Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ОБЗОРЫ

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК
(ОБЗОР РАБОТ ОПУБЛИКОВАННЫХ В СССР)

А. Л. Гольденвейзер (Москва), **А. И. Лурье** (Ленинград)

Теории тонких упругих оболочек было посвящено в продолжение последних пятнадцати лет значительное число работ советских ученых. В этой большой области можно различить три направления исследований: во-первых, следует указать на работы по построению технической теории оболочек, примыкающие по своим методам к области строительной механики; далее идет значительная по объему группа работ, в которых задача теории оболочек рассматривается как задача теории упругости; различие между этими группами работ можно видеть еще в том, что если в первой из них построение решений ведется на основе тех или иных приемлемых при требуемой точности гипотез, то вторая отличается стремлением дать решение, основанное на точном или приближенном интегрировании дифференциальных уравнений теории упругости. Наконец, особняком в смысле постановки задачи и методов решения ее стоят вопросы устойчивости равновесия и вопросы колебаний оболочек.

Обзор посвящен исключительно работам второго из упомянутых выше направлений, так как с ними связаны интересы авторов обзора; в целях краткости будем условно называть это направление математической теорией упругих оболочек. Первое и третье направления были представлены также значительным числом работ, имеющих большое техническое и научное значение, однако включение их в этот обзор чрезмерно увеличило бы его объем и пошло бы в ущерб целостности изложения.

В развитии математической теории оболочек можно теперь уже наметить несколько этапов: во-первых, шла речь об установлении основных дифференциальных уравнений теории оболочек, для чего пришлось в некоторых направлениях дополнить классическую теорию Лява и перенести в рассмотрение этой задачи теории упругости современные средства дифференциальной геометрии. Во-вторых, разрабатывался вопрос о сведении трехмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче теории оболочек; известно, что это можно сделать ценой некоторых пренебрежений, и целью исследования было выяснение их характера. Это же в последующем дало руководящую нить в рассмотрении третьей, наиболее важной и трудной задачи — задачи интегрирования. Очевидно, что результаты решения должны претендовать лишь на точность, адэкватную точности самих уравнений. Это позволяет заменить трудную задачу интегрирования полной системы уравнений задачей о разыскании интегралов определенных видов, из которых в практических расчетах наибольшее значение имеют безмоментное состояние и состояние, известное под наименованием «краевой эффект». Помимо этих результатов качественного исследования системы дифференциальных уравнений теории оболочек, в обзоре уделяется внимание задачам интегрирования уравнений для частных случаев оболочек той или иной геометрической формы, которым также было посвящено значительное число советских исследований.

В тех случаях, когда не сделано оговорок, употребляемые обозначения совпадают с обозначениями, принятыми Лявом, которые можно считать общеизвестными.

1. Приведение трехмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче теории тонких оболочек

1. Как уже указано, важной задачей теории упругих оболочек является получение основных дифференциальных уравнений этой теории из общих соотношений теории упругости для трехразмерного тела.

Для круговой цилиндрической оболочки эта задача была рассмотрена Б. Г. Галеркиным [1]. Автор задается выражениями для перемещений любой точки цилиндра в виде

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z\left(1 + \frac{z}{a}\right)\frac{\partial w}{\partial x}, \quad V(x, y, z) = v(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad W(x, y, z) = w(x, y) \tag{1.1.1}$$

Здесь x, $y = a\vartheta$ — координаты точки на срединной поверхности цилиндра, z — расстояние точки от этой поверхности; u, v, w — перемещения точки срединной поверхности по оси цилиндра, по параллельному кругу и по нормали к поверхности цилиндра.

Используя (1.1.1) и считая напряжение σ_z малым по сравнению с σ_x и σ_y, Б. Г. Галеркин составляет выражения для σ_x, σ_y, σ_{xy}, которые подставляются в уравнения статики, записанные в соответствующих координатах; из этих трех уравнений первого порядка τ_{xy}, τ_{yz}, σ_z находятся путем интегрирования, причем постоянные определяются по заданным значениям указанных напряжений на внутренней поверхности цилиндра; выражая, что эти напряжения на внешней поверхности цилиндра также должны иметь заданные значения, определяемые нагрузкой, Б. Г. Галеркин получает три дифференциальных уравнения для перемещений u, v, w. Этим уравнениям можно удовлетворить, выразив u, v, w через одну функцию φ, удовлетворяющую уравнению в частных производных восьмого порядка.

Б. Г. Галеркин считает, что предложенная им система уравнений пригодна для исследования напряженного состояния в толстых цилиндрических оболочках. Он сообщает, что были разработаны три варианта теории (отличающиеся, повидимому, заданием исходных выражений для перемещений). Описанный выше вариант был применен к расчету круговой арки, нагруженной по внешней поверхности равномерно распределенной нагрузкой; при отношении толщины к радиусу, равном 1/5, погрешность в напряжениях по сравнению с точным решением оказалась не превосходящей 13%.

В исследовании [2] рассматривается оболочка произвольной формы; выражения для оставляющих перемещения в произвольной точке тела берутся в соответствии с известными кинематическими гипотезами Кирхгофа—Лява в форме

$$U = u\left(1 - \frac{z}{R_1}\right) - \frac{z}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \qquad V = v\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) - \frac{z}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}, \qquad W = w(\alpha, \beta) \tag{1.1.2}$$

В частности, для круговой цилиндрической оболочки вместе (1.1.1) получается

$$U = u(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad V = v(x, y)\left(1 - \frac{z}{a}\right) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad W = w(x, y) \tag{1.1.3}$$

т. е. принимаемые Б. Г. Галеркиным выражения для перемещений не соответствуют указанным гипотезам.

В дальнейшем проводится для общего случая вычисление, которое описано выше. Интегрирование уравнений статики оказывается выполнимым в конечном виде, и в результате получается система трех дифференциальных уравнений для перемещений u, v, w, удовлетворяющая всем условиям статики (в объеме и на поверхности), но, конечно, в известной мере противоречащая зависимостям Бельтрами-Митчелля. Полученная этим путем система дифференциальных уравнений, в частности, для цилиндрической оболочки, несколько отличается от уравнений Б. Г. Галеркина. Для нее также можно подобрать функцию напряжений.

2. Уравнения статики оболочек, выраженные через усилия и моменты, равно как и выражения величин, характеризующих деформацию срединной поверхности через перемещения точек этой поверхности, конечно, являются вполне строгими соотношениями. Наиболее трудным вопросом теории оболочек является установление формул, связывающих величины первой и второй групп — усилия и моменты, с одной стороны, и деформации срединной поверхности — с другой. Кинематические гипотезы Лява или другие более или менее произвольно задаваемые зависимости перемещений точек оболочек от перемещений точек ее срединной поверхности, например, (1.1.1) в случае цилиндрической оболочки, дают формальное решение этой задачи. Остается открытым вопрос о степени точности гипотез этого рода.

В работе [3] рассмотрена частная задача о равновесии упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. Дается решение в сферических координатах задачи теории упругости для тела, ограниченного двумя концентрическими сферами $r=a$, $r=b$ и двумя конусами $\vartheta=\alpha$, $\vartheta=\beta$. Наиболее важным моментом является выделение класса решений уравнений теории упругости, оставляющих поверхности сфер $r=a$, $r=b$ свободными от нагрузок. Очевидно, что наложение решений этого класса позволит удовлетворить приближенно или точно условиям на краях оболочки $\vartheta=\mathrm{const}$, тогда как построение решений, удовлетворяющих заданным условиям нагрузки на поверхностях сфер $r=a$, $r=b$, представляет задачу, решение которой достаточно хорошо исследовано в работах по равновесию полой сферы [4].

Решение указанной выше задачи дается следующими формулами: пусть $\lambda=a/b$, $\alpha=(n+\frac{1}{2})^2$. Рассмотрим комплексные корни трансцендентного уравнения

$$\left(\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{\lambda-\lambda^{-1}}\right)^2=\alpha\,\frac{\alpha^2-\frac{5}{2}\alpha+\frac{73}{16}-4\sigma^2}{\alpha^2+\alpha\left[4\,(1-\sigma^2)-\frac{5}{2}\right]+\frac{9}{16}} \tag{1.2.1}$$

Тогда для каждого из этих корней имеем выражения для перемещений

$$\begin{aligned} u_r=&-b\,\frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{r}{b}\right)^{-3/2}\mathrm{Re}\left\{\left(r_1+\frac{r^2}{a^2}r_5\right)\mathrm{ch}\,q+\left(r_2+\frac{r^2}{a^2}r_6\right)\mathrm{sh}\,q+\right.\\ &\left.+\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{1-\lambda^2}\left[\left(r_3+\frac{r^2}{b^2}r_7\right)\mathrm{ch}\,p+\left(r_4+\frac{r^2}{b^2}r_8\right)\mathrm{sh}\,p\right]\right\}T_n(\vartheta)\\ u_\vartheta=&-b\,\frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{r}{b}\right)^{-3/2}\mathrm{Re}\left\{\left(\vartheta_1+\frac{r^2}{a^2}\vartheta_5\right)\mathrm{ch}\,q+\left(\vartheta_2+\frac{r^2}{a^2}\vartheta_6\right)\mathrm{sh}\,q+\right.\\ &\left.+\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{1-\lambda^2}\left[\left(\vartheta_3+\frac{r^2}{b^2}\vartheta_7\right)\mathrm{ch}\,p+\left(\vartheta_4+\frac{r^2}{b^2}\vartheta_8\right)\mathrm{sh}\,p\right]\right\}\frac{dT_n}{d\vartheta}\\ &\left(p=\sqrt{\alpha}\log\frac{r}{b},\quad q=\sqrt{\alpha}\log\frac{r}{b}\right) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Здесь T_n — функция, определяемая дифференциальным уравнением Лежандра (с комплексным индексом)

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dT_n}{d\vartheta}\right)+n\,(n+1)\,T_n=0 \tag{1.2.3}$$

а постоянные $r_1,\ldots,r_8$, $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_8$ выражаются через α (этих выражений вследствие их громоздкости не приводим).

Для оболочки весьма малой толщины, путем введения параметра $k^2=h/r_0$, где $h=a-b$, $r_0=\frac{1}{2}(a+b)$, строится решение трансцендентного уравнения (1.2.1) в форме ряда

$$\alpha=\frac{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}{k^2}\,i\left\{1-\frac{1}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\left[\frac{5}{4}-\frac{6}{5}(1-\sigma^2)\right]ik^2+\ldots\right\}=\frac{A}{k^2} \tag{1.2.4}$$

Решения (1.2.2) в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} u_r&=r_0\,\mathrm{Re}\,T_n(\vartheta)\\ u_\vartheta&=\frac{1}{2}k^2r_0\,\mathrm{Re}\,T_n'(\vartheta)\left[\frac{2(1+\sigma)}{A}-x\right] \end{aligned}\qquad\left(x=\frac{2}{h}(r-r_0)\right) \tag{1.2.5}$$

Соответствующие напряжения определяются следующими формулами

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{3}{2} Ek^2 (x^2-1) \operatorname{Re} T_n(\vartheta) \left(\frac{1}{6}x - \frac{1+\sigma}{A}\right) \\
\tau_{r\vartheta} &= \frac{3}{2} Ek^2 (x^2-1) \operatorname{Re} \frac{1}{A} T_n'(\vartheta) \\
\sigma_\vartheta &= \frac{Ex}{2(1-\sigma^2)} \operatorname{Re} A T_n(\vartheta) - Ek^2 \operatorname{Re} \frac{1}{A} T_n'(\vartheta) \left(1 - \frac{Ax}{2(1+\sigma)}\right) \operatorname{ctg} \vartheta \\
\sigma_\varphi &= \frac{E\sigma x}{2(1-\sigma^2)} \operatorname{Re} A T_n(\vartheta) + E \operatorname{Re} T_n(\vartheta) + \\
&\qquad + Ek^2 \operatorname{Re} \frac{1}{A} T_n'(\vartheta) \left(1 - \frac{Ax}{2(1+\sigma)}\right) \operatorname{ctg} \vartheta
\end{aligned}
\qquad (1.2.6)
$$

Эти же выражения в случае сферической оболочки можно получить, если исходить из решения уравнений теории тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа, удерживая в разложениях по степеням h/r_0 для этих решений лишь главные члены. С другой стороны, удержание в решениях теории Лява членов порядка h/r_0 нерационально, так как результаты этого вычисления отличаются от результатов разложения точного решения (1.2.2) в ряд по степеням того же параметра. Этим, по крайней мере для сферической оболочки, доказана возможность использования гипотез Кирхгофа и нецелесообразность разыскания точных решений дифференциальных уравнений, выведенных на основании этих гипотез. Решения, в которых отбрасываются слагаемые порядка h/r_0, являются адэкватными по точности указанным исходным гипотезам.

Попытка создать теорию оболочек, не зависимую от гипотез Кирхгофа, и дать оценку погрешности этих гипотез была сделана в[5], а для частного случая симметрично нагруженной оболочки вращения в[6]. Заключения, которые здесь получены, согласуются с указанным выше результатом исследования сферической оболочки.

Весьма общее и детальное исследование этих вопросов предпринято в работах[7, 8]. Выражения для перемещений представляются в виде рядов по степеням расстояния z точки до средней поверхности. Далее используется уравнения теории упругости в перемещениях для того, чтобы выразить вторые и более высокие производные перемещений по z при $z=0$ через перемещения точек средней поверхности и их первые производные по z при $z=0$; это дает возможность выразить коэффициенты указанных рядов через эти шесть величин. Далее используются условия равновесия на поверхностях $z=\pm h$, ограничивающих оболочку, после чего искомые величины при помощи метода последовательных приближений[1] выражаются в виде рядов по степеням h. В виде таких же рядов представляются деформации оболочки, а значит (если использовать закон Гука) и напряжения в оболочке. Таким образом, строятся соотношения, связывающие все десять усилий и моментов с тремя перемещениями точек срединной поверхности. Еще пять уравнений, связывающих эти усилия и моменты с внешними силами, дает статика (шестое уравнение статики представляет тождественное соотношение); в полученной системе пятнадцати уравнений с тринадцатью неизвестными отбрасываются два уравнения, связывающие перерезывающие силы с перемещениями точек срединной поверхности. Результаты исследования, проведенного при широком использовании средств тензорного анализа, весьма громоздки. В более подробной форме выписаны уравнения, относящиеся к случаю цилиндрической оболочки. Сравнение этих уравнений с уравнениями Зандена и Тельке и уравнениями Флюгге показывает, что эти авторы сохранили в своих уравнениях члены, имеющие тот же порядок, что и отброшенные ими члены.

