Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПАРАМИ И СЛУЧАИ ПАССИВНЫХ СВЯЗЕЙ

Ф. М. Диментберг

(Москва)

Определение хотя бы одного положения пространственного механизма, заданного размерами звеньев, является весьма сложной задачей. Вопросу о положениях пространственного механизма посвящены работы Г. Г. Баранова [1], Н. И. Мерцалова [11], В. В. Добровольского [5], [6], Д. С. Тавхелидзе [12] и другие.

В настоящей работе предлагается метод определения положений пространственных механизмов; при этом рассматривается четырехзвенный механизм с парами четвертого класса, допускающими вращение вокруг оси, совместное с поступательным движением вдоль оси; однако метод применим и к другим механизмам. Ставится задача: по заданным внутренним параметрам механизма (длинам звеньев, углам между осями) для произвольного значения угла поворота ведущего звена найти положения всех звеньев. Приводятся формулы, выражающие зависимость между углом поворота ведущего звена и винтовым перемещением (вращением и скольжением) в любом шарнире. Одновременно с этим даются необходимые и достаточные условия тождественного обращения в нуль некоторых перемещений, иными словами, наличия пассивных связей. Выполнение этих условий приводит к частным случаям механизмов, из коих некоторые будут рассмотрены.

Для вывода искомых зависимостей применяется векторный метод, но при этом как векторы, так и операции над ними рассматриваются как комплексные (дуальные).

Теория комплексных векторов (винтов) была разработана А. П. Котельниковым в 1895 г. в его известном сочинении [9]. Ниже предварительно приводятся некоторые основные положения этой теории и операции над комплексными векторами, которые понадобятся в дальнейшем [1].

§ 1. Основные операции. Совокупность вектора и момента, имеющего ту же ось, что и вектор, представляет собой винт, который можно символически выразить как сумму $\mathbf{u}+\omega\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — векторы, лежащие на одной оси, и ω — символ операции, преобразующей вектор в геометрически равный ему момент (операция Клиффорда). Так как указанная операция приводит к паре векторов, то повторное совершение той же операции дает «пару пар», т. е. нуль. Отсюда следует, что $\omega^2=0$. Поэтому для описания винтов используется теория «комплексных» чисел $a=a_0+\omega a_1$, где a_0 и a_1 — вещественные числа, а ω — единица, обладающая свойством $\omega^2=0$. Эти числа называются также дуальными. Число a_0 назовем главной или вещественной частью, число a_1 — моментной частью комплексного числа a. Обращение в нуль a возможно

[1] Для более подробного знакомства с этой теорией можно пользоваться, кроме [9], также книгой Д. Н. Зейлигера [7].

только при условии, что $a_0=0$ и $a_1=0$. Сложение и вычитание двух комплексных чисел не отличается от сложения и вычитания комплексных чисел с мнимой единицей. В силу свойства операции ω умножение и деление производятся по формулам

$$\begin{aligned} ab &= (a_0+\omega a_1)(b_0+\omega b_1) = a_0 b_0 + \omega (a_0 b_1 + a_1 b_0) \\ \frac{a}{b} &= \frac{a_0+\omega a_1}{b_0+\omega b_1} = \frac{a_0}{b_0} + \omega \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} \qquad (b_0 \neq 0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Представив числа a и b в виде

$$a = a_0\left(1+\omega \frac{a_1}{a_0}\right) \quad \text{и} \quad b = b_0\left(1+\omega\frac{b_1}{b_0}\right)$$

и назвав a_0 и b_0 модулями, а a_1/a_0 и b_1/b_0 параметрами чисел, получим, что при умножении и делении модули перемножаются (делятся), а параметры складываются (вычитаются).

Для возвышения в квадрат и извлечения корня имеем формулы

$$\begin{aligned} a^2 &= (a_0+\omega a_1)^2 = a_0^2 + 2\omega a_0 a_1 \\ \sqrt{a} &= \sqrt{a_0+\omega a_1} = \sqrt{a_0} + \omega \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \qquad (a_1 \neq 0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Можно показать, что любая функция комплексного числа имеет вид

$$f(a) = f(a_0+\omega a_1) = f(a_0) + \omega a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} \tag{1.3}$$

В частности, для комплексного угла между непересекающимися прямыми $\alpha=\alpha_0+\omega\alpha_1$, где α_0 — угол, а α_1 — кратчайшее расстояние между прямыми, имеем

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin\alpha_0 + \omega\alpha_1 \cos\alpha_0 \\ \cos\alpha &= \cos\alpha_0 - \omega\alpha_1 \sin\alpha_0 \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}\alpha_0 + \omega\frac{\alpha_1}{\cos^2\alpha_0} = \operatorname{tg}\alpha_0 + \omega\alpha_1(1+\operatorname{tg}^2\alpha_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Умножая единичный вектор на комплексное число, получаем винт, у которого главный вектор равен главной части числа, а параметр — параметру числа. Винт можно рассматривать как вектор с комплексным модулем.

