

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАГРЕВЕ

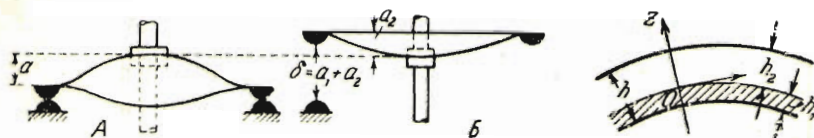
(К ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО ВЫКЛЮЧАТЕЛЯ)

Д. Ю. Панов

(Москва)

Работа теплового выключателя типа «Кликсон»<sup>1</sup> основана на явлении потери устойчивости при нагревании небольшой детали в виде тонкой биметаллической сферической оболочки малого подъема (фиг. 1). Если электрический ток, проходящий через выключатель, превышает допустимую величину, то биметаллическая оболочка нагревается настолько, что теряет устойчивость, выщелкиваясь вверх, и разрывает цепь тока, идущего через закрепленные на краях оболочки контакты. На фиг. 1 изображено положение (А) биметаллической оболочки до и после (Б) выщелкивания. При остывании биметаллическая оболочка либо сама собой выщелкивается обратно, либо в некоторых приборах включается нажатием кнопки. Исследование работы этого простого устройства и составляет содержание статьи.

**Биметаллическая оболочка.** Для исследования нам придется составить уравнения равновесия тонкой биметаллической оболочки, подвергающейся



Фиг. 1.

Фиг. 2.

нагреву, с учетом больших деформаций и решить их для конкретного случая сферической пологой оболочки.

Для этого мы воспользуемся классической теорией Лява [1], с той разницей, что в нашем построении роль срединной поверхности будет играть поверхность спая.

Мы полагаем, что погрешность от замены срединной поверхности весьма близкой к ней поверхностью спая будет лежать в пределах точности самой теории Лява.

Пусть  $h$  — толщина оболочки (фиг. 2), образованной двумя слоями толщиной  $h_1$  и  $h_2$  двух разных металлов с модулями Юнга  $E_1$  и  $E_2$  и коэффициентами Пуассона  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

<sup>1</sup> Выключатели «Кликсон» (Klixon) выпускает фирма Спенсер Термостат Компани (Spencer Thermostat Company, Attleboro, Mass. USA).

Возьмем начало координат на поверхности спая и направим ось  $z$  по нормали к ней так, как это указано на чертеже. Введем на поверхности спая ортогональную координатную сетку кривых  $\alpha = \text{const}$ ,  $\beta = \text{const}$  и направим ось  $x$  местной системы по касательной к кривой  $\beta = \text{const}$ , а ось  $y$  по касательной к кривой  $\alpha = \text{const}$ .

Будем считать, что справедливы основные соотношения, на которых Ляв строит свою теорию оболочек, но для поверхности спая, а не для срединной поверхности. Связь между удлинениями и деформациями будет даваться формулами (см. [1], стр. 556)

$$e_{xx} = \varepsilon_1 - z\kappa_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2 - z\kappa_2, \quad e_{xy} = \tilde{\omega} - 2z\tau$$

В этих формулах через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  обозначены удлинения и параметры изменения кривизны поверхности спая. Выражения  $e_{zx}$ ,  $e_{yz}$ ,  $e_{zz}$  нас в дальнейшем не интересуют.

При рассмотрении напряженного состояния элементарной призмы учтем нагревание оболочки. Используя обычные предположения и учитывая условия на поверхности, будем считать, что

$$X_z = Y_z = 0, \quad Z_z = 0$$

Для определения  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$  воспользуемся формулами Дюгамеля — Неймана (см. [1], стр. 119)

$$e_{xx} = \frac{1}{3}c\theta + \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)], \quad e_{yy} = \frac{1}{3}c\theta + \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(X_x + Z_z)] \quad (1.2)$$

где через  $c$  обозначен, как обычно, коэффициент кубического расширения, а через  $\theta$  — изменение температуры.