---

[1] Аналогичное рассмотрение в случае плоской плиты было проведено в [9]. Выражения для перемещений любой точки плиты удалось выразить через некоторые функции, определяемые нагрузками на торцах плиты $z=\pm h$, в форме рядов, закон составления которых оказался весьма простым.

2. Общие уравнения теории оболочек

При изложении этого раздела мы будем пользоваться обычной тензорной символикой и употреблять следующие обозначения:

$\mathbf{r}$ — вектор-радиус точки срединной поверхности оболочки, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^1, x^2)$;

$\mathbf{r}_m$ — единичные векторы касательных к координатным линиям, $\mathbf{r}_m=\partial\mathbf{r}/\partial x^m$;

n — единичный вектор нормали;

a_{mn} — тензор первой квадратичной формы, $a_{mn}=\mathbf{r}_m\cdot\mathbf{r}_n$, при помощи которого производится поднятие и опускание индексов;

a — фундаментальный определитель, $a=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$;

b_{mn} — тензор второй квадратичной формы, $b_{mn}=\mathbf{r}_{mn}\cdot\mathbf{n}$;

∇_m — символ ковариантного дифференцирования;

c_{mn} — вспомогательный антисимметричный тензор, $c_{mn}=\mathbf{r}_m\mathbf{r}_n\mathbf{n}$; компоненты которого

$$c_{mm}=0, \qquad c_{12}=-c_{21}=\sqrt{a}$$

Тензор c_{mn}, так же как и a_{mn}, по отношению к ковариантному дифференцированию ведет себя, как константа.

Все упомянутые величины относятся к недеформированной срединной поверхности; величины, относящиеся к деформированной срединной поверхности, будем снабжать, кроме всех индексов, звездочкой.

Все соотношения, которые будут приведены в этом разделе, носят тензорный характер, т. е. остаются верными при любом выборе гауссовых координат на срединной поверхности.

Чтобы связать предлагаемое изложение с известным изложением Лява, мы будем, пользуясь его обозначениями, давать значение физических составляющих всех вводимых ниже тензоров искомых величин для случая, когда срединная поверхность отнесена к линиям кривизны. Отметим только, что под τ мы будем подразумевать не то выражение, которое Ляв приводит в своем курсе, а то, которое он давал в более ранней работе[10]. Другими словами, будем принимать

$$\tau=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)+\frac{1}{R_2}\left(-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)+\frac{1}{R_1}\left(-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v+\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)$$

В работах советских авторов неоднократно отмечалось, что таким выражением для τ пользоваться удобнее[11,12].

1. Уравнения равновесия. Введем тензор тангенциальных сил T^{mn}, тензор моментов M^{mn} и тензор поперечных сил N^m при помощи равенств

$$T^{mn}=+\int_{-h}^{+h}(\sigma^{mn}-x^3b^m_{\cdot s}\sigma^{sn})\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,dx^3 \qquad N^m=\int_{-h}^{+h}\sigma^{3m}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,dx^3 \qquad (m, n=1, 2)$$

$$M^{mn}=-\int_{-h}^{+h}(\sigma^{mn}-x^3b^m_{\cdot s}\sigma^{sn})\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,x^3dx^3$$

Здесь через σ^{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ обозначены контравариантные компоненты тензора напряжений оболочки, рассматриваемой как трехмерное тело.

Условимся здесь и в дальнейшем под $[A^{ik}]$ понимать физические составляющие тензора A^{ik} в линиях кривизны; тогда

$$[T^{11}]=T_1, \quad [T^{12}]=-S_2, \quad [T^{21}]=S_1, \quad [T^{22}]=T_2, \quad [N^1]=-N_1$$

$$[M^{11}]=-G_1, \quad [M^{12}]=-H_2, \quad [M^{21}]=H_1, \quad [M^{22}]=-G_2, \quad [N^2]=-N_2$$

Приняв обозначения

$$\mathbf{P}_m=c_{\alpha m}T^{\beta\alpha}\mathbf{r}_\beta+c_{sm}N^s\mathbf{n}, \qquad Q_m=c_{\beta}{}^{s}{}_{\alpha}c_{\beta m}M^{\alpha\beta}\mathbf{r}_s \qquad (2.1.1)$$

можно написать уравнения равновесия в виде двух векторных равенств [13,14]

$$\frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial x^2}+\mathbf{X}=0, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial x^2}-\mathbf{r}_1\times\mathbf{P}_2+\mathbf{r}_2\times\mathbf{P}_1+\mathbf{Y}=0 \tag{2.1.2}$$

где $\mathbf{X}=X^s\mathbf{r}_s+x\mathbf{n}$—вектор внешних сил, $\mathbf{Y}=Y^s\mathbf{r}_s$—вектор внешних моментов.

В развернутом виде уравнения равновесия записываются так[15]:

$$\nabla_s T^{ms}-b^m_{\cdot s}N^s=-X^m, \qquad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}+\nabla_s N^s=x$$
$$\nabla_s M^{ms}-N^m=c^{ms}Y_s, \qquad -c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}+c_{\alpha}^{\cdot s}b_{s\beta}M^{\alpha\beta}=0 \tag{2.1.3}$$

2. Функции напряжения. При $\mathbf{X}=\mathbf{Y}=0$ уравнения равновесия (2.1.2) и (2.1.3) тождественно удовлетворятся, если положить

$$\mathbf{P}_m=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^m}=\mathbf{f}_m, \qquad \mathbf{Q}_m=\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^m}-\mathbf{r}_m\times\mathbf{f} \tag{2.2.1}$$

каковы бы ни были векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. При этом, однако, вообще говоря, нарушается равенство $\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}_m=0$, вытекающее из формул (2.1.1); для того, чтобы выполнялось и это соотношение, потребуем, чтобы

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}_m=\mathbf{n}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^m}+c^{s}_{\cdot m}\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}_s=0 \tag{2.2.2}$$

Векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ можно записать в виде

$$\mathbf{f}=c^{\alpha\beta}\varphi_\beta\mathbf{r}_\alpha+\eta\mathbf{n}, \qquad \mathbf{g}=\psi^s\mathbf{r}_s-\chi\mathbf{n} \tag{2.2.3}$$

где φ, ψ—произвольные тензоры, а η и χ—произвольные скаляры.

Равенство (2.2.2) дает возможность выразить φ_m через ψ_m и χ. Величины ψ_i, χ и η остаются произвольными. Вставляя в (2.2.1) вместо $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{Q}_m$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ их выражения из (2.1.1) и (2.2.3) и принимая во внимание (2.2.2), получим

$$T^{mn}=-c^{m\beta}c^{\alpha n}\nabla_\alpha(\nabla_\beta\chi-b^{s}_{\cdot\beta}\psi_s)+c^{sn}b^{m}_{\cdot s}\eta, \quad M^{mn}=c^{m\beta}c^{\alpha n}(\nabla_\alpha\psi_\beta+b_{\alpha\beta}\chi)+c^{mn}\eta$$
$$N^m=c^{ms}\nabla_s\eta+c^{ms}c^{\alpha\beta}b_{\alpha s}(\nabla_\beta\chi-b^{t}_{\cdot\beta}\psi_t), \qquad \varphi_m=\nabla^m\chi-b^{s}_{\cdot m}\psi_s \tag{2.2.4}$$

Выраженные таким образом T^{mn}, M^{mn} и N^m будут, очевидно, удовлетворять однородным уравнениям, каковы бы ни были функции ψ_m, χ, η, которые поэтому можно назвать функциями напряжения [13, 14].

3. Связь между деформациями и перемещениями. Рассмотрим вектор бесконечно малого смещения $\mathbf{V}$ и вектор бесконечно малого вращения $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{V}=v^s\mathbf{r}_s-w\mathbf{n}, \qquad \mathbf{W}=c^{\alpha\beta}\gamma_\beta\mathbf{r}_\alpha+\delta\mathbf{n} \tag{2.3.1}$$

Производные от $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ можно представить так:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^m}=\mathbf{V}_m=\varepsilon_m^{\cdot s}\mathbf{r}_s-\mathbf{W}\times\mathbf{r}_m, \qquad \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x^m}=\mathbf{W}_m=c^{\alpha\beta}\mu_{\beta m}\mathbf{r}_\alpha+\zeta_m\mathbf{n} \tag{2.3.2}$$

Здесь ε_{mn} и μ_{mn}—первый и второй тензоры деформации:

$$\varepsilon_{mn}=\tfrac{1}{2}(a^*_{mn}-a_{mn}), \qquad \mu_{mn}=-\beta_{mn}+b^{s}_{\cdot n}\varepsilon_{ms} \qquad (\beta_{mn}=b^*_{mn}-b_{mn}) \tag{2.3.3}$$

В линиях кривизны физические составляющие ε_{mn} и μ_{mn} будут

$$[\varepsilon_{11}]=\varepsilon_1, \quad [\varepsilon_{12}]=\tfrac{1}{2}\omega \quad [\mu_{11}]=\varkappa_1, \quad [\mu_{12}]=\tau-\omega/2R_2,$$
$$[\varepsilon_{22}]=\varepsilon_2, \quad [\varepsilon_{21}]=\tfrac{1}{2}\omega \quad [\mu_{22}]=\varkappa_2, \quad [\mu_{21}]=+\tau-\omega/2R_1, \tag{2.3.4}$$

Величина ζ_m выражается через компоненты первого тензора деформации согласно (2.5.2) и (2.5.3). Не представляет труда с помощью (2.3.2) выразить ε_{mn}, μ_{mn}, ζ_m, γ_m и δ через $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ и их производные [16]:

$$\varepsilon_{mn}=\mathbf{V}_m\cdot\mathbf{r}_n+c_{mn}\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}, \quad \mu_{mn}=c^{s}_{\cdot m}\mathbf{r}_s\cdot\mathbf{W}_n, \quad \zeta_m=\mathbf{n}\cdot\mathbf{W}_m,$$
$$\gamma_m=\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_m, \quad \delta=\mathbf{n}\cdot\mathbf{W} \tag{2.3.5}$$

Внося здесь в правые части вместо $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ их выражения из (2.3.1), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} &= \nabla_n v_m + b_{nm} w + c_{nm}\delta, \\ \mu_{mn} &= \nabla_n (\nabla_m w - b^s_{.m} v_s) - c_{sm} b^s_{.n}\delta, \\ \zeta_m &= \nabla_m \delta + c^{\alpha\beta} b_{\alpha m} (\nabla_\beta w - b^s_{.\beta} v_s), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_m &= \nabla_m w - b^s_{.m} v_s \\ \delta &= -\frac{1}{2} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Если исключить величину δ при помощи последнего равенства, то получатся формулы, связывающие деформации с компонентами упругого перемещения.

4. Определение смещений по заданным компонентам деформаций. Второе из соотношений (2.3.2) можно рассматривать как уравнения для определения $\mathbf{W}$, так как правые части этой системы следует считать известными при заданных ε_{mn} и μ_{mn}.

Полагая, что условие интегрируемости

$$\partial \mathbf{W}_1 / \partial x^2 - \partial \mathbf{W}_2 / \partial x^1 = 0 \tag{2.4.1}$$

выполнено, получим при помощи одной квадратуры вектор бесконечно малого вращения $\mathbf{W}$. При известном $\mathbf{W}$ мы имеем право считать известной и правую часть первого из равенств (2.3.2).

Рассматривая их как уравнения, определяющие вектор $\mathbf{V}$, мы найдем последний второй квадратурой [14], причем условием интегрируемости этой системы будет

$$\partial \mathbf{V}_2 / \partial x^1 - \partial \mathbf{V}_1 / \partial x^2 = 0 \tag{2.4.2}$$

5. Уравнения неразрывности деформаций. Векторные уравнения (2.4.1) и (2.4.2) по аналогии с терминологией, принятой в теории упругости, можно назвать уравнениями неразрывности деформаций теории тонких оболочек. В развернутом виде они могут быть написаны так:

$$\nabla_s \tilde{\mu}^{ms} - b^m_{.s} \tilde{\zeta}^s = 0, \qquad b_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} + \nabla_s \tilde{\zeta}^s = 0 \tag{2.5.1}$$

$$\nabla_s \tilde{\varepsilon}^{ms} - \tilde{\zeta}^m = 0, \qquad -c_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} + c_\alpha^{\cdot s} b_{s\beta} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.5.2}$$

где

$$\tilde{\mu}^{mn} = c^{\alpha m} c^{\beta n} \mu_{\alpha\beta}, \qquad \tilde{\varepsilon}^{mn} = c^{m\alpha} c^{\beta n} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \tilde{\zeta}^m = c^{sm} \zeta_s \tag{2.5.3}$$

Первое соотношение (2.5.2) может быть использовано для того, чтобы исключить в равенствах (2.5.1) величину $\tilde{\zeta}_m$. Тогда мы придем к уравнениям, которые могут быть получены и при помощи вариации уравнений Кодацци-Гаусса [11]. Что касается второго соотношения (2.5.2), то это уравнение легко может быть получено из равенства $c^{mn}\beta_{mn} = 0$, которое выражает условие симметрии тензора β_{mn}.

Систему тождественных равенств (2.5.1), (2.5.2) можно пополнить еще и соотношением

$$c_{mn} \tilde{\varepsilon}^{mn} = 0 \tag{2.5.4}$$

выражающим симметрию тензора ε_{mn}.