Операции над комплексными векторами формально не отличаются от операций над обыкновенными векторами, однако имеют более сложную геометрическую интерпретацию. Для двух единичных скользящих векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ имеем[1]

Скалярное произведение

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 = \cos\alpha = \cos\alpha_0 - \omega\alpha_1\sin\alpha_0, \tag{1.5}$$

т. е. скалярное произведение равно комплексному числу, равному косинусу комплексного угла между векторами. Вещественная часть скалярного про-

[1] В дальнейшем мы будем оперировать исключительно со скользящими векторами, применяя для этого символы обыкновенных векторных операций.

изведения дает обычное скалярное произведение, а моментная часть — взаимный момент единичных векторов.

Скалярное произведение обращается в нуль, если векторы пересекаются под прямым углом. Для пересекающихся векторов скалярное произведение вещественно; если же векторы перпендикулярны, то вещественная часть скалярного произведения равна нулю.

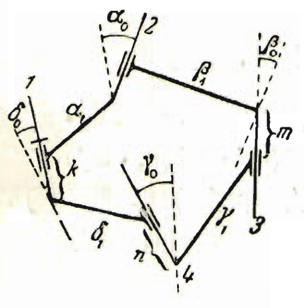
Векторное произведение представляет собой комплексный вектор, ось которого пересекает под прямым углом оси перемножаемых векторов, а модуль которого равен синусу комплексного угла между осями векторов

$$|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2| = \sin\alpha \tag{1.6}$$

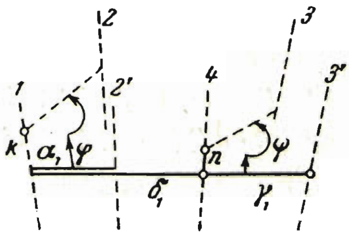
Векторное произведение обращается в нуль, если оси векторов сливаются. Если оси векторов параллельны, то векторное произведение вырождается в момент, т. е. в вектор с нулевой вещественной частью.

Подобным же образом получаются смешанное произведение, произведения двух векторных произведений и т. п.

§ 2. Четырехзвенный механизм. Обозначения показаны на чертеже (фиг. 1) В общем случае будем полагать, что все величины α_0, β_0, γ_0, δ_0, α_1, β_1, γ_1 и δ_1 отличны от нуля. В рассматриваемом четырехзвенном механизме в шар-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

нире *1* предположим вращательную пару, в остальных шарнирах — цилиндрические пары. Звено *1-2* будем считать ведущим[1]; угол поворота ведущего звена относительно звена *1-4* обозначим через $\varphi = \varphi_0 + \omega k$, угол поворота звена *4-3* относительно звена *1-4* — через $\psi = \psi_0 + \omega n$ и угол поворота звена *3-2* относительно звена *3-4* — через $\chi = \chi_0 + \omega m$. Найдем зависимость между φ и ψ, а затем между φ и χ.

Зависимость между φ *и* ψ. Удалим временно звено *2-3*, а остальные звенья расположим в одну линию, как показано на фиг. 2.

Образуем произвольное положение механизма следующим путем: вращаем звено *1-2* вокруг оси *1* на произвольный угол φ_0 и сообщаем ему поступательное перемещение вдоль этой же оси на величину k (которую считаем известной), что равносильно комплексному повороту $\varphi = \varphi_0 + \omega k$;

[1] Звеном будем называть отрезок между осями смежных шарниров по линии кратчайшего расстояния.

звено *4-3* вращаем вокруг оси *4* на комплексный угол $\psi = \psi_0 + \omega n$. После поворота необходимо удовлетворить условию, чтобы комплексный угол между осями *2* и *3* был равен $\beta = \beta_0 + \omega\beta_1$. Это дает соотношение между φ и ψ. Считая k величиной постоянной при любом φ_0, мы тем самым осуществляем чисто вращательное перемещение на оси *1*; движение же на оси *4* будет, вообще говоря, винтовым.