Подставляя сюда  $Z_z = 0$ , найдем

$$e_{xx} = \alpha\theta + \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y), \quad e_{yy} = \alpha\theta + \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x) \quad \left(\alpha = \frac{c}{3}\right) \quad (1.3)$$

Используя формулы (1.1) и (1.3), получим

$$\varepsilon_1 - z\kappa_1 = \alpha\theta + \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y), \quad \varepsilon_2 - z\kappa_2 = \alpha\theta + \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x) \quad (1.4)$$

Из этих уравнений находим

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} [\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 - z(\kappa_1 + \sigma\kappa_2)] - \frac{\alpha E}{1-\sigma} \theta$$

$$Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2} [\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1 - z(\kappa_2 + \sigma\kappa_1)] - \frac{\alpha E}{1-\sigma} \theta$$

Полученные формулы можно упростить, если положить

$$\frac{\alpha E}{1-\sigma} = \beta \quad (1.5)$$

Окончательно имеем

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} [\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 - z(\kappa_1 + \sigma\kappa_2)] - \beta\theta, \quad X_y = \frac{E}{2(1+\sigma)} (\tilde{\omega} - 2z\tau) \quad Z_z = 0$$

$$Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2} [\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1 - z(\kappa_2 + \sigma\kappa_1)] - \beta\theta, \quad Y_z = 0 \quad Z_x = 0 \quad (1.6)$$



Эти формулы имеют место и для первого и для второго металлов с соответственными значениями упругих и термоупругих констант.

Формулы для усилий и моментов будут

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h_1}^0 X_{x_1} dz + \int_0^{h_2} X_{x_2} dz, & G_1 &= \int_{-h_1}^0 z X_{x_1} dz + \int_0^{h_2} z X_{x_2} dz \\ T_2 &= \int_{-h_1}^0 Y_{y_1} dz + \int_0^{h_2} Y_{y_2} dz, & G_2 &= \int_{-h_1}^0 z Y_{y_1} dz + \int_0^{h_2} z Y_{y_2} dz \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь через  $X_{x_1}$ ,  $Y_{y_1}$  и  $X_{x_2}$ ,  $Y_{y_2}$  обозначены напряжения соответственно для первого и второго металлов. Усилия  $N_1$ ,  $N_2$  в принятых предположениях равны нулю, а  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  мы не вычисляем, так как имеем в виду решать лишь осесимметричную задачу.

Подставляя в формулы (1.7) выражения для  $X_x$  и  $Y_y$ , получим

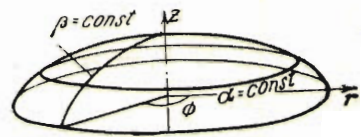
$$\begin{aligned} T_1 &= s_1 \varepsilon_1 + s_1^* \varepsilon_2 + d_2 x_1 + d_2^* x_2 - b_1 \theta, & G_1 &= -d_2 \varepsilon_1 - d_2^* \varepsilon_2 - s_3 x_1 - s_3^* x_2 + b_2 \theta \\ T_2 &= s_1 \varepsilon_2 + s_1^* \varepsilon_1 + d_4 x_2 + d_4^* x_1 - b_1 \theta, & G_2 &= -d_2 \varepsilon_2 - d_2^* \varepsilon_1 - s_3 x_2 - s_3^* x_1 + b_2 \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{E_1 h_1}{1 - \sigma_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1 - \sigma_2^2}, & d_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{E_1 h_1^2}{1 - \sigma_1^2} - \frac{E_2 h_2^2}{1 - \sigma_2^2} \right) \\ s_1^* &= \frac{\sigma_1 E_1 h_1}{1 - \sigma_1^2} + \frac{\sigma_2 E_2 h_2}{1 - \sigma_2^2}, & d_2^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1 E_1 h_1^2}{1 - \sigma_1^2} - \frac{\sigma_2 E_2 h_2^2}{1 - \sigma_2^2} \right) \\ s_3 &= \frac{1}{3} \left( \frac{E_1 h_1^3}{1 - \sigma_1^2} + \frac{E_2 h_2^3}{1 - \sigma_2^2} \right), & b_1 &= \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2, \\ s_3^* &= \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_1 E_1 h_1^3}{1 - \sigma_1^2} + \frac{\sigma_2 E_2 h_2^3}{1 - \sigma_2^2} \right), & b_2 &= \frac{1}{2} (\beta_1 h_1^2 + \beta_2 h_2^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения равновесия и граничные условия напишутся обычным образом.