6. Соотношения упругости. Формулы, связывающие тензоры моментов и тангенциальных усилий с первым и вторым тензорами деформаций, можно записать так:

$$\begin{aligned} T^{mn} &= BE^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + DF^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \\ M^{mn} &= DG^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} + DH^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \left(B = \frac{2Eh}{1 - \sigma^2}, \ D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \sigma^2)} \right) \tag{2.6.1}$$

Тензоры E, F, G, H можно вычислить, если ввести некоторые дополнительные допущения, касающиеся закона распределения деформаций или напряжений по толщине оболочки. Так, например, приняв гипотезу Кирхгофа—Лява и сохраняя в выкладках только члены, содержащие h в наименьшей для данного выражения степени, получим

$$E^{mn\alpha\beta} = G^{mn\alpha\beta} = a^{m\alpha} a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha} c^{n\beta}, \qquad F^{mn\alpha\beta} = H^{mn\alpha\beta} = 0 \tag{2.6.2}$$

Сохраняя в выкладках все члены до порядка h^3 включительно, вместо (2.6.2) получим [14]

$$
\begin{aligned}
E^{mn\alpha\beta} &= a^{m\alpha}a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha}c^{n\beta} + \frac{h^2}{3}\left[\left(2Ha^{m\alpha}b^{n\beta} + 2a^{m\alpha}b^{s\beta}b_{s}^{\cdot n}\right) - \frac{1+\sigma}{2}\left(a^{m\alpha}b^{s\beta} - a^{\alpha s}b^{m\beta}\right)b^{n}_{\cdot s}\right] \\
F^{mn\alpha\beta} &= 2Ha^{m\alpha}b^{n\beta} + 2a^{m\alpha}a^{n\beta} - \frac{1+\sigma}{2}\left(b^{m\alpha}b^{n\beta} - b^{m\alpha}a^{n\beta}\right) \\
G^{mn\alpha\beta} &= a^{m\alpha}a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha}c^{n\beta} - \frac{1+\sigma}{2}c^{mn}c^{\alpha\beta} \\
H^{mn\alpha\beta} &= 2Ha^{m\alpha}a^{n\beta} + 2a^{m\alpha}b^{n\beta} - \frac{1+\sigma}{2}\left(a^{m\alpha}b^{n\beta} - b^{m\alpha}a^{n\beta}\right)
\end{aligned}
\tag{2.6.3}
$$

где $2H$ — инвариант, равный средней кривизне оболочки.

Уточнения, которые дают равенства (2.6.3) по сравнению с (2.6.2), нельзя, однако, считать обоснованными, так как при выводе (2.6.3) также приходится опираться на гипотезу Кирхгофа—Лява и погрешности, которые при этом вносятся, имеют тот же порядок, что и достигнутые уточнения.

Таким образом, с точки зрения точности формулы (2.6.2) и (2.6.3) эквивалентны. Было бы, однако, слишком поспешно делать вывод, что надо всегда отдавать предпочтение соотношениям (2.6.2), как более простым. Например, формулы (2.6.3) дают возможность решить задачу о сферической оболочке более просто, чем формулы (2.6.2). Кроме того, при некотором усложнении соотношений (2.6.2) можно добиться того, что в теории оболочек будут выполняться основные теоремы общей теории упругости.

Разрешив (2.6.1) относительно первого и второго тензоров деформации, получим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{mn} &= B'\left(P_{mn\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + Q_{mn\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right) \qquad \left(B' = \frac{1}{2Eh}\right) \\
\mu_{mn} &= D'\left(R_{mn\alpha\beta}M^{\alpha\beta} + \frac{h^2}{3}S_{mn\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\right) \qquad \left(D' = \frac{1}{2Eh}\frac{3}{h^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.6.4}
$$

Если при этом тензоры E, F, G, H определяются формулами (2.6.2), то для P, Q, R, S получим

$$
P_{mn\alpha\beta} = R_{mn\alpha\beta} = a_{m\alpha}a_{n\beta} - \sigma c_{m\alpha}c_{n\beta}, \qquad S_{mn\alpha\beta} = Q_{mn\alpha\beta} = 0 \tag{2.6.5}
$$

7. Дополнительные соотношения. Так как первый и второй тензоры деформаций удовлетворяют второму равенству (2.5.2) и тождеству (2.5.4), то должны существовать и два уравнения, связывающие T^{mn} и M^{mn}. Одно из них при достаточно точных выкладках должно совпадать с шестым уравнением равновесия, и мы его не будем вводить в рассмотрение. Второе уравнение, если в его коэффициентах сохранить только члены, содержащие h в наименьшей степени, имеет вид

$$
c^{s}_{\cdot\alpha}b_{s\beta}T^{\alpha\beta} + \frac{3}{h^2}c_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.7.1}
$$

Дополнительное соотношение (2.7.1) не следует из уравнений равновесия (2.4.3). Однако оно может быть получено и из статических соображений, если ввести дополнительное требование, чтобы условие парности касательных напряжений удовлетворялось не только интегрально, но и в каждой точке по толщине оболочки [13, 17].

8. Уравнения неразрывности в усилиях и моментах. После того как выбран тот или иной вариант соотношений (2.6.4), можно получить уравнения неразрывности в усилиях и моментах, аналогичные уравнениям Бельтрами-Митчелла в теории упругости [11, 15]. Для этого надо исключить в уравнениях (2.5.1) величину $\tilde{\varsigma}^m$ при помощи первого уравнения (2.5.2), вставить выражения ε_{mn} и μ_{mn} по формулам (2.6.4) и упростить полученные соотношения при помощи уравнений равновесия. Если при этом считать, что тензоры P и R определяются формулами (2.6.5), а S и Q остаются неопределенными, то получим

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{3}{h^2}a^{ms}\nabla_s a_{\alpha\beta} + c^{ts}b^{m}_{\cdot s}\nabla_p\left(a_t^{\cdot p}c_\alpha^{\cdot q}b_{q\beta} + c^{pq}Q_{tq\alpha\beta}\right)\right]M^{\alpha\beta} - \\
&-\left[b^{ms}\nabla_s a_{\alpha\beta} + c^{ms}\nabla_s c_\alpha^{\cdot t}b_{t\beta} + c^{st}c^{mq}\nabla_t S_{qs\alpha\beta}\right]T^{\alpha\beta} + (1+\sigma)\left(\frac{3}{h^2}a^{m}_{\cdot s} + b^{m}_{\cdot t}b^{t}_{\cdot s}\right)N^s = \\
&= (1+\sigma)\,b^{m}_{\cdot s}X^s + \frac{3}{h^2}(1+\sigma)\,c^{sm}Y_s
\end{aligned}
\tag{2.8.1}
$$

$$\frac{3}{h^2}\left[(c^s_{\cdot\alpha}c^{\cdot t}_{\beta}+\sigma a^s_{\cdot\alpha}a^{\cdot t}_{\beta})\, b_{st}+\frac{h^2}{3}c^{st}c^{pq}\nabla_t\nabla_q Q_{sp\alpha\beta}\right]M^{\alpha\beta}+$$

$$+[a^{st}\nabla_s\nabla_t a_{\alpha\beta}+c^{st}c^{pq}b_{pt}S_{qs\alpha\beta}]\,T^{\alpha\beta}-(1+\sigma)\nabla_s b^s_{\cdot t}N^t=-(1+\sigma)\nabla_s X^s \quad (2.8.2)$$

Свободные члены, фигурирующие в правых частях этих соотношений, дают возможность без труда установить, каким образом употреблялись уравнения равновесия для упрощения уравнений неразрывности деформаций.

Путем отбрасывания членов, играющих второстепенную роль, можно упростить уравнения неразрывности. В [18] предложено (2.8.1) брать в виде

$$-a^{ms}\nabla_s a_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}+(1+\sigma)\,N^m=\frac{h^2}{3}(1+\sigma)\,b^m_{\cdot s}X^s-(1+\sigma)\,c^{sm}Y_m \quad (2.8.3)$$

Это дает вполне удовлетворительную точность, если только речь идет не об определении напряженного состояния вблизи точки приложения сосредоточенной силы.

В статье [15] показывается, что (2.8.2) можно заменить таким уравнением:

$$\frac{3}{h^2}(c^s_{\cdot\alpha}c^{\cdot t}_{\beta}+\sigma a^s_{\cdot\alpha}a^{\cdot t}_{\beta})b_{st}M^{\alpha\beta}+a^{st}\nabla_s\nabla_t a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=-(1+\sigma)\nabla_s X^s \quad (2.8.4)$$

9. Энергетические соотношения. Возьмем уравнения равновесия (2.1.2), помножим первое из них на $\mathbf{V}\,dx^1dx^2$, второе на $\mathbf{W}\,dx^1dx^2$, проинтегрируем по области G, занятой оболочкой, и сложим

$$\iint\limits_G \mathbf{V}\left[\frac{\partial\mathbf{P}_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\mathbf{P}_1}{\partial x^2}+\mathbf{X}\right]dx^1dx^2+\iint\limits_G \mathbf{W}\left[\frac{\partial\mathbf{Q}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial\mathbf{Q}_1}{\partial x^2}-\mathbf{r}_1\times\mathbf{P}_2+\mathbf{r}_2\times\mathbf{P}_1+\mathbf{Y}\right]dx^1dx^2=0$$

Освободимся в этом равенстве от производных от функций $\mathbf{P}_m$ и $\mathbf{Q}_m$ при помощи интегрирования по частям. Тогда, используя формулы (2.1.1) и (2.3.5), после элементарных выкладок получим

$$\int\limits_g \mathbf{V}\cdot(\mathbf{P}_1\,dx^1+\mathbf{P}_2\,dx^2)+\int\limits_g \mathbf{W}\cdot[\mathbf{Q}_1\,dx^1+\mathbf{Q}_2\,dx^2]-$$

$$-\iint\limits_G (T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta})\sqrt{a}\,dx^1dx^2+\iint\limits_G \mathbf{V}\cdot\mathbf{X}\,dx^1dx^2+\iint\limits_G \mathbf{Y}\cdot\mathbf{W}\,dx^1dx^2=0 \quad (2.9.1)$$

Здесь g — кривая (или совокупность кривых), ограничивающая область G.

Контурные интегралы, входящие в эту формулу, можно представить в виде

$$\int\limits_g \mathbf{V}\cdot(\mathbf{P}_1\,dx^1+\mathbf{P}_2\,dx^2)+\int\limits_g \mathbf{W}\cdot[\mathbf{Q}_1\,dx^1+\mathbf{Q}_2\,dx^2]=$$

$$=-\int\limits_g\sqrt{a}\,\Big\{[T^{12}-b^1_{\cdot 1}M^{12}]\,v_1+[T^{22}-b^2_{\cdot 1}M^{12}]v_2-$$

$$-\left[N^2+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{a}\,M^{12})\right]w+M^{22}\gamma_2\Big\}\,dx^1+$$

$$+\int\limits_g\sqrt{a}\,\Big\{[T^{11}-b^1_{\cdot 2}M^{21}]\,v_1+[T^{21}-b^2_{\cdot 2}M^{21}]\,v_2-$$

$$-\left[N^1+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{a}\,M^{21})\right]w+M^{11}\gamma_1\Big\}\,dx^2$$

Отсюда ясно, что в формуле (2.9.1) контурные интегралы представляют собой работу внешних сил и моментов, приложенных к краю оболочки на ее перемещениях и углах поворота (на перемещениях совершают работу не только тангенциальные и нормальные силы, но и крутящие моменты, как было указано Кирхгофом). Выражение

$$W=\frac{1}{2}(T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\mu^{\alpha\beta})$$

естественно назвать упругим потенциалом оболочки. Тогда (2.9.1) будет являться аналогом теоремы Клапейрона. Этот результат получается без использования гипотезы Кирхгофа; приняв последнюю, можно доказать [16], что

$$W = \int_{-h}^{+h} W^{\circ}\, dx^3 \tag{2.9.2}$$

где W° — упругий потенциал оболочки, рассматриваемой как трехмерное упругое тело. При замене гипотезы Кирхгофа другой гипотезой равенство (2.9.2) может и не выполняться. Однако это не существенно, так как следствия из теоремы Клапейрона можно выводить, и не опираясь на ее физическую сущность. Поэтому не представляет труда выяснить вопрос о том, при каких обстоятельствах в теории тонких оболочек будет соблюдаться теорема единственности Кирхгофа и закон взаимности Бетти [16]. Для первого достаточно, чтобы в силу формул (2.6.1) W было заведомо положительной функцией, а условием применимости теоремы Бетти будет выполнение тождества

$$T_{(1)}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)} + M_{(1)}^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{(2)} = T_{(2)}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} + M_{(2)}^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}^{(1)} \tag{2.9.3}$$

где значками (1) и (2) отмечены деформации, усилия и моменты двух произвольных напряженных состояний. Легко проверить, что тождество (2.9.3) будет иметь место, если

$$E^{\alpha\beta mn} = E^{mn\alpha\beta}, \qquad G^{\alpha\beta mn} = G^{mn\alpha\beta}, \qquad H^{mn\alpha\beta} = F^{\alpha\beta mn} \tag{2.9.4}$$

Отметим, что выводы этого параграфа можно считать законными только для таких E, F, G и H, которые не противоречат шестому уравнению равновесия, так как во всех рассуждениях мы существенным образом предполагали, что все уравнения равновесия точно удовлетворяются. Поэтому (2.6.2) не будут обеспечивать выполнимость перечисленных теорем. Одним из примеров соотношений упругости, при которых основные энергетические теоремы применимы к оболочкам, дают формулы (2.6.3).

10. Аналогия между статическими и геометрическими соотношениями. Между статическими и геометрическими уравнениями теории оболочек существует далеко идущая аналогия [13,15]. Ее можно сформулировать так. Во-первых, если в однородных уравнениях равновесия (2.1.3) и в формулах (2.2.4), выражающих усилия и моменты через функции напряжения, положить

$$\begin{aligned} T^{mn} &= \tilde{\mu}^{mn} = c^{\alpha m} c^{\beta n} \mu_{\alpha\beta}, & M^{mn} &= \tilde{\varepsilon}^{mn} = c^{m\alpha} c^{\beta n} \varepsilon_{\alpha\beta}, & N^{m} &= \tilde{\zeta}^{m} = c^{sm} \zeta_s \\ \psi_m &= -v_m, & \chi &= -w, & \eta &= -\delta \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

то придем соответственно к уравнениям неразрывности (2.5.1) и (2.5.2) и к формулам (2.3.6), выражающим деформации через перемещения. Во-вторых, когда для тензоров E, F, G, H приняты выражения (2.6.2), а для P, Q, R, S—(2.6.5), то формулы (2.6.1) и (2.6.4) переходят друг в друга, если тензоры тангенциальных усилий и моментов, с одной стороны, и тензоры деформации, с другой, взаимно заменить по формулам (2.10.1) и положить

$$B = B', \qquad D = D', \qquad \sigma = -\sigma \tag{2.10.2}$$

Аналогия станет полной, т. е. будет охватывать все уравнения теории оболочек, если дополнительное соотношение (2.7.1) взять в виде $c_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = 0$ (такое предположение в рамках точности гипотезы Кирхгофа—Лява вполне законно), так как при этом (2.7.1) будет двойственно дополнительному геометрическому соотношению (2.5.4).

