
0.5	3376	4638	8021	5660	1086	2.3	6636	1438	2512	9291	0655
0.6	2232	4439	7589	6596	1148	2.4	4548	1329	2294	8975	0612
0.7	0892	4292	7248	7442	1187	2.5	2528	1228	2147	8643	0571
0.8	6.9372	4076	6870	8191	1262	2.6	0584	1135	1982	8300	0533
0.9	7680	3855	6499	8840	1262	2.8	2.6936	0970	1684	7615	0463
1.0	5836	3575	6136	9385	1228	3.0	3616	0807	1426	6933	0391
1.1	3860	3430	5784	9828	1227	3.2	0620	0698	1205	6267	0342
1.2	1772	3222	5441	1.0173	1195	3.4	1.7932	0586	1014	5637	0290
1.3	5.9592	3016	5110	0427	1155	3.6	5544	0501	0852	5050	0250
1.4	7360	2823	4771	0588	1112	3.8	3432	0424	0709	4510	0213
1.5	5056	2635	4486	0679	1065	4.0	1568	0356	0596	4011	0180
1.6	2716	2464	4192	0675	1019	4.2	0.9932	0296	0496	3558	0151
1.7	0360	2291	3908	0615	0967	4.4	8504	0247	0412	3150	0127

При граничных условиях (20) получим

$$C_1 \approx 0.309, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 \approx \frac{3.036 - \tau_0}{2.516}, \qquad C_4 = \tau_0$$

так что $\tau_1(\zeta) = \tau_1(0)\,\alpha(\zeta) + \beta(\zeta)$. Значения $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ и $\tau_2^*(\zeta)$ даны в таблице.

В заключение считаю долгом выразить благодарность А. С. Монину за проведенные вычисления.

Поступила в редакцию
6 XII 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Kármán Th. ZAMM. 1. 1921 (244—247).
2. Cochren W. G. The Flow Due to a Rotating Disk. Proced. of the Cambridge Phil. Soc. 1934. Vol. 30. (P. 365—375).
3. Bödewadt V. T. Die Drehströmung über festem Grunde. ZAMM. 1940.