**2. Биметаллическая оболочка вращения малого подъема.** Рассмотрим подробнее случай биметаллической оболочки вращения малого подъема. Примем ось вращения за ось  $z$  (фиг. 3), ось  $r$  направим по радиусу. Будем считать  $r$  за параметр  $\alpha$  и угол  $\Phi$  за параметр  $\beta$ . Обозначим через  $w$  перемещение по направлению оси  $z$  и через  $u$  — перемещение по оси  $r$ . Уравнения равновесия при отсутствии внешней нагрузки в этом случае имеют вид (см. [2])



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (rT_1) - T_2 &= 0, & \frac{d}{dr} (rG_1) - G_2 - rN_1 &= 0 \\ \frac{d}{dr} (rN_1) + r \frac{d^2 w}{dr^2} T_1 + \frac{dw}{dr} T_2 + k [f' T_2 + r]'' T_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Через  $kf(r)$  здесь обозначена функция, определяющая вид меридионального сечения. Для удлинений и параметров изменения кривизны имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - k j'' w, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r} - k \frac{f'}{r} w, \quad \chi_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (2.2)$$

Подставляя эти выражения в формулы (1.8) и сохраняя в формулах для  $G_1$  и  $G_2$  лишь главные члены, зависящие от  $x_1$  и  $x_2$ , получим

$$\begin{aligned} T_1 &= s_1 \left[ \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - kf''w \right] + s_1^* \left[ \frac{u}{r} - k \frac{f'}{r} w \right] + d_2 \frac{d^2w}{dr^2} + d_2^* \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - b_1 \theta \\ T_2 &= s_1 \left[ \frac{u}{r} - k \frac{f'}{r} w \right] + s_1^* \left[ \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - kf''w \right] + d_2 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + d_2^* \frac{d^2w}{dr^2} - b_1 \theta \\ G_1 &= -s_3 \frac{d^2w}{dr^2} - s_3^* \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + b_2 \theta, \quad G_2 = -s_3 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - s_3^* \frac{d^2w}{dr^2} + b_2 \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Преобразуя уравнения (2.4) так же, как это было сделано в работе [2], исключая  $N_1$ , вводя функцию напряжений  $\Phi$  посредством равенств

$$T_1 = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad T_2 = \frac{d^2\Phi}{dr^2} \quad (2.4)$$

и выражая  $G_1$  и  $G_2$  через  $w$  при помощи формул (2.3), найдем

$$s_3 A_1[w] - \frac{dw}{dr} \frac{d\Phi}{dr} - kf' \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.5)$$

Оператор  $A_1$  здесь имеет вид

$$A_1[w] = r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

Исключая  $du/dr$  из выражений для  $T_1$  и  $T_2$ , найдем

$$\begin{aligned} T_1 s_1^* - T_2 s_1 &= (s_1^{*2} - s_1^2) \left[ \frac{u}{r} - k \frac{f'}{r} w \right] + (d_2 s_1^* - d_2^* s_1) \frac{d^2w}{dr^2} + \\ &+ (d_2^* s_1^* - d_2 s_1) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - (s_1^* - s_1) b_1 \theta \end{aligned}$$

Определяя отсюда  $u$  и подставляя это выражение в формулу для  $T_1$ , найдем второе уравнение для определения функций  $w$  и  $\Phi$

$$\frac{s_1}{s_1^2 - s_1^{*2}} A_1[\Phi] - \frac{d_2^* s_1 - d_2 s_1^*}{s_1^2 - s_1^{*2}} A_1[w] + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + kf' \frac{dw}{dr} = 0 \quad (2.6)$$

Если в этих уравнениях положить

$$E_1 = E_2 = E, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad h_1 = h_2 = \frac{1}{2} \delta$$

то получим

$$s_1 = \frac{E\delta}{1-\sigma^2}, \quad s_1^* = \frac{\sigma E\delta}{1-\sigma^2}, \quad s_3 = \frac{E\delta^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad s_3^* = \frac{\sigma E\delta}{12(1-\sigma^2)}, \quad d_2 = d_2^* = 0$$

и уравнения (2.5) и (2.6) сведутся к соответствующим уравнениям, приведенным в нашей работе [2]. Для упрощения дальнейших выкладок приведем выведенные уравнения к безразмерному виду. Положим

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{R}, \quad \psi = -\frac{s_1}{s_1^2 - s_1^{*2}} T_1 \rho, \quad \lambda = \frac{R^2 (s_1^2 - s_1^{*2})}{s_1 s_3} \\ kf' &= \varphi_0 \rho, \quad \varphi = \frac{dw}{dr}, \quad \mu = \frac{d_2^* s_1 - d_2 s_1^*}{R (s_1^2 - s_1^{*2})} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} A[\psi] + \mu A[\varphi] &= \varphi (\varphi_0 \rho + \frac{1}{2} \varphi) & (A[*] = \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d[*]}{dr} \right] - \frac{1}{r} [*]) \\ A[\varphi] &= -\lambda \psi (\varphi_0 \rho + \varphi) \end{aligned} \quad (2.8)$$



Для случая сферы малого подъема  $\varphi_0 = \text{const}$ ; в этом случае уравнения (2.8) при  $\mu = 0$  совпадают с уравнениями, использованными В. И. Феодосьевым при решении задачи о хлопающей мембране [3].