После поворота единичные векторы $\mathbf{u}_2'$ и $\mathbf{u}_3'$ осей перейдут в $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$. Для того чтобы выразить новые положения $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$, введем комплексные векторы конечных поворотов

$$\mathbf{u}_1\Phi, \qquad \mathbf{u}_4\Psi,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \omega\Phi_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \omega\tfrac{1}{2}k(1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi_0) = \Phi_0 + \omega\tfrac{1}{2}k(1+\Phi_0^2)\\ \Psi &= \Psi_0 + \omega\Psi_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Psi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Psi_0 + \omega\tfrac{1}{2}n(1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\Psi_0) = \Psi_0 + \omega\tfrac{1}{2}n(1+\Psi_0^2)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Новые положения $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$ выразятся с помощью комплексной формулы конечного поворота[1] следующим образом:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{1+\Phi^2}\left[(1-\Phi^2)\,\mathbf{u}_2' + 2(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2')\,\mathbf{u}_1\Phi^2 + 2(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2')\,\Phi\right] \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{1+\Psi^2}\left[(1-\Psi^2)\,\mathbf{u}_3' + 2(\mathbf{u}_4\cdot\mathbf{u}_3')\,\mathbf{u}_4\Psi^2 + 2(\mathbf{u}_4\times\mathbf{u}_3')\,\Psi\right] \tag{2.3}$$

Перемножив скалярно равенства (2.2) и (2.3), получим соотношение

$$\begin{aligned}(1+\Psi^2)(1+\Phi^2)\,\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3 &= (1-\Phi^2)(1-\Psi^2)\,\mathbf{u}_2'\cdot\mathbf{u}_3' + 2(1-\Psi^2)\,\Phi^2(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2')(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_3') +\\ &+ 2\Phi(1-\Psi^2)\,\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2'\mathbf{u}_3' + 2(1-\Phi^2)\,\Psi^2(\mathbf{u}_2'\cdot\mathbf{u}_4)(\mathbf{u}_4\cdot\mathbf{u}_3') +\\ &+ 4\Phi^2\Psi^2(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2')(\mathbf{u}_4\cdot\mathbf{u}_3')(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_4) + 4\Phi\Psi^2(\mathbf{u}_4\cdot\mathbf{u}_3')(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2'\mathbf{u}_4) + 2(1-\Phi^2)\,\Psi\mathbf{u}_2'\mathbf{u}_4\mathbf{u}_3' +\\ &+ 4\Phi^2\Psi(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_4\mathbf{u}_3') + 4\Phi\Psi(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2')(\mathbf{u}_4\times\mathbf{u}_3')\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2' &= \cos\alpha, & \mathbf{u}_2'\cdot\mathbf{u}_4 &= \cos(\delta-\alpha),\\ \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3 &= \cos\beta, & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_3' &= \cos(\delta+\gamma)\\ \mathbf{u}_4\cdot\mathbf{u}_3' &= \cos\gamma, & \mathbf{u}_2'\cdot\mathbf{u}_3' &= \cos(\delta-\alpha+\gamma)\\ \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_4 &= \cos\delta, & &\end{aligned}$$

а также то, что все скалярно-векторные произведения троек векторов равны нулю (все векторы пересекаются общим перпендикуляром), получим комплексное квадратное уравнение

$$\begin{aligned}\{[\cos(\delta-\alpha-\gamma) - \cos\beta] + [\cos(\delta+\alpha-\gamma) - \cos\beta]\,\Phi^2\}\,\Psi^2 + 4\sin\alpha\sin\gamma\,\Phi\,\Psi +\\ + [\cos(\delta-\alpha+\gamma) - \cos\beta] + [\cos(\delta+\alpha+\gamma) - \cos\beta]\,\Phi^2 = 0\end{aligned} \tag{2.4}$$

или сокращенно

$$(a + A\Phi^2)\,\Psi^2 + b\Phi\Psi + (c + C\Phi^2) = 0 \tag{2.5}$$

---

[1] Формула конечного поворота дана в работе Л. Г. Лойцянского[10]. Справедливость этой формулы в комплексном виде для винтового движения вытекает из теории А. П. Котельникова; подробное доказательство дано С. Г. Кислицыным[8].

где

$$a = a_0 + \omega a_1 = [\cos(\delta_0 - \alpha_0 - \gamma_0) - \cos\beta_0] + \\ + \omega[-(\delta_1 - \alpha_1 - \gamma_1)\sin(\delta_0 - \alpha_0 - \gamma_0) + \beta_1 \sin\beta_0]$$

$$A = A_0 + \omega A_1 = [\cos(\delta_0 + \alpha_0 - \gamma_0) - \cos\beta_0] + \\ + \omega[-(\delta_1 + \alpha_1 - \gamma_1)\sin(\delta_0 + \alpha_0 - \gamma_0) + \beta_1 \sin\beta_0]$$

$$b = b_0 + \omega b_1 = 4\sin\alpha_0 \sin\gamma_0 + 4\omega(\alpha_1 \cos\alpha_0 \sin\gamma_0 + \gamma_1 \sin\alpha_0 \cos\gamma_0) \tag{2.6}$$

$$c = c_0 + \omega c_1 = [\cos(\delta_0 - \alpha_0 + \gamma_0) - \cos\beta_0] + \\ + \omega[-(\delta_1 - \alpha_1 + \gamma_1)\sin(\delta_0 - \alpha_0 + \gamma_0) + \beta_1 \sin\beta_0]$$

$$C = C_0 + \omega C_1 = [\cos(\delta_0 + \alpha_0 + \gamma_0) - \cos\beta_0] + \\ + \omega[-(\delta_1 + \alpha_1 + \gamma_1)\sin(\delta_0 + \alpha_0 + \gamma_0) + \beta_1 \sin\beta_0]$$