11. Уравнения теории оболочек в комплексной форме. Указанная выше тождественность структуры статических и геометрических уравнений позволяет представить систему уравнений теории тонких оболочек в комплексной форме [19,20].

Примем формулы (2.6.2) и (2.6.5); тогда первое из соотношений (2.6.4) и второе из соотношений (2.6.1) можно представить так:

$$\begin{aligned} 2Eh\tilde{\varepsilon}^{mn} &= +K\left(c^{m}_{\cdot\alpha} c^{\cdot n}_{\beta} + \sigma a_{\alpha}^{\cdot m} a_{\beta}^{\cdot n}\right)\frac{T^{\alpha\beta}}{K} \\ \frac{M^{mn}}{K} &= -K\left(c^{m}_{\cdot\alpha} c^{\cdot n}_{\beta} - \sigma a_{\alpha}^{\cdot m} a_{\beta}^{\cdot n}\right) 2Eh\tilde{\mu}^{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \left(K = \sqrt{\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}}\right) \tag{2.11.1}$$

Введем обозначения

$$p^{mn} = \frac{T^{mn}}{K} - i2Eh\tilde{\mu}^{mn}, \qquad q^{mn} = \frac{M^{mn}}{K} - i2Eh\tilde{\varepsilon}^{mn} \tag{2.11.2}$$

Тогда два равенства (2.11.1) будут эквивалентны комплексному соотношению

$$q^{mn} = -iK\,(c^{m}_{\cdot\alpha} c^{\cdot n}_{\beta} p^{\alpha\beta} + \sigma a^{\cdot m}_{\alpha} a^{\cdot n}_{\beta} \overline{p}^{\alpha\beta}) \tag{2.11.3}$$

причем под $\overline{p}^{mn}$ подразумевается величина, сопряженная с p^{mn}.

Возьмем уравнения равновесия (2.1.3), каждое из них поделим на K и прибавим двойственное ему уравнение неразрывности, помноженное на $i2Eh$; вводя обозначение

$$\nu^{m} = \frac{N^{m}}{K} - i2Eh\zeta^{m} \tag{2.11.4}$$

получим

$$\nabla_s p^{ms} - b^{m}_{\cdot s}\nu^{s} = -\frac{X^{m}}{K}, \qquad b_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} + \nabla_s \nu^{s} = \frac{x}{K} \tag{2.11.5}$$

$$\nabla_s q^{sm} \nu - m = c^{ms}\frac{Y_s}{K}, \qquad -c_{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} + c^{s}_{\cdot\alpha} b_{\cdot\beta} q^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.11.6}$$

Если $\sigma = 0$, то система (2.11.5), (2.11.6) вместе с равенством (2.11.3) будет содержать в качестве неизвестных величин только $p^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$, ν^{α} и дает поэтому десять уравнений для определения десяти неизвестных компонентов упомянутых тензоров. Таким образом, при $\sigma = 0$ система уравнений произвольной оболочки может быть представлена в виде соотношений с комплексными коэффициентами. Частным случаем этого результата являются уравнения в комплексной форме, которые обычно употребляются при расчете оболочек вращения, работающих в условиях осевой симметрии (см., например [6]). Если пойти на отбрасывание некоторых малых членов, то в комплексной форме можно представить уравнения произвольной оболочки и при $\sigma \neq 0$.

Чтобы показать это, заменим второе уравнение (2.11.6) приближенным уравнением

$$c_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.11.7}$$

Вследствие этого формулу (2.11.3), воспользовавшись тождеством

$$c^{s}_{\cdot\alpha} c^{\cdot t}_{\beta} = c_{\alpha\beta} c^{st} + a_{\alpha\beta} a^{st} - a^{\cdot s}_{\alpha} a^{\cdot t}_{\beta}$$

можно представить в виде

$$q^{mn} = -iK\,(a^{mn} a_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} - p^{mn} - \sigma \overline{p}^{mn})$$

Вставляя это значение q^{mn} в первое уравнение (2.11.6), получим

$$iK \nabla_s a^{ms}(a_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}) - iK \nabla_s p^{sm} - \sigma iK \nabla_s \overline{p}^{sm} + \nu^{m} = -c^{sm}\frac{Y_m}{K} \tag{2.11.8}$$

но согласно первому уравнению (2.11.5)

$$\nabla_s p^{ms} = b^{m}_{\cdot s}\nu^{s} - \frac{X^{m}}{K}, \qquad \nabla_s \overline{p}^{sm} = b^{m}_{\cdot s}\overline{\nu}^{s} - \frac{X^{m}}{K}$$

Внося этот результат в (2.11.8) и отбрасывая величину $Kb^{m}_{\cdot s}$ по сравнению с единицей, придем к уравнению

$$iK \nabla_s a^{sm}(a_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}) + \nu^{m} = -c^{sm}\frac{Y_s}{K} - i(1+\sigma)X^{m} \tag{2.11.9}$$

которое вместе с (2.11.7) и (2.11.5) дает искомую полную систему для определения неизвестных комплексных тензоров p^{mn} и ν^{mn}.

Изложенный в этом параграфе результат был применен для расчета оболочек вращения, подверженных действию произвольной нагрузки[21].

12. Безмоментная теория и ее связь с бесконечно малыми изгибаниями срединной поверхности. Положим в однородных уравнениях равновесия

$$M^{mn} = N^{m} = 0 \tag{2.12.1}$$

Это приведет к системе уравнений так называемой безмоментной теории; поэтому будем говорить, что тензор T^{mn}, являющийся интегралом этой системы, определяет безмоментное напряженное состояние некоторой незагруженной части оболочки.

Положим в уравнениях неразрывности деформаций (2.5.1), (2.5.2)

$$\varepsilon_{mn} = \zeta_m = 0, \quad \text{откуда} \quad \tilde{\varepsilon}^{mn} = \tilde{\zeta}^m = 0 \tag{2.12.2}$$

Это приведет к системе уравнений относительно $\tilde{\mu}^{mn}$, каждый интеграл которой определяет некоторое бесконечно малое изгибание срединной поверхности.

Равенства (2.12.1) и (2.12.2) не нарушают высказанной выше аналогии между статикой и геометрией теории оболочек, так как они переходят друг в друга при подстановке (2.10.1). Поэтому T^{mn} и $\tilde{\mu}^{mn}$ удовлетворяют одной и той же системе.

Таким образом, разыскание всех безмоментных состояний некоторой ненагруженной части оболочки и определение всех бесконечно малых изгибаний этой части являются задачами, математически эквивалентными [15,22].

Это дает возможность применять приемы, разработанные в теории изгибания поверхностей к расчету оболочек по безмоментной теории.

Отсюда также вытекает, что система уравнений безмоментной теории будет эллиптического, гиперболического или параболичесоого типа в зависимости от того, будет ли гауссова кривизна положительна, отрицательна или равна нулю[23].

Тесную связь между безмоментным напряженным состоянием и бесконечно малыми изгибаниями можно установить и иным путем. Воспользуемся для этого формулой (2.9.1). В этом равенстве, как следует из предпосланных ему рассуждений, можно считать, что геометрические величины $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, ε_{mn}, μ_{mn}, с одной стороны, и статические величины $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{Q}_m$, T^{mn}, M^{mn}, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, с другой, не связаны между собой. Пусть поэтому первые из них соответствуют некоторому бесконечно малому изгибанию, а вторые — безмоментному напряженному состоянию оболочки; тогда

$$\varepsilon_{mn} = M^{mn} = 0, \qquad \mathbf{Q}_m = \mathbf{Y} = 0$$

Отсюда

$$\int\limits_g \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P}_1\, dx^1 + \mathbf{P}_2\, dx^2) + \iint\limits_G \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}\, dx^1\, dx^2 = 0 \tag{2.12.3}$$

Рассмотрим: a) статическую задачу, которая заключается в определении безмоментного напряженного состояния, когда в области G действует внешняя нагрузка, а на границе g в каждой точке отсутствует проекция усилия на некоторое направление l_1, лежащее в касательной плоскости к срединной поверхности, и (b) геометрическую задачу, которая заключается в том, чтобы найти бесконечно малые изгибания той же оболочки с дополнительным условием, что на границе g отсутствуют в каждой точке смещения в направлении l_2, причем l_1 и l_2 ортогональны.

Пусть существует n линейно независимых решений задачи (b); тогда если $\mathbf{V}^{(n)}$ любое из этих решений, то

$$\int\limits_g \mathbf{V}^{(n)} \cdot (\mathbf{P}_1\, dx^1 + \mathbf{P}_2\, dx^2) = 0$$

отсюда вытекает, что решение задачи (a) будет существовать только при дополнительном условии

$$\iint\limits_G \mathbf{V}^{(n)} \cdot \mathbf{X}\, dx^1\, dx^2 = 0$$

т. е. внешняя нагрузка дожна быть ортогональна всем возможным перемещениям задачи (b). В частности, когда оболочка не имеет границы, т. е. ее срединная поверхность либо замкнута, либо безгранично простирается в обе стороны, задача (b) вырождается в задачу об определении бесконечно малых изгибаний срединной поверхности в целом и внешняя нагрузка должна быть ортогональна всем таким бесконечно малым изгибаниям срединной поверхности[24].

Вопрос о том, верно ли обратное положение, решается отрицательно, если мы не ограничимся оболочками со всюду положительной гауссовой кривизной. Нельзя утверждать, что если задача (b) не имеет решений, то задача (a) решается при любых внешних нагрузках. Примером может служить торообразная оболочка; хотя жесткость тора и доказана, легко указать самоуравновешенные внешние нагрузки, при которых в торообразной оболочке не может существовать безмоментное напряженное состояние.

3. Асимптотические свойства общего интеграла системы уравнений теории оболочек

В работах[15,24,25] уравнения теории оболочек рассматриваются как система, содержащая исчезающе малый параметр $\bar{h} = h / \lambda$ (где λ — некоторый линейный размер, характеризующий геометрическую конфигурацию срединной поверхности), и изучаются асимптотические свойства ее общего интеграла. Так как в действительности $\bar{h}$, как правило, весьма малая величина, то асимптотические и истинные свойства общего интеграла оказываются существенно различными только в исключительных случаях, которые нетрудно заранее предусмотреть. Асимптотические свойства общего интеграла являются тем общим основанием, на котором базируются столь разнообразные на первый взгляд приближенные методы расчета оболочек. Исследование указанных вопросов производится при помощи следующей последовательности рассуждений и выкладок.

1. Из совокупности интегралов системы уравнений теории оболочек выделяются некоторые группы интегралов, каждая из которых обладает заданными свойствами.

2. Для каждой группы в отдельности выводятся упрощенные уравнения путем отбрасывания тех членов, роль которых незначительна в силу свойств этой группы.

3. Выясняется, при каких обстоятельствах упрощенные уравнения имеют интегралы, обладающие заданными свойствами.

4. Рассматривается вопрос о том, какими группами интегралов надо воспользоваться, чтобы в совокупности из них было достаточное число произвольных элементов для удовлетворения всем граничным условиям данной задачи.

Этот порядок примем и при изложении полученных таким образом результатов.

1. Классификация интегралов уравнений оболочек. Асимптотические свойства, в силу которых интеграл системы уравнений теории оболочек относится к той или иной группе, заключается в поведении искомых величин и их производных при $\bar{h} \to 0$. Чтобы сформулировать эти свойства, удобно пользоваться следующей терминологией.

Будем говорить, что тензор A, который может иметь произвольное число ко- и контровариантных значков, соизмерим с $\bar{h}^a$, если предел отношения любой компоненты A к $\bar{h}^a$ при $\bar{h} \to 0$ остается конечным и по крайней мере один из этих пределов не всюду равен нулю. Условимся коротко это записывать в виде $A \approx \bar{h}^a$.

Два тензора считаются соизмеримыми друг другу $(A \approx B)$, если они соизмеримы одинаковой степени $\bar{h}$. Тензор A будем называть в $\bar{h}^{a-b}$ раз большим, чем тензор B, если $A \approx \bar{h}^a$, $B \approx \bar{h}^b$ и $a < b$.

Если $A \approx \bar{h}^a$, а $\partial A / \partial x^m \approx \bar{h}^{a-p}$, то, в зависимости от того, положительно, отрицательно или равно нулю p, будем говорить, что A при дифференцировании увеличивается в $\bar{h}^{-p}$ раз, уменьшается в $\bar{h}^p$ раз или существенно не изменяется.

Пользуясь этой терминологией, можно дать определение следующих трех групп интегралов:

1. Интегралы, в которых

$$T^{mn} \approx \bar{h}^{-2} N^k \approx \frac{\bar{h}^{-2}}{\lambda} M^{\alpha\beta} \tag{3.1.1}$$

и искомые величины существенно не изменяются при диффенцировании.

2. Интегралы, в которых

$$T^{mn} \approx N^k \approx \frac{1}{\lambda} M^{\alpha\beta} \tag{3.1.2}$$

и искомые величины существенно не изменяются при дифференцировании.

3. Интегралы, в которых

$$T^{mn} \approx \bar{h}^{-1} N^k \approx \frac{\bar{h}^{-1}}{\lambda} M^{\alpha\beta} \tag{3.1.3}$$

и искомые величины при дифференцировании возрастают в $\bar{h}^{-r}$ раз[1].

---

[1] Отметим, что в весьма общем исследовании Ченя[26] сделано предположение, что пределы, к которым стремятся искомые величины при $\bar{h} \to 0$, не изменяют своего порядка при дифференцировании по x^1, x^2. Поэтому результаты Ченя можно признать обоснованными только для весьма ограниченного класса задач.

Совокупности усилий, моментов и перемещений, соответствующих первой, второй и третьей группам интегралов, будем называть соответственно безмоментным, моментным и смешанным напряженными состояниями.

