Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ СУММ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

А. П. Проскуряков

(Москва)

В теории уравнения Хилла [1] приходится вычислять суммы вида

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F(n)}{[(n+k_1)^2-a]\ldots[(n+k_p)^2-a]} \tag{1}$$

где $F(n)$—полином от n степени не выше $2p-2$; далее, $k_1,\ldots,k_p$—целые числа, не равные между собой, a—постоянная, отличная от целого числа или нуля.

Представим каждый член ряда в виде суммы дробей

$$\frac{F(n)}{[(n+k_1)^2-a]\ldots[(n+k_p)^2-a]}=\frac{A_1n+B_1}{(n+k_1)^2-a}+\ldots+\frac{A_pn+B_p}{(n+k_p)^2-a} \tag{2}$$

Произведем замену значков суммирования $n+k_1=n_1,\ldots,n+k_p=n_p$ и отбросим индексы у новых значков. После перегруппировки членов получим

$$S=\lim_{r\to\infty}\Big[\sum_{n=-r}^{r}\frac{(A_1+A_2+\ldots+A_p)\,n+B_1+B_2+\ldots+B_p-k_1A_1-k_2A_2-\ldots k_pA_p}{n^2-a}+$$

$$+\sum_{n=r+1}^{r+k_1}\frac{A_1n+B_1-k_1A_1}{n^2-a}-\sum_{n=-r}^{-r+k_1-1}\frac{A_1n+B_1-k_1A_1}{n^2-a}+\ldots+$$

$$+\sum_{n=r+1}^{r+k_p}\frac{A_pn+B_p-k_pA_p}{n^2-a}-\sum_{n=-r}^{-r+k_p-1}\frac{A_pn+B_p-k_pA_p}{n^2-a}\Big]$$

Количество слагаемых в дополнительных суммах конечно и равно $2(k_1+\ldots k_p)$. При переходе к пределу каждое из этих слагаемых стремится к нулю. Кроме того, из условия, наложенного на полином $F(n)$, имеем $A_1+A_2+\ldots+A_p=0$.

Следовательно,

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{B_1+\ldots+B_p-k_1A_1-\ldots-k_pA_p}{n^2-a}=$$

$$=-(B_1+\ldots+B_p-k_1A_1-\ldots-k_pA_p)\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a} \tag{3}$$

так как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-a}=-\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{a}$$

Умножим обе части равенства (2) на $(n+k_1)^2-a$ и положим, что n равно одному из корней уравнения $(n+k_1)^2-a=0$; например $n=\sqrt{a}-k_1$. Получим

$$A_1\sqrt{a}+B_1-k_1A_1=\lim_{n\to\sqrt{a}-k_1}\{\Phi(n)\,[(n+k_1)^2-a]\}$$

Аналогично имеем для других k_m. Сложим эти равенства почленно и подставим полученное выражение в формулу (3). Имеем окончательную формулу

$$S = -\sum_{m=1}^{p} \lim_{n \to \sqrt{a} - k_m} \{\Phi(n)[(n+k_m)^2 - a]\} \frac{\pi}{\sqrt{a}} \operatorname{ctg} \pi\sqrt{a} \tag{4}$$

В качестве примера вычислим сумму тройного ряда

$$S = \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2-a)[(n+k)^2-a][(n+k+s)^2-a]}$$

Штрихи в этой формуле указывают, что при суммировании по k пропускаются $k = 0, -s$, а при суммировании по s пропускается $s = 0$.

Производя суммирование последовательно по n и k, получим после некоторых преобразований

$$S = -\frac{\pi \operatorname{ctg} \pi\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1 - 2\pi\sqrt{a} \operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a}}{s^2 - 4a} - \frac{8a}{(s^2-4a)^2}\right]$$

Чтобы вычислить сумму вторых слагаемых в предыдущей формуле, возведем в квадрат обе части следующего равенства

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2 - 4a} = -\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a}$$

Получим

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2-4a)^2} + \sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2-4a)[(s+r)^2-4a]} = \frac{\pi^2}{4a} \operatorname{ctg}^2 2\pi\sqrt{a}$$

Вычисляя двойную сумму, в которой штрих указывает, что при суммировании по k пропускается $k = 0$, находим

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2-4a)^2} = \frac{\pi}{8a}\left[\pi \operatorname{ctg}^2 2\pi\sqrt{a} + \frac{\operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + \pi\right]$$

Производя остальные вычисления, получим окончательно

$$S = \frac{3\pi \operatorname{ctg} \pi\sqrt{a}}{2a\sqrt{a}}\left[\frac{\pi}{\sqrt{a}} \operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a} - \frac{1}{2a} + \frac{2\pi^2}{3}\right]$$

Поступила в редакцию
14 VII 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Прикладная математика и механика. 1946. Том. X, вып. 5—6. Стр. 545—558.

Пользуемся случаем исправить ошибки, обнаруженные в статье [1]. На стр. 546 строки 3—5 должны быть написаны так:

«причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_n^2 + Q_n^2)^{1/2}$$

сходится равномерно в круге $|\alpha| = r$. Этому условию удовлетворяет, например, всякая непрерывная периодическая функция, имеющая ограниченную производную».

На стр. 553 строки 3—9 должны быть заменены на следующие:

«Будем считать, что функция $K(\varphi, \alpha_s)$ такова, что в определенных пределах изменения параметров бесконечный определитель $D(\alpha_s)$ имеет первые производные по этим параметрам. Если при $D(\alpha_s) = 0$ или $D_1^*(\alpha_s) = \pi^{-2}$ производная $\partial D / \partial \alpha_s$ обращается в нуль, то предполагаем существование производных более высокого порядка от $D(\alpha_s)$ до наинизшей не обращающейся в нуль при этих условиях производной».