Разделение вещественной и моментной частей в уравнении (2.5) дает два уравнения

$$(a_0 + A_0\Phi_0^2)\Psi_0^2 + b_0\Phi_0\Psi_0 + (c_0 + C_0\Phi^2) = 0 \tag{2.7}$$

$$[2(a_0 + A_0\Phi_0^2)\Psi_0 + b_0]\Psi_1 + (a_1 + A_0 k\Phi_0 + A_1\Phi_0^2 + A_0 k\Phi_0^3)\Psi_0^2 + \\ + (\tfrac{1}{2}kb_0 + b_1\Phi_0 + \tfrac{1}{2}kb_0\Phi_0^2)\Psi_0 + c_1 + C_0 k\Phi_0 + C_1\Phi_0^2 + C_0 k\Phi_0^3 = 0 \tag{2.8}$$

откуда получаются вещественная и моментная части Ψ

$$\Psi_0 = \frac{-b_0\Phi_0 \pm \sqrt{b_0^2\Phi_0^2 - 4(a_0 + A_0\Phi_0^2)(c_0 + C_0\Phi_0^2)}}{2(a_0 + A_0\Phi^2)} \tag{2.9}$$

$$\Psi_1 = \frac{-1}{2(a_0 + A_0\Phi_0^2)\Psi_0 + b_0\Phi_0}[(a_1 + A_0 k\Phi + A_1\Phi_0^2 + A_0 k\Phi_0^3)\Psi_0^2 + \\ + (\tfrac{1}{2}b_0 k + b_1\Phi_0 + \tfrac{1}{2}b_0 k\Phi_0^2)\Psi_0 + c_1 + C_0 k\Phi_0 + C_1\Phi_0^2 + C_0 k\Phi^3] \tag{2.10}$$

Угол поворота и поступательное перемещение звена *4-3* выразятся на основании (2.1)

$$\psi_0 = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\Psi_0, \qquad n = \frac{2\Psi_1}{1 + \Psi_0^2} \tag{2.11}$$

Формулы (2.9), (2.10) и (2.11) решают задачу о нахождении угла ψ_0 и перемещения n, определяющих положение звена *4-3*, по заданному углу φ поворота ведущего звена *1-2*. Отметим, что в полученном решении искомые величины выражены только через внутренние параметры механизма и угол поворота ведущего звена. Величины, которые характеризовали бы какое-либо начальное положение механизма, здесь отсутствуют.

Для известного механизма Беннета, являющегося частным случаем рассматриваемого четырехзвенника, имеем соотношения

$$\alpha_0 = \gamma_0, \quad \beta_0 = \delta_0, \quad \alpha_1 = \gamma_1, \quad \beta_1 = \delta_1, \quad \alpha_1 : \sin\alpha_0 = \beta_1 : \sin\beta_0$$

вследствие чего уравнение (2.4) получает вид

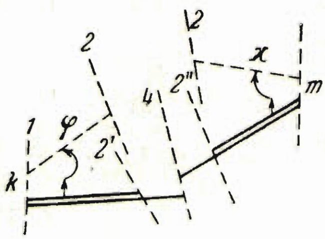
$$\sin(\beta - \alpha)\Psi^2 + 2\sin\alpha\Phi\Psi - \sin(\beta + \alpha)\Phi^2 = 0$$

в котором Φ и Ψ вещественны, так как в шарнирах происходит чистое вращение, а кроме того $k = n = 0$.

Решение уравнения[1] приводит к известной формуле

$$\Psi = \operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2} = \frac{\sin\alpha_0 \pm \sin\beta_0}{\sin(\alpha_0 - \beta_0)}\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}$$

Рассматривая комплексное уравнение (2.5) и его вещественную часть (2.7), видим, что они формально сходны; это вытекает из общего свойства (1.3). Механический смысл этого свойства в данном случае следующий. Если положить $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$ в формулах (2.6), то механизм обратится в сферический (все оси проходят через одну точку), уравнение же (2.5) совпадет с его вещественной частью (2.7). Следовательно, вещественная часть уравнения (2.5) описывает такой сферический механизм, который имеет с заданным пространственным механизмом одинаковое направление осей в пространстве. Обратно, если в уравнении, относящемся к сферическому механизму, коэффициенты считать комплексными, то уравнение будет описывать общий пространственный механизм.



Фиг. 3.

Необходимо указать, что идея рассмотрения вспомогательного сферического механизма или, иначе, построения «сферического отображения» с целью изучения основного пространственного механизма принадлежит В. В. Добровольскому, который решил этим методом ряд кинематических задач [5], [6].