2. Уравнения, определяющие безмоментное напряженное состояние. При разыскании безмоментного напряженного состояния систему уравнений теории тонких оболочек можно брать в следующем упрощенном виде:

$$\nabla_s T^{ms} = -X^m, \qquad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = x, \qquad c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\varepsilon_{mn} = B' (a_{m\alpha} a_{n\beta} - \sigma c_{m\alpha} c_{n\beta}) T^{\alpha\beta} \tag{3.2.2}$$

$$\tilde{\zeta}^m = \nabla_s \tilde{\varepsilon}^{ms} \tag{3.2.3}$$

$$\nabla_s \tilde{\mu}^{ms} = b^{m}_{\cdot s} \tilde{\zeta}^s, \qquad b_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} = -\nabla_s \tilde{\zeta}^s, \qquad c_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} = c_{\alpha}^{\cdot s} b_{s\beta} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} \tag{3.2.4}$$

$$M^{mn} = D (a^{m\alpha} a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha} c^{n\beta}) \mu_{\alpha\beta} + DH^{\cdot mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{3.2.5}$$

$$N^m = \nabla_s M^{ms} \tag{3.2.6}$$

Эти уравнения естественным образом разбиваются на шесть систем (3.2.1)—(3.2.6), каждая из которых дает возможность находить соответственно T^{mn}, ε_{mn}, ζ_m, μ_{mn}, M^{mn}, N^m (напомним, что $\tilde{\mu}^{mn}$, $\tilde{\varepsilon}^{mn}$, $\tilde{\zeta}^m$ при помощи формул (2.5.3) выражаются через $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ и ζ); в правые части этих уравнений перенесены величины, которые при решении данной системы являются известными, так как они либо даны (компоненты внешней нагрузки X^m, x), либо определяются путем решения предшествующих систем.

3. Уравнения, определяющие моментное напряженное состояние. При разыскании моментного напряженного состояния систему уравнений теории тонких оболочек можно брать в следующем упрощенном виде:

$$\nabla_s \tilde{\mu}^{ms} = 0, \qquad b_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} \tilde{\mu}^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.3.1}$$

$$M^{mn} = D (a^{m\alpha} a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha} c^{n\beta}) \mu_{\alpha\beta} \tag{3.3.2}$$

$$N^m = \nabla_s M^{ms} - c^{ms} Y_s \tag{3.3.3}$$

$$\nabla_s T^{ms} = b^{m}_{\cdot s} N^s, \qquad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -\nabla_s N^s, \qquad c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = c_{\alpha}^{\cdot s} b_{s\beta} M^{\alpha\beta} \tag{3.3.4}$$

$$\varepsilon_{mn} = B' (a_{m\alpha} a_{n\beta} - \sigma c_{m\alpha} c_{n\beta}) T^{\alpha\beta} \tag{3.3.5}$$

Эти уравнения также распадаются на пять систем (3.3.1)—(3.3.5), из которых последовательно определяются μ_{mn}, M^{mn}, N^m, T^{mn}, ε_{mn}.

4. Уравнения, определяющие смешанное напряженное состояние. Из числа интегралов, составляющих смешанное напряженное состояние, удобно выделить подгруппу, в которой $\frac{1}{4} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$. Для разыскания таких интегралов систему уравнений теории тонких оболочке можно брать в следующем упрощенном виде:

$$\left.\begin{aligned} -b_{\alpha\beta} c^{\alpha t} c^{s\beta} \nabla_s \nabla_t \chi + D a^{\alpha s} a^{\beta t} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_t \nabla_s w = 0 \\ b_{\alpha\beta} c^{\alpha t} c^{s\beta} \nabla_s \nabla_t w + B' a^{\alpha s} a^{\beta t} \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_t \nabla_s \chi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4.1}$$

$$T^{mn} = -c^{m\beta} c^{\alpha n} \nabla_\alpha \nabla_\beta \chi \tag{3.4.2}$$

$$\mu_{mn} = \nabla_m \nabla_n w \tag{3.4.3}$$

$$\varepsilon_{mn} = B' (a_{m\alpha} a_{n\beta} - \sigma c_{m\alpha} c_{n\beta}) T^{\alpha\beta} \tag{3.4.4}$$

$$M^{mn} = D (a^{m\alpha} a^{n\beta} + \sigma c^{m\alpha} c^{n\beta}) \mu_{\alpha\beta} \tag{3.4.5}$$

$$N^m = \nabla_s M^{ms} \tag{3.4.6}$$

Эти уравнения составляют шесть систем (3.4.1) — (3.4.6), из которых последовательно определяются w и χ, T^{mn}, μ_{mn}, ε_{mn}, M^{mn}, N^{m}, причем только разыскание w и χ приводится к интегрированию дифференциальных уравнений.

5. Условия выделимости безмоментного и моментного напряженных состояний. Если любой, существенно не изменяющийся при дифференцировании интеграл системы (3.2.1) — (3.2.6) или (3.3.1) — (3.3.5) при $\bar{h} \to 0$ сколь угодно мало отличается от интеграла полной системы уравнений теории оболочек, то будем говорить, что оболочка допускает выделение безмоментного или моментного напряженных состояний. Геометрические свойства срединной поверхности, необходимые и достаточные для того, чтобы было возможно такое выделение, не найдены. Можно указать только, что оболочка всюду положительной гауссовой кривизны всегда допускает выделение безмоментного и моментного напряженных состояний [24], а среди оболочек нулевой гауссовой кривизны не допускают выделение только конические оболочки, содержащие вершину конуса и цилиндрические оболочки неограниченной длины [25] (если речь идет об оболочках малой, но конечной толщины, то цилиндрическая оболочка с достаточной точностью допускает выделение безмоментного и моментного напряженного состояния, если ее длина не слишком велика).

Частный интеграл от силовой внешней нагрузки, вообще говоря, может быть включен в безмоментное напряженное состояние. Однако для того чтобы это было законно при любой нагрузке, надо, чтобы срединная поверхность обладала некоторыми определенными свойствами. В частности, как указывалось в разделе 2.12, если оболочка замкнута или неограниченно простирается в обе стороны, то ее срединная поверхность должна быть жесткой, что, однако, не является достаточным условием для существования частного интеграла безмоментных уравнений равновесия при любой внешней нагрузке.

6. Свойства интегралов системы (3.4.1). Система (3.4.1) содержит интегралы двух типов: к первому относятся решения уравнений (3.4.1), в которых функции существенно увеличиваются при дифференцировании; ко второму относятся решения, которые асимптотически приближаются к интегралам уравнений

$$b_{\alpha\beta}c^{\alpha t}c^{s\beta}\nabla_s\nabla_t\chi = 0, \qquad b_{\alpha\beta}c^{\alpha t}c^{s\beta}\nabla_s\nabla_t w = 0 \tag{3.6.1}$$

Приведение уравнений теории оболочек к виду (3.4.1) — (3.4.6) существенным образом основывается на том, что искомые функции увеличиваются при дифференцировании; поэтому использование интегралов второго типа, вообще говоря, приведет к существенным погрешностям. Однако легко указать условия, при выполнении которых законно пользоваться интегралами обоих типов. Пусть $w=0$, а χ отлично от нуля и удовлетворяет первому из уравнений (3.6.1). Тогда $M^{mn}=N^{m}=0$, а T^{mn} определяется формулой (3.4.2). Это не будет противоречивым только в том случае, если оболочка допускает выделение безмоментного напряженного состояния и T^{mn} удовлетворяет однородным уравнениям (3.2.1). Легко убедиться, что при подстановке (3.4.2) в (3.2.1) второе и третье равенства превращаются в тождество, а первое дает

$$\nabla_s T^{ms} = -Ka^{tm}\nabla_t\chi = 0 \tag{3.6.2}$$

где K — гауссова кривизна поверхности. Аналогичные результаты получим при $w \neq 0$ и $\chi=0$.

Таким образом, использование интегралов обоих типов в системе (3.4.1) можно считать обоснованным, если:

1) оболочка допускает выделение безмоментного и моментного напряженных состояний;

2) либо гауссова кривизна K равна нулю, либо на срединной поверхности выбраны такие координаты, что все компоненты a_{mn} малы по сравнению с K^{-1}.

Для дальнейшего важно исследовать вопрос о поведении таких решений системы (3.4.1), в которых w и χ будут возрастать в h^{-r} раз только при дифференцировании по x^1, в то время как закон изменения w и χ вдоль x^2-линий остается произвольным, однако с тем ограничением, что при дифференцировании по x^2 искомые функции если и увеличиваются, то меньше чем в $\bar{h}^{-r}$ раз (последнее предположение без специальных оговорок принимается в дальнейшем). Свойства таких решений зависят от геометрии x^2-линий:

(1) если $b_{22} \neq 0$, т. е. x^2-линии нигде не касаются асимптотических линий срединной поверхности, то

$$r = \tfrac{1}{2} \tag{3.6.3}$$

(2) если $b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$, т. е. x^2-линии являются асимптотическими линиями на поверхности отрицательной гауссовой кривизны, то

$$r = \frac{1}{3} - \frac{t+s}{3} \tag{3.6.4}$$

где t и s определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\frac{\partial \chi}{\partial x^2} - \chi\left[\left\{ {1 \atop 1\ \ 2} \right\} - \frac{b_{11}}{2b_{12}}\left\{ {1 \atop 2\ \ 2} \right\}\right] \approx \bar{h}^{2s}\chi \\ \frac{\partial w}{\partial x^2} - w\left[\left\{ {1 \atop 1\ \ 2} \right\} - \frac{b_{11}}{2b_{12}}\left\{ {1 \atop 2\ \ 2} \right\}\right] \approx \bar{h}^{2t} w\end{gathered} \tag{3.6.5}$$

(3) если $b_{22} = b_{12} = 0$, $b_{12} \neq 0$, т. е. x^2-линии являются асимптотическими линиями на поверхности нулевой гауссовой кривизны, то

$$r = \frac{1}{4} - \frac{t+s}{4} \tag{3.6.6}$$

где t и s определяются соотношениями

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial \chi}{\partial x^2}\left\{ {2 \atop 2\ \ 2} \right\} \approx \bar{h}^{2s}\chi \\ \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x^2}\left\{ {2 \atop 2\ \ 2} \right\} \approx \bar{h}^{2t} w\end{gathered} \tag{3.6.7}$$

Таким образом, только при $b_{22} \neq 0$ число r не зависит от поведения искомых функций вдоль x^2-линии. Условие $1/_4 \leqslant r$ будет выполнено при $t+s \leqslant 0$. Если $t+s > 0$, то системой (3.4.1) без дополнительных исследований пользоваться нельзя.

Система (3.4.1) употреблялась рядом авторов для решения различных задач. Ею пользовался Донелл [27, 28] для изучения местной потери устойчивости цилиндрической оболочки. В работе [29] к этим же уравнениям сведен расчет произвольных пологих оболочек. Последнее является законным, поскольку на пологой оболочке всегда можно выбрать такую систему гауссовых координат, что будет выполняться условие $a_{mn} \leqslant K^{-1}$, однако следует отметить, что линии кривизны, использованные в [29], не всегда обладают таким свойством. Уравнения (3.4.1) сохраняют при этом свою силу, так как они инвариантны относительно преобразования координат, но формулы (3.4.2) и (3.4.3) могут оказатся неправильными.

Для вычисления краевого эффекта уравнения (3.4.1) использованы в [3, 24].

7. Виды краевых эффектов. Вообще говоря, смешанное напряженное состояние дает ту часть полного напряженного состояния, усилия и деформации которого затухают при удалении от границы, причем r показывает интенсивность этого затухания. Мы видим, что интенсивнее всего затухание вблизи края, не касающегося асимптотических линий. Этот вид напряженного состояния был рассмотрен Лявом на примерах оболочек вращения, срезанных вдоль параллелей географической системы координат. Естественно поэтому, следуя Ляву, назвать его краевым эффектом.

Вдоль края, совпадающего с асимптотической линией, явление значительно осложняется, так как r зависит от t и s, т. е. в конечном итоге от граничных условий. При $t+s > 0$ может оказаться, что $r \leqslant 0$, т. е. затухание вообще не будет иметь места. Это дает основание говорить, что вблизи края имеет место обобщенный краевой эффект.

8. Обобщенный краевой эффект в оболочке нулевой гауссовой кривизны. Случай $t+s>0$ исследован только для оболочки нулевой гауссовой кривизны. Полученные результаты [25] мы опишем, отказавшись от тензорной символики и приняв обозначения Лява.

Пусть срединная поверхность оболочки отнесена к линиям кривизны (α, β), причем α-линии имеют нулевую кривизну и параметр α выбран так, что первая квадратичная форма поверхности будет иметь вид $ds^2 = d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$.

Тогда искомые величины обобщенного краевого эффекта могут быть выражены через две функции t и m следующими формулами:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial \beta} \\
T_2 &= \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{R_2}{B}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial m}{\partial \beta}\right)\right] \\
S_1 &= -S_2 = -\frac{\partial t}{\partial \alpha}
\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

$$2Eh\varepsilon_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial \beta}, \qquad 2Eh\varepsilon_2 = -\frac{\sigma}{B}\frac{\partial t}{\partial \beta}, \qquad 2Eh\frac{\omega}{2} = -(1+\sigma)\frac{\partial t}{\partial \alpha} \tag{3.8.2}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{\sigma}{B}\frac{\partial m}{\partial \beta}, & G_2 &= -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial \beta} \\
H_1 &= +\frac{h^2}{3(1+\sigma)}\frac{\partial m}{\partial \alpha}, & H_2 &= -\frac{h^2}{3(1+\sigma)}\frac{\partial m}{\partial \alpha} \\
N_1 &= \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{B^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial m}{\partial \beta}, & N_2 &= -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial \beta}
\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

$$2Eh\varkappa_1 = -\frac{R_2}{B}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta}\right)\right], \quad 2Eh\varkappa_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial \beta}, \quad 2Eh\tau = \frac{\partial m}{\partial \alpha} \tag{3.8.4}$$

причем t и m должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}N(m) = 0, \qquad \frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial \alpha} + N(t) = 0 \tag{3.8.5}$$

где N — линейный дифференциальный оператор

$$N = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{R_2}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{BR_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{R_2}{B}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial}{\partial \beta} \tag{3.8.6}$$

Полная система уравнений тонких оболочек, описанных по развертывающимся поверхностям, будет при $\bar{h} \to 0$ сколь угодно точно удовлетворяться, если мы ограничимся употреблением только таких интегралов уравнений (3.8.5), которые обладают следующими асимптотическими свойствами:

(1) t и m при каждом дифференцировании по β увеличиваются в $\bar{h}^{-r}$ раз:

(2) $$\frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial \alpha} \approx \bar{h}^{2\rho_1}t. \qquad \frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial \alpha} \approx \bar{h}^{2\rho_2}m$$

(3) $$\lambda\frac{\partial t}{\partial \alpha} \approx \bar{h}^{\tau_1}t, \qquad \lambda\frac{\partial m}{\partial \alpha} \approx \bar{h}^{\tau_2}m$$

(4) t и m или какие-либо их производные не могут существенно увеличиваться при дифференцировании по α.