Условие  $\mu = 0$  представляет некоторую аналогию «условию наибольшей чувствительности» Вилларсо в теории биметаллической полосы. Для случая  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  мы получаем  $\mu = 0$ , для  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , вообще говоря,  $\mu \neq 0$ , но специальным подбором первого и второго слоев металлов этого всегда можно достичь. В дальнейшем для упрощения выкладок будем считать, что такой подбор осуществлен, и полагать  $\mu = 0$ .

Граничные условия для функций  $\varphi$  и  $\psi$  напишутся из обычных соображений. При  $\rho = 0$  будем иметь  $\varphi = 0$  и ограниченность  $\psi$  и производных  $\varphi$  и  $\psi$  по  $\rho$ ; при  $\rho = 1$  будем иметь различные условия в зависимости от характера закрепления края. В рассматриваемом случае край будет свободным и граничные условия имеют вид

$$T_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad w = 0$$

Так как

$$\psi = -\frac{s_1}{s_1^2 - s_1^{*2}} T_1 \rho, \quad \varphi = \frac{dw}{d\rho}$$

то граничные условия при  $\rho = 1$  с учетом формул (2.3) будут

$$\psi = 0, \quad -s_3 \varphi' - s_3^* \varphi + b_2 R \theta = 0 \quad (2.9)$$

Таким образом, задача сводится окончательно к решению уравнений

$$A[\psi] = \varphi(\varphi_0 \rho + \frac{1}{2} \varphi), \quad A[\varphi] = -\lambda \psi(\varphi_0 \rho + \varphi) \quad (2.10)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad s_3 \varphi'(1) + s_3^* \varphi(1) = b_2 R \theta, \quad \psi(1) = 0 \quad (2.11)$$

и требованием, чтобы  $\psi(0)$  было ограниченным.

**3. Решение уравнений.** Рассмотрим сначала частный случай малых прогибов биметаллической круглой пластинки. В этом случае  $\varphi_0 = 0$  и мы получаем из (2.10) и (2.11), пренебрегая квадратичными членами и полагая  $\psi \approx 0$ :

$$A[\varphi] = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad s_3 \varphi'(1) + s_3^* \varphi(1) = b_2 R \theta$$

Интегрируя, находим

$$\varphi = \frac{R b_2}{s_3 + s_3^*} \theta \rho, \quad \text{откуда} \quad w = -\frac{b_2}{s_3 + s_3^*} (R^2 - r^2) \theta \quad (3.1)$$

Знак  $w$  будет определяться знаком  $b_2$ , который в свою очередь зависит от того, будет ли первый или второй металл иметь больший коэффициент расширения.

Полученное решение (3.1) нами будет использовано при построении решения уравнений (2.10). Мы будем решать эти уравнения методом Галеркина, примененным автором [4] и В. И. Феодосьевым [5] к решению ряда нелинейных задач теории упругости.

Граничные условия (2.11) неоднородны. В связи с этим мы будем искать решение по Галеркину в виде  $\varphi = C \varphi_1 + \varphi_2$ , где  $C$  — параметр, подлежащий определению,  $\varphi_1$  — функция, удовлетворяющая однородной задаче (при  $\theta = 0$ ).