При применении комплексного векторного метода А. П. Котельникова интерпретация сферического отображения механизма выявляется сама собой как следствие указанного выше свойства вещественной части функции комплексных величин вида $a_0 + \omega a_1$.

Зависимость между φ *и* χ. Для определения зависимости между φ и χ разъединим механизм в шарнире *2* и приведем искомые углы к нулю, совместив оси звеньев *1-2* с *1-4* и *3-2* с *3-4* (фиг. 3). Затем вращаем звено *1-2* вокруг оси *1* на комплексный угол $\varphi = \varphi_0 + \omega k$, а звено *3-2* — вокруг оси *3* на комплексный угол $\chi = \chi_0 + \omega m$, соблюдая при этом условие, чтобы единичные векторы $\mathbf{u}_2'$ и $\mathbf{u}_2''$ осей *2'* и *2''* после поворота имели один и тот же комплексный угол с осью *4*. Если это условие выполнено, то, уже не изменяя φ и χ, можно указанные оси совместить путем винтового движения в шарнире *4*, и оба единичных вектора $\mathbf{u}_2'$ и $\mathbf{u}_2''$ перейдут в один и тот же вектор $\mathbf{u}_2$.

Введя комплексные векторы конечного поворота $\mathbf{u}_1\Phi$ и $\mathbf{u}_3\mathrm{X}$, где

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \omega\Phi_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \omega\tfrac{1}{2}k\left(1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi_0\right) = \Phi_0 + \omega\tfrac{1}{2}k\left(1 + \Phi_0^2\right)\\ \mathrm{X} &= \mathrm{X}_0 + \omega\mathrm{X}_1 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\chi = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\chi_0 + \omega\tfrac{1}{2}m\left(1 + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\chi_0\right) = \mathrm{X}_0 + \omega\tfrac{1}{2}m\left(1 + \mathrm{X}_0^2\right)\end{aligned} \tag{2.12}$$

выражаем дважды новое положение

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{1+\Phi^2}\left[(1-\Phi^2)\mathbf{u}_2' + 2(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2')\mathbf{u}_1\Phi^2 + 2(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2')\Phi\right]\\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{1+\mathrm{X}^2}\left[(1-\mathrm{X}^2)\mathbf{u}_2'' + 2(\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_2'')\mathbf{u}_3\mathrm{X}^2 + 2(\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_2'')\mathrm{X}\right]\end{aligned} \tag{2.13}$$

[1] Аналогичное уравнение приведено в статье [4].

Умножим скалярно оба равенства на $\mathbf{u}_4$, а затем, принимая во внимание, что

$$\mathbf{u}_2' \cdot \mathbf{u}_4 = \cos(\delta - \alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 = \cos\delta, \qquad \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_4 = 0$$

$$\mathbf{u}_2'' \cdot \mathbf{u}_4 = \cos(\gamma - \beta), \qquad \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 = \cos\gamma,$$

и исключая $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_4$, получаем комплексное уравнение между Φ и X

$$\begin{gathered}\{[\cos(\beta+\gamma) - \cos(\delta-\alpha)] + [\cos(\beta+\gamma) - \cos(\delta+\alpha)]\,\Phi^2\}\,\Psi^2 + \\ + [\cos(\beta-\gamma) - \cos(\delta-\alpha)] + [\cos(\beta-\gamma) - \cos(\delta+\alpha)]\,\Phi^2 = 0\end{gathered} \tag{2.14}$$

или сокращенно

$$(p + P\Phi^2)\,X^2 + (q + Q\Phi^2) = 0 \tag{2.15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
p = p_0 + \omega p_1 &= [\cos(\beta_0+\gamma_0) - \cos(\delta_0-\alpha_0)] + \\
&\quad + \omega\,[-(\beta_1+\gamma_1)\sin(\beta_0+\gamma_0) + (\delta_1-\alpha_1)\sin(\delta_0-\alpha_0)] \\
P = P_0 + \omega P_1 &= [\cos(\beta_0+\gamma_0) - \cos(\delta_0+\alpha_0)] + \\
&\quad + \omega\,[-(\beta_1+\gamma_1)\sin(\beta_0+\gamma_0) + (\delta_1+\alpha_1)\sin(\delta_0+\alpha_0)] \\
q = q_0 + \omega q_1 &= [\cos(\beta_0-\gamma_0) - \cos(\delta_0-\alpha_0)] + \\
&\quad + \omega\,[-(\beta_1-\gamma_1)\sin(\beta_0-\gamma_0) + (\delta_1-\alpha_1)\sin(\delta_0-\alpha_0)] \\
Q = Q_0 + \omega Q_1 &= [\cos(\beta_0-\gamma_0) - \cos(\delta_0+\alpha_0)] + \\
&\quad + \omega\,[-(\beta_1-\gamma_1)\sin(\beta_0-\gamma_0) + (\delta_1+\alpha_1)\sin(\delta_0+\alpha_0)]
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Разделение вещественной и моментной частей в уравнении (2.15) дает два уравнения