Числа r, τ_1, τ_2, ρ_1, ρ_2 должны удовлетворять таким соотношениям:

$$\tau_1 \geqslant \rho_1, \qquad \tau_2 \geqslant \rho_2, \qquad \rho_1 + \rho_2 \geqslant 0, \qquad r = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}(\rho_1 + \rho_2)$$

Отметим, что система (3.8.5) для цилиндрических и конических оболочек может быть проинтегрирована методом разделения переменных. Это вытекает из того, что, как известно, для цилиндрической оболочки $B = B(\beta)$ и $R_2 = R_2(\beta)$ и для конической оболочки $B = \alpha\bar{B}(\beta)$, $R_2 = \alpha\bar{R}_2(\beta)$.

9. Влияние геометрической конфигурации срединной поверхности и граничных условий на напряженное состояние оболочки. Напряженное состояние весьма широкого класса оболочек складывается из безмоментного, моментного и смешанного напряженного состояний.

Ниже описываются виды оболочек, для которых можно заранее сказать, какую именно комбинацию надо брать в данном конкретном случае.

(A) Оболочка, допускающая выделение безмоментного и моментного напряженных состояний, края которой нигде не касаются асимптотических линий срединной поверхности (сюда, в частности, относятся все оболочки положительной гауссовой кривизны).

В этом случае решение можно искать в виде суммы безмоментного и моментного напряженных состояний и краевого эффекта. Исключение представляют оболочки, в которых граничные условия таковы, что искомые функции при дифференцировании вдоль границы увеличиваются более чем в $\overline{h}^{-\frac{1}{2}}$ раз. Наоборот, если граничные условия таковы, что искомые функции при дифференцировании вдоль края существенно не увеличиваются, то интеграл системы уравнений (3.4.1), определяющий краевой эффект, можно с достаточной точностью брать в виде

$$2Ehw = \sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2}}\,[f_1(x^2)\cos qx^1 + f_2(x^2)\sin qx^1]\,e^{qx^1}$$

$$\left(\overline{h} = -\frac{a_{22}h}{b_{22}a_{11}}\right)$$

$$\chi = [-f_1(x^2)\sin qx^1 + f_2(x^2)\cos qx^1]\,e^{qx^1}$$

$$\left(q = \sqrt[4]{\frac{3}{4}(1-\sigma^2)}\,\overline{h}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции; предполагается, что уравнение края $x^1 = x_0^1$ и движению внутрь области соответствует $x^1 < x_0^1$.

Эти формулы получаются путем отбрасывания в уравнениях членов порядка $\overline{h}^{-\frac{1}{2}}$ по сравнению с единицей; они являются обобщением тех формул, которые предложил Геккелер [31] для определения краевого эффекта вдоль параллели оболочки вращения, работающей в симметричных условиях.

(B) Оболочка нулевой гауссовой кривизны, допускающая выделение безмоментного и моментного напряженных состояний и имеющая края, которые касаются асимптотических линий или совпадают с ними.

Такие оболочки можно рассчитывать при помощи решения системы (3.4.1), используя при этом все (затухающие и незатухающие) интегралы этих уравнений.

(C) Оболочка нулевой гауссовой кривизны, не допускающая выделения безмоментного и моментного напряженных состояний.

В этом случае решение можно искать в виде суммы обобщенного краевого эффекта, соответствующего системе (3.8.5), и краевых эффектов вдоль каждой из границ, не совпадающих с асимптотической линией. При некоторых видах внешней нагрузки или граничных условий может оказаться, что соотношение $\rho_1 + \rho_2 \geqslant 0$ не имеет места; тогда оболочку надо отнести к виду (A), если она не имеет краев, касающихся асимптотических линий, или к виду (B), если она имеет такие края. Наоборот, если условие $\rho_1 + \rho_2 \geqslant 0$ окажется выполненным в случае (B), то оболочку надо рассчитывать так, как если бы она принадлежала к виду (C).

Для цилиндрической оболочки, и только для нее, систему (3.8.5) можно получить при помощи следующих предположений:

(1) в уравнениях равновесия пренебрежимо мала роль моментов H_1, H_2, G_1 и поперечных сил N_1;

(2) в уравнениях неразрывности пренебрежимо мала роль деформаций ω и ε_2.

Основываясь на этих гипотезах, в [32] получен ряд далеко идущих результатов для цилиндрических оболочек, которые так загружены и закреплены по краям, что их можно отнести к виду (C).

4. Безмоментная теория оболочек

Работы советских авторов в области безмоментной теории оболочек в основном были посвящены различным приемам разыскания общего интеграла уравнений равновесия. В последнее время было показано, что, ограничиваясь заданием средней поверхности в линиях кривизны, мы иногда вносим в безмоментную теорию излишнюю сложность. Будем поэтому предполагать, что срединная поверхность оболочки отнесена к произвольным, вообще говоря, неортогональным координатам.

1. Уравнения безмоментной теории оболочек. Полную систему уравнений безмоментной теории можно, пользуясь соотношениями раздела (2.2), записать в виде векторного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial x^2}+\mathbf{X}=0 \qquad (\mathbf{P}_m=c_{\alpha m}\,T^{\alpha\beta}\,\mathbf{r}_\beta) \tag{4.1.1}$$

и дополнительного соотношения

$$c_{\alpha\beta}\,T^{\alpha\beta}=\sqrt{a}\,(T^{12}-T^{21})=0 \tag{4.1.2}$$

Введем обозначение $S_{mn}=c_{\alpha m}\,c_{\beta n}\,T^{\alpha\beta}$; тогда $\mathbf{P}_m=S_{mn}\,c^{n}\ \mathbf{r}_s$, или

$$\mathbf{P}_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\,(S_{11}\,\mathbf{r}_2-S_{12}\,\mathbf{r}_1), \qquad \mathbf{P}_2=\frac{1}{\sqrt{a}}\,(S_{12}\,\mathbf{r}_2-S_{22}\,\mathbf{r}_1)$$

Дополнительное соотношение (4.1.2) сводится теперь к условию симметрии $S_{12}=S_{21}$ и векторное уравнение (4.1.1) эквивалентно трем соотношениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial S_{12}}{\partial x^1}-G^1_{21}S_{11}+(G^1_{11}-G^2_{12})\,S_{12}+G^2_{11}\cdot S_{22}+\sqrt{a}\,X^2=0\\ \frac{\partial S_{22}}{\partial x^1}-\frac{\partial S_{12}}{\partial x^2}+G^1_{22}\,S_{11}+(G^2_{22}-G^1_{12})\,S_{12}-G^2_{12}\,S_{22}+\sqrt{a}\,X^1=0\\ b_{22}\,S_{11}+b_{11}\,S_{22}-2b_{12}\,S_{12}+\sqrt{a}\,x=0\end{gathered} \tag{4.1.3}$$

К интегрированию этой системы сводится в самом общем случае задача о разыскании тангенциальных усилий безмоментной оболочки. Можно получить[22] и одно уравнение, эквивалентное системе (4.1.3). Для этого воспользуемся выражениями тензоров усилий и моментов через функции напряжения. Положим в третьей из формул (2.2.4) $N^m=0$, это дает

$$N^m=c^{ms}\,\nabla_s\,\eta+c^{ms}\,c^{\alpha\beta}\,b_{\alpha s}\,(\nabla_\beta\,\chi-b^t_{\cdot\beta}\,\psi_t)=0 \tag{4.1.4}$$

замечая, что

$$-K^{-1}b_{ms}\,c^{st}\,c^{\alpha n}\,b_{\alpha t}=a_m^{\cdot n}$$

и помножая (4.1.4) на $-K^{-1}\,b_{ms}$, получим

$$K^{-1}\,c^{st}\,b_{ms}\,\nabla_t\,\eta-(\nabla_m\chi-b^s_{\cdot m}\,\psi_s)=0$$

Последнее равенство позволяет исключить выражение $\nabla_m\,\chi-b^s_{\cdot m}\,\psi_s$ в формуле, связывающей T^{mn} с функцией напряжения. Это дает

$$T^{mn}=-c^{m\beta}\,c^{\alpha n}\,\nabla_\alpha\,K^{-1}\,c^{st}\,b_{\beta s}\,\nabla_t\,\eta+c^{sn}\,b^m_{\cdot s}\,\eta \tag{4.1.5}$$

Такое выражение для T^{mn} удовлетворяет безмоментным уравнениям (4.1.1), так как они при $N^m=0$ эквивалентны первым двум из уравнений (2.1.3.) Остается потребовать, чтобы выполнялось дополнительное соотношение (4.1.2). Это даст

$$c^{\alpha\beta}\,c^{st}\,\nabla_\alpha\,K^{-1}\,b_{\beta s}\,\nabla_t\,\eta+a^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}\,\eta=0$$

Для η получается такое же уравнение, как и для характеристической функции Вейнгартена, при помощи которой изучаются бесконечно малые изгибания в теории поверхностей (см., например,[33]). Это уравнение известным преобразованием может быть приведено к одной из канонических форм, именно для поверхностей положительной кривизны, и для поверхностей отрицательной кривизны соответственно будет

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2\partial x^2}-M\theta=0, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2\partial x^2}-M\theta=0 \tag{4.1.6}$$

Как известно, для параболоида и прямого геликоида (4.1.6) приводится к уравнению Лапласа.

2. Оболочки, описанные по линейчатым поверхностям. В этом случае в теорию оболочек, пользуясь аналогией между безмоментной теорией и теорией бесконечно малых изгибаний, можно перенести приемы, употребляемые в последней[22].

Отнесем поверхность к асимптотическим линиям; тогда, полагая $K=-1/\rho^2$, получим

$$b_{11}=b_{22}=0, \qquad b_{12}=\sqrt{a}/\rho$$

$$G^1_{11}+G^2_{12}=\frac{\partial\ln\sqrt{a}}{\partial x^1}, \qquad G^2_{12}=\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial x^1}$$

$$G^2_{22}+G^1_{12}=\frac{\partial\ln\sqrt{a}}{\partial x^2}, \qquad G^1_{12}=\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial x^2}$$

Пользуясь этим и вводя обозначения

$$u=\frac{S_{11}}{\sqrt{\rho}}, \qquad X=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x\rho}{2a}\right)+(G^1_{11}-G^2_{12})\frac{x\rho}{2a}+\sqrt{a}X^1\right\}$$

$$v=\frac{S_{22}}{\sqrt{\rho}} \qquad Y=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{x\rho}{2a}\right)+(G^2_{22}-G^1_{12})\frac{x\rho}{2a}+\sqrt{a}X^2\right\}$$

придем к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}+G^2_{11}v+X=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x^1}+G^1_{22}u+Y=0 \tag{4.2.1}$$

Обращение в нуль одной из величин G^2_{11} или G^1_{22} указывает на то, что соответствующая система координатных линий является системой прямолинейных образующих.

В этом случае (4.2.1) интегрируются квадратурами. Пусть, например, $G^2_{11}=0$; общее решение системы (4.2.1) при этом будет

$$u=-\int X dx^2+f(x^1),$$

$$v=\int G^1_{22}\,dx^1\int X dx^2-\int G^1_{22} f(x^1)\,dx^1-\int Y dx^1+\varphi(x^2)$$

3. Оболочки нулевой кривизны. Отнесем срединную поверхность к линиям кривизны и будем считать для определенности, что нулевую кривизну имеют α-линии. Тогда первую квадратичную форму можно привести к виду $ds^2=d\alpha^2+B^2d\beta^2$.

При этом уравнения равновесия безмоментной теории примут вид (в обозначениях Лява)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)-\frac{1}{B}\frac{\partial S_2}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+X=0\\
&\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2S_1)+\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+Y=0\\
&\frac{T_2}{R_2}+Z=0 \qquad\qquad S_1+S_2=0
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Эти уравнения без труда интегрируются[34]

$$T_2 = -R_2 Z, \qquad S_1 = -S_2 = \frac{1}{B^2}\left\{\int\left[B\frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 Z) - B^2 Y\right]d\alpha + F_1(\beta)\right\}$$

$$T_1 = -\frac{1}{B}\int\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B^2}\left[\int\left(B\frac{\partial}{\partial\beta}(R_2 Z) - B^2 Y\right)d\alpha + F_1(\beta)\right]\right\}d\alpha - \tag{4.3.2}$$

$$-\frac{1}{B}\left[\int\left(R_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}Z + BX\right)d\alpha + F_2(\beta)\right]$$

Простота этого результата станет совершенно понятной, если вспомнить, что решенная задача математически эквивалентна разысканию бесконечно малых изгибаний развертывающейся поверхности.