а  $\varphi_2$  — частное решение неоднородной задачи, которое мы возьмем в виде (3.1). Таким образом, положим

$$\varphi = C(\rho^3 - \alpha\rho) + \tau\rho \quad \left( \tau = \frac{b_2 R \theta}{s_3 + s_3^*} \right) \quad (3.2)$$

Постоянную  $\alpha$  определяем так, чтобы функция  $\varphi_1 = \rho^3 - \alpha\rho$  удовлетворяла условию

$$s_3 \varphi_1'(1) + s_3^* \varphi_1(1) = 0$$

Это дает

$$s_3(3 - \alpha) + s_3^*(1 - \alpha) = 0, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{3s_3 + s_3^*}{s_3 + s_3^*} \quad (3.3)$$

Подставляя это выражение (3.2) в первое уравнение (2.10) и интегрируя его, найдем

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\tau}{8} \left( \varphi_0 + \frac{\tau}{2} \right) (\rho^3 - \rho) + \frac{C}{24} \left( \varphi_0 + \frac{\tau}{2} \right) (\rho^5 - 3\alpha\rho^3 - \alpha_2\rho) + \\ & + \frac{C^2}{96} (\rho^7 - 4\alpha\rho^5 + 6\alpha^2\rho^3 - \alpha_1\rho) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\alpha_1 = 1 - 4\alpha + 6\alpha^2, \quad \alpha_2 = 1 - 3\alpha \quad (3.5)$$

Выражение (3.4) для функции  $\psi$  при  $\tau = 0$  переходит в соответствующее выражение В. И. Феодосьева [3] для хлопающей мембраны (см. формулу (4)). Подставляя это выражение и выражение (3.2) для  $\varphi$  во второе уравнение (2.10), умножая его на  $\varphi_1$  и интегрируя от 0 до 1, найдем

$$a_1 C^3 + a_2 C^2 (\varphi_0 + \tau) + C [a_3 (\varphi_0 + \tau)^2 + a_4 / \lambda + a_5 \tau (\varphi_0 + \frac{1}{2} \tau)] = \tau (\varphi_0 + \frac{1}{2} \tau) (\varphi_0 + \tau) a_6 \quad (3.6)$$

В этом уравнении

$$\begin{aligned} a_1 = & \frac{1}{96} \left[ \left( \frac{1}{14} - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} \alpha^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4 \right) - \alpha_1 \left( \frac{1}{8} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \right] \\ a_2 = & \frac{1}{96} \left[ \left( \frac{5}{12} - \frac{5}{2} \alpha + \frac{19}{4} \alpha^2 - 3\alpha^3 \right) - \alpha_1 \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{4} \right) - \alpha_2 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \alpha + \alpha^2 \right) \right] \\ a_3 = & \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{1}{10} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \right) - \alpha_2 \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{4} \right) \right] \\ a_4 = & -2\alpha + \frac{4}{3}, \quad a_5 = -\frac{1}{32} \left( \frac{1}{10} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3} \right), \quad a_6 = \frac{1}{96} \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем величины  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  даются формулами (3.3) и (3.5). При  $\tau = 0$  уравнение (3.6) переходит в соответствующее уравнение (5) статьи Феодосьева [3] (в котором положено  $\nu = 0$  ввиду отсутствия внешнего давления). Чтобы получить уравнение, связывающее прогиб в центре с температурой, заметим, что прогиб в центре  $W$  дается формулой

$$W = -R \int_0^1 \varphi d\varphi = -\frac{R\tau}{2} - RC \left( \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} \left( 2 \frac{W}{R} + \tau \right) \quad (3.8)$$

Подставляя это выражение для  $C$  в уравнение (3.6), получим уравнение третьей степени относительно  $W$  и  $\tau$ , которое позволяет для каждого конкретного случая решить задачу об отыскании  $W$  для заданного  $\tau$ . Исследова-



ние этого уравнения в общем виде затруднительно ввиду громоздкости выражений его коэффициентов. Дальнейшее исследование мы проведем, приняв для коэффициентов уравнения (3.6) численные значения, соответствующие некоторым средним данным, характеризующим мембрану. Подставляя численные значения коэффициентов и приводя уравнение к нормальному виду

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (3.9)$$

получим

$$p = -0.675 \varphi_0^2 + 0.150 \varphi_0 \tau + 0.197 \tau^2 + 0.00021$$

$$q = 0.0007 \varphi_0^3 - 0.0506 \varphi_0^2 \tau - 0.0764 \varphi_0 \tau^2 - \\ - 0.0255 \tau^3 + 0.0000533 \varphi_0 + 0.0000267 \tau$$

причем

$$z = \frac{W}{R} - 0.254 \varphi_0 + 0.373 \tau \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно два частных случая.