$$(p_0 + P_0\Phi_0^2)\,X_0^2 + (q_0 + Q_0\Phi_0^2) = 0 \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}2\,[p_0 + P_0\Phi_0^2)\,X_0X_1 + (p_1 + kP_0\Phi_0 + P_1\Phi_0^2 + kP_0\Phi_0^3)\,X_0 + \\ + q_1 + kQ_0\Phi_0 + Q_1\Phi_0^2 + kQ_0\Phi_0^3 = 0\end{gathered} \tag{2.18}$$

откуда легко получаются вещественная и моментная части решения. Искомый угол χ выражается через внутренние параметры механизма и угол поворота φ ведущего звена.

§ 3. Пассивные связи. Большой интерес представляют случаи, когда в шарнирах некоторые перемещения (в частности, поступательные) тождественно, т. е. для любого положения механизма, обращаются в нуль. Вопрос о пассивных связях рассматривался в работах Н. Г. Бруевича и С. С. Бюшгенса[1].

На основании уравнений (2.4) и (2.14) мы покажем, как выражаются в общем виде условия существования пассивных связей в отдельных шар-

---

[1] Н. Г. Бруевич [2] сформулировал общее условие для существования пассивной связи. Это условие сводится к следующему: механизм имеет пассивные связи в том случае, если какое-нибудь из уравнений скоростей, соответствующее мгновенному состоянию, обращается в тождество для любого промежутка времени или, что то же, для любого положения механизма. На основании этого условия в работе [2] разобраны случаи пассивных связей некоторых частных механизмов. Использование принципа Н. Г. Бруевича в общем случае требует перехода от одного положения механизма к другому и зависит от разрешения проблемы о конечных перемещениях.

С. С. Бюшгенс [3] исследовал четырехзвенный механизм с пассивными связями в трех цилиндрических шарнирах и показал, что он может быть либо сферическим, либо плоским, либо механизмом Беннета. Случаев, когда пассивные связи имеются только в одном или двух шарнирах, он не рассматривал.

нирах четырехзвенника и рассмотрим некоторые частные случаи. Эти условия вытекают из требований, накладываемых непосредственно на перемещения.

Сначала рассмотрим случай пересекающихся попарно звеньев, т. е. когда $k=n=0$ или $k=m=0$.

Условие чистого вращения в шарнирах *4* и *1* при этом сведется к условию наличия вещественного решения уравнения (2.4) с комплексными коэффициентами. Полагая Φ и Ψ вещественными и равными Φ_0 и Ψ_0, имеем после отделения вещественной от моментной части

$$\begin{aligned}(a_0+A_0\Phi_0^2)\Psi_0^2+b_0\Phi_0\Psi_0+(c_0+C_0\Phi_0^2)=0\\(a_1+A_1\Phi_0^2)\Psi_0^2+b_1\Phi_0\Psi_0+(c_1+C_1\Phi_0^2)=0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Для того чтобы Ψ_0 одновременно удовлетворяло обоим уравнениям (3.1), результант этих уравнений должен быть тождественно равен нулю

$$\begin{vmatrix}a_0+A_0\Phi_0^2 & b_0\Phi_0\\ a_1+A_1\Phi_0^2 & b_1\Phi_0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_0\Phi_0 & c_0+C_0\Phi_0^2\\ b_1\Phi_0 & c_1+C_1\Phi_0^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_0+A_0\Phi_0^2 & c_0+C_0\Phi_0^2\\ a_1+A_1\Phi_0^2 & c_1+C_1\Phi_0^2\end{vmatrix}^2\equiv 0\tag{3.2}$$

Отсюда получаются все необходимые и достаточные условия возможности введения пассивной связи в шарнир *4* (при этом не ставятся никакие условия относительно шарниров *2* и *3*!).

Приведем краткий результат разбора возможных случаев выполнения этих условий. Если $a_0=A_0=a_1=A_1=0$ или $c_0=C_0=c_1=C_1=0$, то либо $\alpha_0=0$ и $\alpha_1=0$, либо $a_0=\beta_0, \delta_0=\gamma_0$ и $\alpha_1=\beta_1$ и $\delta_1=\gamma_1$; механизм вырождается в трехзвенник или парный двухзвенник.

Если предположить, что все величины a_1, A_1, b_0, b_1, c_1 и C_1 отличны от нуля, то, развернув левую часть (3.2) в полином относительно Φ_0, можно получить следующий ряд независимых тождественных соотношений, которым должен удовлетворять механизм:

$$a_0b_1-a_1b_0=0\,,\qquad b_0c_1-b_1c_0=0\,,\qquad A_0b_1-A_1b_0=0\,,\qquad b_1C_0-b_0C_1=0\tag{3.3}$$

Подставив вместо величин, входящих в левые части, их значения из (2.6), получим, что при указанном предположении механизм сводится к вырожденному или плоскому.