4. Оболочки, описанные по поверхности вращения. Зададим срединную поверхность в линиях кривизны следующими соотношениями:

$$x = r\cos\beta, \qquad y = r\sin\beta, \qquad z = f(r)$$

тогда уравнения равновесия безмоментной теории примут вид (в обозначениях Лява)

$$\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha} - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial AS_2}{\partial\beta} + S_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + ABX = 0, \qquad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + Z = 0$$

$$\frac{\partial AT_2}{\partial\beta} - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial BS_1}{\partial\alpha} + S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABY = 0, \qquad S_1 + S_2 = 0$$

$$A = (1 + r'^2)^{1/2}, \qquad B = r, \qquad R_1 = -\frac{(1 + r'^2)^{3/2}}{r''}, \qquad R_2 = r\,(1 + r'^2)^{1/2}$$

При помощи подстановок

$$S = -\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}; \qquad T_1 = \frac{(1 + r'^2)^{\frac{1}{2}}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \qquad T_2 = \frac{r''}{(1 + r'^2)^{1/2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$$

эта система приводится к одному уравнению[35]

$$r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 2r'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - r''\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = 0 \tag{4.4.1}$$

Если уравнение меридиана имеет вид $z = \lambda r^{\mu}$, где λ, μ—произвольно заданные постоянные величины, то (4.4.1) с помощью замены независимого переменного $\alpha = \ln r$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами[35]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + (2\mu - 1)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \mu(1 - \mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = 0 \tag{4.4.2}$$

Другой класс поверхностей вращения, для которых упрощается интегрирование уравнений безмоментной теории, мы получим, если уравнение меридиана зададим в параметрической форме следующим образом [22]:

$$r = -c\,(ae^{u} + be^{-u}) + (1 + cu)\,(ae^{u} - be^{-u})$$

$$z = -\left[\frac{1}{2}a^2e^{2u} + 2abu - \frac{1}{2}b^2e^{-2u}\right]$$

В этом случае меридианы и параллели образуют изометрическую сетку такую, что в (4.1.6) будем иметь $M = 0$, так что оно превращается в уравнение Лапласа.

5. Оболочки, описанные по поверхностям второго порядка. Мы ограничимся здесь рассмотрением оболочек положительной кривизны, так как остальные оболочки, описанные по поверхностям второго порядка, входят в число задач, рассмотренных в пп. 2 и 3 этого раздела.

Пусть для срединной поверхности оболочки, отнесенной к некоторой, вообще говоря, неортогональной системе координат, выполняются при произвольном μ равенства

$$\mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{22} = -\frac{\partial\ln\mu}{\partial x^1}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial\ln\mu}{\partial x^2}\mathbf{r}_2, \qquad 2\mathbf{r}_{12} = -\frac{\partial\ln\mu}{\partial x^2}\mathbf{r}_1 - \frac{\partial\ln\mu}{\partial x^1}\mathbf{r}_2 \tag{4.5.1}$$

Отсюда, в частности, следует, что выбранная система координат является изотермически сопряженной, т. е.

$$b_{11}=b_{22}=b, \qquad b_{12}=0$$

Пользуясь этим, можно утверждать , что, положив

$$S_{11}=-\sqrt{a}\left(\mu t+\frac{x}{2b}\right), \qquad S_{22}=\sqrt{a}\left(\mu t+\frac{x}{2b}\right), \qquad S_{12}=\sqrt{a}\,\mu s$$

мы тождественно удовлетворим третьему из уравнений (4.1.3). Векторное равенство (4.1.1) при этом примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\mu s\mathbf{r}_1+\mu t\mathbf{r}_2)-\frac{\partial}{\partial x^1}(\mu t\mathbf{r}_1-\mu s\mathbf{r}_2)+X^{*1}\mathbf{r}_1+X^{*2}\mathbf{r}_2=0$$

где

$$X^{*1}=-X^1-\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{x}{2b}+\frac{x}{2b}(G^1_{22}-G^1_{11})$$

$$X^{*2}=-X^2+\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{x}{2b}+\frac{x}{2b}(G^2_{22}-G^2_{11})$$

Производя дифференцирование и заменяя выражения $\mathbf{r}_{12}$ и $\mathbf{r}_{22}-\mathbf{r}_{11}$ при помощи формул (4.5.1) через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, получим после очевидных преобразований систему

$$-\frac{\partial t}{\partial x^1}+\frac{\partial s}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}X^{*1}=0, \qquad \frac{\partial t}{\partial x^1}+\frac{\partial s}{\partial x^2}+\frac{1}{\mu}X^{*2}=0$$

которая при $X^{*1}=X^{*2}=0$ представляет собой уравнения Коши-Римана, показывающие что $t+is=f(x^1+ix^2)$, где f представляет собой аналитическую функцию комплексного аргумента x^1+ix^2.

Чтобы применить этот результат к безмоментной теории оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка, остается показать, что последние можно отнести к такой системе гауссовых координат, чтобы удовлетворились равенства (4.5.1). Для этого зададим эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид соответственно векторными равенствами

$$\mathbf{r}=+a\frac{\cos x^2}{\operatorname{ch} x^1}\mathbf{i}_1+b\frac{\sin x^2}{\operatorname{ch} x^1}\mathbf{i}_2-c\operatorname{th} x^1\,\mathbf{i}_3 \qquad (\mu=\operatorname{ch}^2 x^1)$$

$$\mathbf{r}=-a\frac{\cos x^2}{\operatorname{sh} x^1}\mathbf{i}_1-b\frac{\sin x^2}{\operatorname{sh} x^1}\mathbf{i}_2-c\operatorname{cth} x^1\,\mathbf{i}_3 \qquad (\mu=\operatorname{sh}^2 x^1)$$

$$\mathbf{r}=a e^{x^1}\cos x^2\,\mathbf{i}_1+be^{x^1}\sin x^2\,\mathbf{i}_2+\frac{1}{2}e^{2x^1}\,\mathbf{i}_3 \qquad (\mu=e^{-2x^1})$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты ортогональной системы декартовых координат, a, b, c — полуоси рассматриваемых поверхностей. Легко проверить, что при тех значениях μ, которые указаны в скобках для каждой поверхности в отдельности, соотношения (4.5.1) будут удовлетворяться.

Таким образом, к задаче о расчете по безмоментной теории оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка положительной гауссовой кривизны, приложимы методы теории функций комплексного переменного. Этот результат был сначала получен для сферы[37] и поверхностей вращения второго порядка[35], отнесенных к географической системе координат, в которую превращаются в этих случаях примененные здесь координаты. Для произвольных поверхностей второго порядка эти координаты становятся неортогональными.

Если к линиям кривизны отнести произвольную поверхность второго порядка положительной кривизны, то, как показано в[38] и позднее в работах[23,22], безмоментные уравнения также сводятся к условиям Коши-Римана; однако связанные с этим преобразованием формулы становятся значительно сложнее и возникает необходимость ввести эллиптические функции.

5. Некоторые частные задачи теории оболочек

1. Круговая цилиндрическая оболочка. Задача о расчете напряжений в стенке цилиндрического трубопровода, полностью или частично наполненного водой, была предметом обстоятельного исследования в работе [39]. Авторы исходили из предложенной Б. Г. Галеркиным в работе [1] системы дифференциальных уравнений для цилиндрической оболочки [(см. 1. 1.)]; предполагается, что на краях трубопровода $x=\pm\frac{1}{2}l$ обращаются в нуль радиальное перемещение, изгибающий момент, осевое усилие, а также составляющая перемещения по касательной к параллельному кругу. Функция напряжений φ ищется в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого, зависящие от x, определяются из соответствующих дифференциальных уравнений восьмого порядка. Для доведения вычислений до конца необходимо знать корни характеристического уравнения (четвертой степени), вследствие чего не удается получить результативные формулы в алгебраическом виде, а приходится ограничиться рассмотрением определенного числового задания; для случая $h/a=0.005$, $l/a=10$ и $\sigma=0.3$ были проведены обширные и трудные вычисления, их результаты представлены в многочисленных таблицах и графиках. Интересным результатом является появление значительных сжимающих напряжений σ_x в верхней стороне горизонтального частично наполненного трубопровода, что может явиться причиной потери устойчивости стенки.

Эта же задача о цилиндрическом трубопроводе была рассмотрена[6] на основании упрощенных уравнений равновесия цилиндрической оболочки; функция напряжений φ здесь определяется из дифференциального уравнения

$$\left(\Delta^4+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2h^2}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\varphi=\frac{q}{D} \tag{5.1.1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, q — нагрузка на единицу площади, нормальная стенке цилиндра, Δ — лапласов оператор. Это уравнение полностью соответствует уравнению (3.4.1), которое было выше введено при рассмотрении краевого эффекта. Через функцию φ выражается радиальное перемещение $w=\Delta^2\varphi$, а по формулам теории пластин через w находятся изгибающие моменты и перерезывающие силы; растягивающие усилия и касательные усилия определяются по формулам плоской задачи теории упругости, если в качестве функции напряжений плоской задачи (функции Эри) принять $(Eh/a)\,\partial^2\varphi/\partial x^2$. Эти упрощенные уравнения могут быть получены способом, указанным в разделе 1.1, если в (1.1.1) или в (1.1.3) отбросить слагаемое z/a по сравнению с 1 и в дальнейшем построении отбрасывать все слагаемые такого же порядка. Наименее благоприятные расчетные результаты эта приближенная теория должна давать, если нагрузка на оболочку резко изменяется в направлении касательной к параллельному кругу и, наоборот, мало изменяется вдоль образующей цилиндра. Поэтому, хорошо описывая явления краевого эффекта, эта система дифференциальных уравнений должна давать наименее точные результаты, например, при разыскании напряженного состояния в средних сечениях частично наполненного трубопровода.

Решение этой задачи здесь получается в форме ординарного ряда, коэффициенты которого определяются в общем виде; они могут быть значительно упрощены за счет отбрасывания некоторых несущественных слагаемых; это дает возможность получить достаточно простые формулы, позволяющие производить расчет при любом задании параметров трубопровода. Таким образом, в частности, удалось получить все числовые результаты, приведенные в [39], причем оказалось, что расхождение даже в указанном выше наиболее неблагоприятном случае лежит во вполне допустимых для технического расчета границах.

Применимость этих результатов ограничивается случаем не очень больших значений параметра l/a; это можно пояснить, например, тем, что в случае плоской деформации (т. е. при $l\to\infty$) применение уравнения (5.1.1) эквивалентно отбрасыванию слагаемого w в известном уравнении изгиба круговой арки

$$\frac{d^2w}{d\vartheta^2}+w=\frac{Ma^2}{EJ}$$

То же упрощенное уравнение цилиндрической оболочки (5.1.1) было применено в [40] к рассмотрению задачи о концентрации напряжений в области малого отверстия, сделанного в теле цилиндрической оболочки. Предполагается, что оболочка растянута усилиями hp вдоль образующих и hq вдоль параллельных кругов. Решение дается в форме ряда по степеням параметра ρ_0^2/ah, где ρ_0 — радиус отверстия, a — радиус цилиндра, h — толщина стенки, предполагая малость этого параметра. Нормальные напряжения вдоль контура отверстия, равномерно распределенные по толщине стенки, определяются по формуле

$$\sigma_\lambda = [p+q-2(p-q)\cos 2\lambda] + \sqrt{3(1-\sigma^2)}\,\frac{\pi\rho^2}{4ah}\,[2q-(p-3q)\cos 2\lambda] \tag{5.1.2}$$

Первая группа слагаемых в (5.1.2) соответствует известному решению задачи о концентрации напряжений в плоском равномерно напряженном поле, ослабленном круговым вырезом; второе слагаемое дает поправку вследствие наличия кривизны. Например, при $p=0.5\ q=p_0a/2h$, что соответствует случаю цилиндра, находящегося под внутренним давлением p_0, коэффициент концентрации напряжений, равный для плоского листа 2, приобретает множитель $1+2.3\rho_0^2/ah$.

Вдоль контура отверстия распределены также изгибные напряжения σ'_λ (линейно изменяющиеся по толщине стенки). Их выражение при $p=\frac{1}{2}q$ будет (5.1.3)

$$\sigma'_\lambda = -\frac{q\rho_0^2}{ah}\left[3.9\ln\frac{\rho_0^2}{\sqrt{ah}} + 1.361 + \cos 2\lambda\left(0.996 - 1.035\ln\frac{\rho_0}{\sqrt{ah}}\right) - 0.154\cos 4\lambda\right]$$

Напряженное состояние в области отверстия имеет местный характер; при удалении от отверстия напряжения затухают; это затухание определяется наличием в выражениях для напряжений множителя

$$\frac{1}{\sqrt{\beta\rho}}\,e^{-\beta(\rho-|x|)} \qquad \left(\beta=\sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{ah}}\right) \tag{5.1.4}$$

где x — координата, отсчитываемая вдоль образующей от центра отверстия, ρ — расстояние от рассматриваемой точки до центра отверстия, отсчитываемое по геодезической линии. На образующей, проходящей через центр отверстия, $\rho=|x|$ и затухание добавочных напряжений, вносимых отверстием, происходит очень медленно; наоборот, вдоль параллельного круга, проведенного через центр отверстия $x=0$, и затухание происходит наиболее интенсивно.

Задача о цилиндрическом своде рассматривалась в[41, 42, 6].

2. Сферическая оболочка. Отличительной особенностью сферической оболочки является то обстоятельство, что в ней (и только в ней) разложение полного напряженного состояния, описанное в гл. 3, может быть выполнено точно, т. е. соотношения упругости можно взять в таком виде, что полная система уравнений сферической оболочки распадается на три самостоятельные системы, каждая из которых определит соответственно безмоментное и моментное напряженные состояния и краевой эффект [46]. Этого можно достичь, если принять для тензоров E, F, G, H, фигурирующих в соотношениях упругости (2.6.1), выражения (2.6.3), т. е. если сохранить в выкладках все степени h до h^3 включительно. При этом определение краевого эффекта сводится к интегрированию уравнения

$$R\triangle U + (1+ik)U = 0 \tag{5.2.1}$$

где

$$U = (-\sigma + ik)\frac{G}{R} + (1+\sigma)T,\ G=G_1+G_2,\ T=T_1+T_2,\ k^2=\left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1-\sigma^2)-1$$

а $\triangle$ — оператор Лапласа на сфере, который, считая сферу отнесенной к ортогональным координатам, можно записать в обозначениях Лява так:

$$\triangle = \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right\}$$

К уравнению (5.2.1) различными путями пришел ряд авторов, рассматривавших вопрос о расчете сферических оболочек с помощью тригонометрических рядов [43,44,45].

В гл. 4 было показано, что в сферической оболочке искомые величины безмоментного и моментного напряженных состояний выражаются через действительную и мнимую части двух аналитических функций комплексного переменного.