а) *Пластинка*. В этом случае  $\varphi_0 = 0$  и мы получаем

$$p = 0.00021 + 0.197 \tau^2, \quad q = 0.0000267 \tau - 0.0255 \tau^3$$

$$z = \frac{W}{R} - 0.373 \tau.$$

Дискриминант  $\Delta = (p/3)^3 + (q/2)^2$  оказывается положительным при всех значениях  $\tau > 0$ . Это означает, что уравнение (3.9) имеет при всех  $\tau > 0$  лишь один действительный корень, или, иначе говоря, что характеристика пластины однозначна для  $\tau > 0$  и потеря устойчивости не имеет места. При  $\tau = 0$  имеем  $q = 0$ , т. е.  $z = 0$ . Так как, кроме того, при  $\tau = 0$  имеем  $z = W/R$ , то это означает, что при  $\tau = 0$  имеем  $W = 0$ , как и должно быть.

б) *Пологая сферическая оболочка*. При  $\varphi_0 \neq 0$  и  $\tau = 0$  будем иметь

$$p = -0.675 \varphi_0^2 + 0.00021, \quad q = 0.0007 \varphi_0^3 + 0.0000533 \varphi_0$$

Для малых  $\varphi_0$  имеем

$$p \approx 0.00021, \quad q \approx 0.0000533 \varphi_0, \quad z \approx -0.254 \varphi_0$$

При этом значении  $z$  и при  $\tau = 0$  формула (3.10), как и должно быть, дает  $W = 0$ .

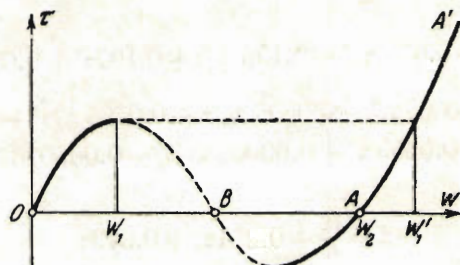
Для  $|\varphi_0| < 0.0176$  получаем  $p > 0$  и  $\Delta > 0$ ; таким образом, для этих значений  $\varphi_0$  уравнение (3.9) имеет при  $\tau = 0$  лишь одно решение, которое будет давать, как показано выше,  $W = 0$ . При  $|\varphi_0| > 0.0176$  будем иметь  $p < 0$ , а при  $|\varphi_0| > 0.0544$  получим  $\Delta < 0$ . Это означает, что при этих значениях  $\varphi_0$  возможны уже три формы равновесия (две устойчивые и одна неустойчивая). Одна из этих форм, как уже было указано, соответствует  $W = 0$ , другая дает новое решение в полном согласии с теорией хлопающей мембраны [3].

При малых  $\tau \neq 0$  описанная выше картина сохранится ввиду непрерывности коэффициентов как функций  $\tau$ . Однако легко видеть, что с ростом  $\tau$  три формы равновесия исчезнут и останется лишь одна. В самом деле,



знак  $p$  при достаточно большом  $\tau$  будет определяться знаком старшего члена; это означает, что, начиная с некоторого  $\tau$ , мы будем снова иметь  $p > 0$  и уравнение (3.9) будет иметь лишь один действительный корень.

Примерный вид характеристики теплового выключателя «Кликсон» изображен на фиг. 4. Буквами  $O$ ,  $A$  и  $B$  обозначены положения равновесия при отсутствии нагрева: из них  $O$  и  $A$  — устойчивые,  $B$  — неустойчивое. При нагреве прогиб увеличивается до некоторого критического значения  $W_1$ ,



Фиг. 4.

после чего скачком изменяется на  $W_1'$  и при дальнейшем нагреве остается на правой части характеристики  $AA'$ . При остывании до  $\tau = 0$  прогиб уменьшается до значения  $W_2 < W_1$  и мембрана в этом положении остается. Чтобы уничтожить этот прогиб, на мембрану следует надавить, приложить к ней некоторую силу. Эта картина качественно полностью соответствует тому, что мы наблюдаем при работе выключателя, количественные же расчеты, требующие кропотливой вычислительной работы, мы здесь не приводим.

Заметим, что при других значениях коэффициентов уравнения (3.6) можно получить случай возвращения мембраны в прежнее положение.

Поступила в редакцию  
23 X 1947

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости. ОНТИ. М.—Л. 1935.
2. П а н о в Д. Ю. О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 2 (303—318).
3. Ф е о д о с ь е в В. И. К расчету хлопающей мембраны. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 2 (296—300).
4. П а н о в Д. Ю. Применение метода акад. Б. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 2 (139—142).
5. Ф е о д о с ь е в В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофровкой. ПММ. 1945. Т. IX (389—412).