Если $A_0=A_1=0$, а остальные величины отличны от нуля, то имеем условия

$$a_0b_1-a_1b_0=0,\qquad b_0c_1=b_1c_0=0,\qquad a_0C_1-a_1C_0=0\tag{3.4}$$

что приводит снова к вырожденному механизму.

Наконец, если $A_0=A_1=c_0=c_1=0$, то $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, а из (3.2) имеем условие для пассивной связи

$$(a_0b_1-a_1b_0)(b_0C_1-b_1C_0)-(a_0C_1-a_1C_0)^2=0\tag{3.5}$$

Подставляя вместо a_0, a_1, b_0, b_1, C_0 и C_1 их значения из (2.6), получим соотношение

$$\beta_1:\sin\beta_0=\alpha_1:\sin\alpha_0\tag{3.6}$$

Это дает известный механизм Беннета.

Условие наличия одновременного чистого вращения в шарнирах *1* и *3* получится, если положить в уравнении (2.14) вещественными Φ и X и равными Φ_0 и X_0. Отделяя вещественную часть от моментной, получим два уравнения, которым должно удовлетворять X_0:

$$(p_0+P_0\Phi_0^2)\,X_0^2+(q_0+Q_0\Phi_0^2)=0\,, \qquad (p_1+P_1\Phi_0^2)\,X_0^2+(q_1+Q_1\Phi_0^2)=0 \quad (3.7)$$

Отсюда, приравняв результант уравнений тождественно нулю, получим

$$\begin{vmatrix} p_0+P_0\Phi_0^2 & q_0+Q_0\Phi_0^2 \\ p_1+P_1\Phi_0^2 & q_1+Q_1\Phi_0^2 \end{vmatrix}\equiv 0 \qquad (3.8)$$

что дает следующие необходимые и достаточные соотношения

$$p_0q_1-p_1q_0=0\,, \qquad P_0Q_1-P_1Q_0=0\,, \qquad P_0-q_1P_1q_0+p_0Q_1-p_1Q_0=0 \quad (3.9)$$

Третье из этих соотношений удовлетворяется тождественно, а первые два после подстановки вместо величин p_0, q_0, p_1, q_1, P_0, Q_0, P_1 и Q_1 их значений из (2.16) дают соотношения звеньев

$$\frac{\sin\beta_0\sin\gamma_0}{\sin\alpha_0\sin\delta_0}=\frac{\beta_1\cos\beta_0\sin\gamma_0+\gamma_1\cos\gamma_0\sin\beta_0}{\alpha_1\cos\alpha_0\sin\delta_0+\delta_1\cos\delta_0\sin\alpha_0}$$

$$\frac{\sin\beta_0\sin\gamma_0}{\sin\alpha_0\sin\delta_0}=\frac{\beta_1\sin\gamma_0\cos\gamma_0+\gamma_1\sin\beta_0\cos\beta_0}{\alpha_1\sin\delta_0\cos\delta_0+\delta_1\sin\alpha_0\cos\alpha_0}$$

по которым можно построить механизм, допускающий введение одной пассивной связи в шарнир *3*.

Для случая, когда смежные звенья не пересекаются, т. е. когда k, n и m отличны от нуля, условия существования пассивной связи в шарнирах *4* и *3* получаются следующим образом. Полагая в уравнении (2.5) $\Psi=\Psi_0+\omega\frac{1}{2}n(1+\Psi_0^2)$, получим, разделяя вещественную и моментную части

$$(a_0+A_0\Phi_0^2)\,\Psi_0^2+b_0\Phi_0\Psi_0+(c_0+C_0\Phi_0^2)=0 \qquad (3.10)$$

$$\begin{aligned}(a_0+A_0\Phi_0^2)\,n\Psi_0^3&+(\tfrac{1}{2}b_0n+a_1+kA_0\Phi_0+A_1\Phi_0^2+kA_0\Phi_0^3)\,\Psi_0^2+\\&+[\tfrac{1}{2}b_0k+a_0n+b_1\Phi_0+(\tfrac{1}{2}b_0k+nA_0)\,\Phi_0^2]\,\Psi_0+\\&+(\tfrac{1}{2}b_0n+c_1+C_0k\Phi_0+C_1\Phi_0^2+C_0k\Phi_0^3)=0 \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Для выполнения условия наличия чистого вращения в шарнире *4* необходимо положить, что, наряду с постоянством k, постоянно также n, а следовательно, Ψ_0 должно удовлетворять одновременно двум уравнениям (3.10) и (3.11). Приравняв результант этих уравнений тождественно нулю, находим все необходимые и достаточные условия для введения пассивной связи в шарнир *4*. Этот случай пока не исследован до конца.