Можно указать также общее решение уравнения (5.2.1). Оно, если считать, что сфера отнесена к географическим координатам (θ, φ), имеет вид[47]

$$U(\theta, \varphi) = \Phi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)} - \int_0^1 [\Phi_1(zt) + \overline{\Psi_1(zt)}] \frac{\partial}{\partial t} P_n[t + (1-t)\cos\theta]\, dt$$

где $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ — аналитические функции комплексного аргумента $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta e^{i\varphi}$, а n — комплексное число, определяемое равенством $n(n+1) = 1 + ik$.

Пользуясь возможностью расчленить полное напряженное состояние, можно составить в замкнутом виде решение сферической оболочки на действие произвольной системы сосредоточенных сил[46]. Для этого надо подобрать F и Φ — аналитические функции комплексного переменного, определяющие соответственно безмоментное и моментное напряженные состояния, и функцию U так, чтобы в заданных точках они имели особенности, соответствующие рассматриваемым сосредоточенным силам.

Особенность функции F определяется чисто статическими соображениями, особенность Φ определяется требованием, чтобы перемещения оставались однозначными при обходе точки приложения сосредоточенной силы по замкнутому контуру. Особенность функции U определяется требованием, чтобы вблизи точек приложения сосредоточенных сил искомые величины (усилия, моменты, перемещения) вели себя так же, как соответствующие величины в пластинке или в плоской задаче теории упругости.

Подбор F и Φ выполняется элементарно. Подбор функции U удобнее всего проделать, перенеся полюс сферы в интересующую нас точку. Тогда дело сводится к разысканию функции U, которая имеет определенные особенности только при $\theta = 0$. Это приводится к решению уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dU_\mu}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right] U_\mu = 0 \qquad (\mu = 0,\ 1)$$

которое интегрируется в функциях Лежандра с комплексным значком n.

3. Коническая оболочка. Вопрос о кручении и изгибе конической оболочки с произвольным поперечным сечением рассмотрен в[48]. Предполагается, что оболочка нагружена силами и моментами, распределенными по ее краям, и рассматривается случай, когда толщина стенки изменяется линейно в зависимости от расстояния до вершины конуса. Соотношения между усилиями и деформациями берутся в общепринятой форме, но для касательных усилий S_1 и S_2 принимаются выражения (см. также[19])

$$S_1 = S_0 + \frac{1}{2}\frac{H}{R_2}, \qquad S_2 = -S_0 + \frac{1}{2}\frac{H}{R_2}, \qquad S_0 = \frac{Eh}{2(1+\sigma_2)}\omega \qquad (5.3.1)$$

что позволяет строго удовлетворять шестому уравнению статики и обеспечивает выполнимость теоремы взаимности Бетти.

Оказывается возможным найти точные интегралы получающейся системы дифференциальных уравнений (уравнений статики и условий неразрывности, выраженных через усилия); эти интегралы содержат достаточное число произвольных элементов, позволяющих удовлетворять условиям на краях в смысле Сен-Венана; при этом оказывается, что эти решения можно искать в предположении $T_2 = 0$, $G_2 = 0$.

Полученные результаты позволяют выяснить, что следует понимать под термином «ось жесткости» оболочки и «центр жесткости» сечения. Особо подробно рассмотрен случай малой конусности, имеющий наибольшее практическое значение в авиастроении.

4. Оболочка вращения. Задача о напряженном состоянии симметрично нагруженной оболочки вращения подробно рассмотрена в первой части монографии[6]. Известно, что этой задаче посвящено было громадное число работ, начинающихся с известных исследований Рейснера, Майснера и Блюменталя. Дело сводится к разысканию одной комплексной функции

$$S = \vartheta - i\sqrt{12(1-\sigma^2)}\,\frac{V}{Eh^2} \qquad (5.4.1)$$

через вещественную и мнимую части которой могут быть выражены все усилия и моменты в оболочке. Эта функция S определяется из дифференциального уравнения

$$\ddot{S}-\frac{\sin\alpha}{\nu}\dot{S}-\frac{\sin^2\alpha}{\nu^2}S+\sqrt{12(1-\sigma^2)}\,i\frac{S\cos\alpha}{h\nu}=\Psi(s) \tag{5.4.2}$$

где точками обозначено дифференцирование по дуге меридиана s, α—угол между касательной к меридиану и осью вращения, ν—расстояние точки меридиана от оси поверхности вращения и $\Psi(s)$—функция, зависящая от внешних нагрузок.

Известно, что Мейснер, Болле, Вислер дали строгие решения уравнения (5.4.2) для случаев шара и конуса. Но, поскольку в ходе вывода этого уравнения пренебрегалось слагаемыми, соизмеримыми с $\bar{h}$ по сравнению с единицей, нет оснований удерживать эти члены и в самих решениях (5.4.2). Эта мысль последовательно проведена в [6], где для случая конуса и шара построены решения с учетом слагаемых, соизмеримых с $\bar{h}^{1/2}$. Решения эти приобретают очень простую форму, если считать возможным отбрасывать также и эти слагаемые. В этом последнем случае решение может быть построено при произвольной форме меридиана. Вычисление ведется в форме, несколько отличной от той, которая была применена в известном исследовании Геккелера[31]. Вводятся независимое переменное x и новая искомая функция τ, так что

$$x=\pm\sqrt[4]{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{s_0}^{s}\sqrt{\frac{\cos\alpha}{\nu}}\,ds,\qquad \tau=\sqrt[4]{\nu\cos\alpha}\,S \tag{5.4.3}$$

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (5.4.2), принимает вид

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}+\left(2i+\frac{1}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{h\cos\alpha}{\nu}\mu\right)\tau=0 \tag{5.4.4}$$

в котором

$$\mu=-\frac{15}{16}f'^2-\frac{7}{16}\frac{f^2f'^2f''^2}{(1+f'^2)^2}+\frac{1}{4}\frac{f^2f''^2}{(1+f'^2)^2}-\frac{1}{4}\frac{ff''}{1+f'^2}+\frac{1}{8}\frac{ff'^2f''}{1+f'^2}+\frac{1}{4}\frac{f^2f'f'''}{1+f'^2} \tag{5.4.5}$$

и $\nu=f(z)$—уравнение меридиана, $f(z)$—однозначная и непрерывная функция вместе со своими производными до третьего порядка включительно при $z_0\leqslant z\leqslant z_1$.

Если меридиан не пересекает оси вращения, т. е. $f(z)$ отлично от нуля в указанном замкнутом интервале, то оболочка принадлежит к цилиндрическому классу. Вместо (5.4.4) в таком случае можно рассмотреть уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}+2i\tau=0 \tag{5.4.6}$$

интегрируемое элементарно. В этом приближении был, например, рассмотрен [6] случай оболочки, снабженной гофром:

$$\nu=a-c\cos\frac{\pi z}{l}\qquad(\text{при } c<a) \tag{5.4.7}$$

Если $f(z_1)=0$, но $f'(z_1)$ остается конечной, то оболочка принадлежит коническому классу. Дифференциальное уравнение (5.4.4) может быть приведено к виду

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}+\left[2i-\frac{15}{4x^2}+\bar{h}F(x)\right]\tau=0 \tag{5.4.8}$$

где $F(x)$ остается конечной при $x=0$ (что соответствует $z=z_1$) и в первом приближении может быть заменено уравнением Бесселя

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}+\left(2i-\frac{15}{4x^2}\right)\tau=0$$

Использованию асимптотического представления функций Бесселя (большое x) соответствует удаление от конической точки поверхности, что возвращает к случаю оболочки цилиндрического класса. При малых x, т. е. в области конической точки, используется представление решений уравнения Бесселя в форме степенного ряда.

Наконец, если меридиан пересекает ось вращения под прямым углом, т. е. при $f(z_1)=0$, $1/f'(z)=0$, то имеем случай оболочки сферического класса. В окрестности $z=z_1$ функция $f(z)$ представляется в форме разложений

$$f(z)=(z-z_1)^n\left[a+b(z_1-z)+\ldots\right]$$

где $n<1$; например, $n=\frac{1}{2}$, $a=\sqrt{2R}$, $b=(8R)^{-1/2}$ для сферы радиуса R.

При $n\leqslant\frac{1}{2}$ уравнение (5.4.4) приводится при пренебрежении членами, соизмеримыми с $\bar{h}$, к виду

$$\frac{d^2\tau}{dx^2}+\left(2i-\frac{4n-\frac{1}{4}}{x^2}\right)\tau=0 \qquad (5.4.9)$$

Общее решение последнего уравнения также представляется через бесселевы функции порядка $2n$ от аргумента $x\sqrt{2i}$.

Подробное вычисление было проведено для случая цилиндра со слабо изогнутым днищем при $n=\frac{1}{4}$; для этого значения n (5.4.9) интегрируются элементарно. Результат вычисления показывает значительное влияние даже весьма малой кривизны днища на напряженное состояние в нем; в случае плоского днища получилось бы резко отличное (и менее благоприятное с точки зрения прочности) распределение напряжений.

Поступила в редакцию
9 V 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой цилиндрической оболочки. ДАН. 1934. IV. № 5—6. Стр. 270—275.
2. Лурье. А. И. Исследования по теории упругих оболочек. Тр. Ленингр. Инд. Института. 1937. Вып. 3. № 6. Стр. 37—52.
3. Лурье А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 6. Стр. 393—404.
4. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.
5. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотезы Кирхгофа в теории оболочек. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5. Стр. 323—330.
6. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат. 1947.
7. Кильчевский Н. А. Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы их интегрирования (на украинском языке). Сб. тр. Инст. матем. АН УССР. 1940. Ч. I. № 4. Стр. 84—149. Ч. II. № 5. Стр. 74—97. Ч. III. № 6. Стр. 51—102.
8. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3. Стр. 153—167.
9. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3. Стр. 153—167.
10. Love A. E. H. On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shell. Phil. Trans. Roy. Soc. 1888. Vol. 179 (A).
11. Гольденвейзер А. Л. Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Love. Сб. «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939. Стр. 85—105.
12. Кильчевский Н. А. Некоторые методы интегрирования уравнений равновесия упругих оболочек. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2. Стр. 43—58.
13. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2. Стр. 35—42.
14. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2.
15. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ. 1945. Т. XI. Вып. 6. Стр. 463—478.
16. Гольденвейзер А. Л. О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. I. Стр. 3—14.
17. Trefftz E. Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit Castilianoschen Prinzip. ZAM. 1940. Bd. 15. H. 1—2. S. 101—108.
18. Новожилов В. В. К вопросу о решении задач теории тонких оболочек в усилиях и моментах. ДАН. 1943. XXXVIII. № 9. Стр. 307—311.
19. Новожилов В. В. Новый метод расчета оболочек. Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1946. № 1. Стр. 35—48.

20. Новожилов В. В. Обобщение метода комплексных перемещений на неоднородную задачу теории оболочек. ДАН. 1945. Т. III. № 6. Стр. 507—510.
21. Новожилов В. В. Расчет оболочек тел вращения. Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1946. № 7. Стр. 949—962.
22. Работнов Ю. Н. Некоторые решения безмоментной теории оболочек. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5-6. Стр. 639—646.
23. Соколовский В. В. Уравнения равновесия безмоментных оболочек. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 1. Стр. 57—64.
24. Гольденвейзер А. Л. Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3. Стр. 387—396.
25. Гольденвейзер А. Л. О приближенных методах расчета оболочек нулевой гауссовой кривизны. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4. Стр. 409—422.
26. W. Z. Chien. The Intrinsic Theory of Thin Shell and Plates. Quarterly of Applied Mathematics. 1944. Vol. I. No. 4; vol. II. No. 1; No. 2.
27. Donell L. Stability of Thin-Walled Tubes Under Torsion. NACA. 1933. Rep. 479.
28. Donell L. Discussion of Thin Shell Theory. Proc. of fifth Congr. for Appl. Mech. 1939.
29. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 2. Стр. 109—140.
30. Работнов Ю. Н. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН. 1945. Т. XVII. № 5. Стр. 334—336.
31. Geckeler. I.W. Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forschungsarbeiten auf dem Gebet d. Ingenieurwesens. 1929. Nr. 276.
32. Власов В. З. Строительная механика оболочек. ОНТИ. 1936. М.—Л.
33. Bianchi L. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig. 1899.
34. Соколовский В. В. Замечания к статье: Уравнения равновесия безмоментных оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 1. стр. 88.
35. Власов В. З. Расчет некоторых оболочек вращения на несимметричную произвольную нагрузку. Проект и стандарт. 1937. № 2. Стр. 40.
Власов. В. З. Безмоментная теория тонких оболечек, очерченных по поверхностям вращения. ПММ 1947. Т. XI. Вып. 4. Стр. 397—408.
36. Гольденвейзер А. Л. Безмоментная теория оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка. ПММ. 1947. XI. Вып. 2. Стр. 285—290.
37. Гольденвейзер А. Л., Мрощинский А. К., Репман Ю. В. Методы расчета сферических куполов по безмоментной теории. Сб. «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939. Стр. 5—26.
38. Власов В. З. Расчет оболочек, очерченных по центральным поверхностям второго порядка. Там же. Стр. 27—40.
39. Галеркин Б. Г., Перельман Я. И. Напряжения и перемещения в круговом трубопроводе. Изв. Научно-исследов. ин-та гидротехники. 1946. Т. XXVII.
40. Лурье А. И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3. Стр. 397—406.
41. Гольденвейзер А. Л. Расчет тонкостенных оболочек и складок, опирающихся на жесткие диафрагмы, с учетом изгибающих и крутящих моментов. Сб. «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939. Стр 40—62.
42. Новожилов В. В., Слепов Б. И. Расчет напряжений в конструкциях корпуса подводных лодок с учетом влияния поперечных переборок. Труды ЦНИИ. № 45. МСП им. акад. А. Н. Крылова. Оборонгиз. 1945.
43. Соколовский В. В. Расчет сферических оболочек. ДАН. 1937. Т. XVI. № 1.
44. Репман Ю. В. Расчет сферических оболочек по моментной теории на несимметричную нагрузку. Сб. «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1937. Стр. 106—148.
45. Новожилов В. В. Расчет сферической оболочки. ДАН. 1940. Т. XXVIII. № 7.
46. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 6. Стр. 441—467.
47. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5. Стр. 368—388.
48. Балабух Л. И. Изгиб и кручение конических обоолчек. Труды ЦАГИ. 1946. № 577.