Полагая далее в уравнении (2.14) $X=X_0+\omega\frac{1}{2}m(1+X_0^2)$, получим после разделения вещественной и моментной части

$$(p_0+P_0\Phi_0^2)X_0^2+(q_0+Q_0\Phi_0^2)=0 \qquad (3.12)$$

$$\begin{aligned}(p_0+P_0\Phi_0^2)\,mX_0^3&+(p_1+kP_0\Phi_0+P_1\Phi_0^2+kP_0\Phi_0^3)\,X_0^2+\\&+(p_0+P_0\Phi^2)\;mX_0\;+(q_1+kQ_0\Phi_0+Q_1\Phi_0^2+kQ_0\Phi_0^3)=0 \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Для выполнения условия чистого вращения в шарнире *3* следует считать постоянными одновременно k и m, а следовательно, X_0 должно удовлетворять одновременно уравнениям (3.12) и (3.13). Приравняв результант этих уравнений тождественно нулю, получим после упрощения необходимое и достаточное условие возможности введения пассивной связи в шарнир 3

$$\begin{vmatrix} p_1+P_1\Phi_0^2+ & (p_0-q_0)\,m+ \\ +(P_0-p_0)\,k\Phi_0 & +(P_0-Q_0)\,m\Phi_0^2 \\ p_0+P_0\Phi_0^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (p_0-q_0)\,m+ & q_1+Q_1\Phi_0^2+ \\ +(P_0-Q_0)\,m\Phi_0^2 & +(Q_0-q_0)\,k\Phi_0 \\ 0 & q_0+Q_0\Phi_0^2 \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} p_1+P_1\Phi_0^2+ & q_1+Q_1\Phi_0^2+ \\ +(P_0-p_0)\,k\Phi_0 & +(Q_0-q_0)\,k\Phi_0^2 \\ p_0+P_0\Phi_0^2 & q_0+Q_0\Phi_0^2 \end{vmatrix}^2 \equiv 0 \qquad (3.14)$$

Развернув левую часть (3.14) в полином относительно Φ_0 и приравняв все его коэффициенты нулю, получим, во-первых, что либо $P_0=q_0=P_1=q_1=0$, либо $p_0=Q_0=p_1=Q_1=0$, откуда

$$\alpha_0=\gamma_0, \quad \beta_0=\delta_0 \qquad \alpha_1=\gamma_1, \quad \beta_1=\delta_1$$

а, во-вторых, получим равенство

$$(p_0-q_0)(Q_0-P_0)\,m^2+4k^2\sin^2\alpha_0\sin^2\beta_0=0$$

или

$$(m^2-k^2)\sin^2\alpha_0\sin^2\beta_0=0, \quad \text{т. е.} \quad m=\pm k$$

что представляет единственный случай возможности введения пассивной связи в шарнир 3 при $k\neq 0$ и $m\neq 0$.

Поступила в редакцию
1 X 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов Г.Г. Кинематика пространственных механизмов. Труды Военной воздушной Академии имени Жуковского. 1937. № 18.
2. Бруевич Н. Г. Кинетостатика пространственных механизмов. Труды Военной воздушной академии им. Жуковского. 1937. № 22.
3. Бюшгенс С. С. Механизм Беннета—Верховского. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.
4. Диментберг Ф. М., Шор Я. Б. Механизм Беннета. ПММ. 1940, Т. IV. Вып. 3.
5. Добровольский В. В. Сферическое изображение пространственных четырехзвенников. Труды семинара по теории машин и механизмов. Академия Наук СССР. 1947. Т. II. Вып. 7.
6. Добровольский В. В. Методы сферических изображений в теории пространственых механизмов. Труды семинара по теории машин и механизмов. Академия Наук СССР. 1947. Т. III. Вып. 11.
7. Зейлигер Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. ГТТИ. 1934.
8. Кислицын С. Г. Винтовые аффиноры и некоторые их приложения к вопросам кинематики твердого тела. Ученые записки Ленинградского гос. педагогического института им. А. А. Герцена. 1938. Т. X.
9. Котельников А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань. 1895.
10. Лойцянский Л. Г. Об одной формуле к теории конечного вращения. Известия Ленинградского политехнического института. 1925. Т. XXX.
11. Мерцалов Н. И. Построение последовательных положений звеньев пространственного семизвенного шарнирного механизма (семизвенника). Известия ОТН АН СССР. 1940. №9.
12. Тавхелидзе Д. С. К вопросу о существовании кривошипа и двух кривошипов в пространственных механизмах. Труды семинара по теории машин и механизмов. Академия Наук СССР. 1947. Т. III. Вып. 9.