Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

И. П. Кунце

(Москва)

Будем искать решение задачи об устойчивости за пределом упругости бесконечно длинной круглой цилиндрической оболочки под действием продольных сжимающих сил $\sigma_x = \sigma_s$, считая форму потери устойчивости осесимметричной. Тогда уравнение искривленной формы равновесия оболочки имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} M_1 + \sigma_s h \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{R} T_2 = 0 \tag{1}$$

где w — перемещение точек срединной поверхности оболочки перпендикулярно ее оси, R — радиус срединной поверхности, h — толщина оболочки, σ_s — предел упругости лишенного упрочнения материала. Изгибающий момент M_1 и усилие T_2 определяются формулами

$$M_1 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} z\, \delta\sigma_x\, dz, \qquad T_2 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \delta\sigma_y\, dz \tag{2}$$

Считаем материал за пределом упругости подчиняющимся теории пластичности Генки-Мизеса, т. е.

$$\sigma_s^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2, \qquad \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} \tag{3}$$

Из этих соотношений получаем для несжимаемого материала зависимость изменений напряжений и деформаций в пластической области ($\frac{1}{2} h > z > z_0$) в виде

$$\delta\sigma_x = \frac{4E}{3}\left(\delta\varepsilon_x + \frac{1}{2}\delta\varepsilon_y\right), \qquad \delta\sigma_y = \frac{4E}{3}\left(\frac{1}{2}\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y\right) \tag{4}$$

В упругой области ($z_0 > z > -\frac{1}{2}h$) имеем

$$\delta\sigma_x = \frac{2E}{3}\left(\frac{1}{2}\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y\right), \qquad \delta\sigma_y = \frac{4E}{3}\left(\frac{1}{2}\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y\right) \tag{5}$$

причем согласно гипотезе Кирхгофа $\delta\varepsilon_x = \varepsilon_1 - \varkappa_1 z$, $\delta\varepsilon_y = w / R$.

На границе $z = z_0$ области пластических и упругих деформаций из условия, что $\sigma_s = \mathrm{const}$, т. е. $\delta\sigma_s = 0$, получим $2\delta\sigma_x = \delta\sigma_y$ и, следовательно,

$$\delta\varepsilon_x = \varepsilon_1 - \varkappa_1 z_0 = 0 \qquad \left(z_0 = \frac{h}{2\zeta}\right) \tag{6}$$

Учитывая последнее соотношение, получаем

$$T_2 = \frac{Eh^3}{3}\left(\zeta - \frac{4w}{Rh\varkappa_1}\right)\varkappa_1, \qquad M_1 = \frac{Eh^3}{144}(10 + 9\zeta - 3\zeta^3) \tag{7}$$

$$3\zeta^2 + 10\zeta + 3 + \frac{6w}{Rh\varkappa_1} = 0 \tag{8}$$

При этом было принято

$$\delta T_1 = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \delta\sigma_x\, dz = 0$$

Отыскивая решение дифференциального уравнения равновесия задачи в форме

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{9}$$

получим два алгебраических соотношения между характерными величинами задачи:

$$4\eta = 3\zeta^2 + 10\zeta + 3, \qquad S = \frac{1}{12\eta}(10 + 9\zeta - 3\zeta^3) + \eta - \zeta \tag{10}$$

Здесь

$$S = \frac{3R\sigma_s}{hE}, \qquad \eta = \frac{4l^2}{\pi^2 Rh}, \qquad \zeta = \frac{z_0}{\frac{1}{2}h} \tag{11}$$

При $S > 4$ существует единственная возможная искривленная форма равновесия оболочки. При $4 > S > S_{\min}$ возможны две различные формы равновесия с различными значениями l. При $S < 1.81$ искривленные формы равновесия невозможны. Следовательно, условия устойчивости бесконечно длинной пластинки в пластической и упругой областях соответственно имеют вид

$$\frac{h}{R} > 1.66\frac{\sigma_s}{E}, \qquad \frac{h}{R} > 1.50\frac{\sigma_s}{E} \tag{12}$$

Для цилиндрической оболочки под действием гидростатического давления p с достаточной точностью можно принять

$$\sigma_x = -\frac{pR}{2h}, \qquad \sigma_y = -\frac{pR}{h} \tag{13}$$

Согласно условию пластичности Генки-Мизеса получим в этом случае

$$\delta\sigma_y = 0, \qquad \delta\sigma_x = E\,\delta\varepsilon_x$$

В области упругих деформаций на основании (5) получаем

$$\frac{48w}{\varkappa Rh} = 1 + 14\zeta + \zeta^2, \quad M_1 = \frac{Eh^3}{144}(14 + 3\zeta - \zeta^3)\varkappa_1, \quad T_2 = \frac{Eh^2}{12}(1 + \zeta)^2\varkappa_1 \tag{14}$$

и, отыскивая решение уравнения равновесия в форме (9), получим

$$-12\eta = 1 + 14\zeta + \zeta^2, \qquad S = \frac{3R\sigma_s}{hE} = \frac{1}{12\eta}(10 + 9\zeta - 3\zeta^2) - \frac{1}{4}(1 + \zeta)^2 \tag{15}$$

Минимальное значение S равно единице, следовательно, условие устойчивости цилиндрической оболочки имеет вид

$$\frac{h}{R} > 3.46\frac{\sigma_s}{E} \tag{16}$$

В случае одновременного действия осевых сил и боковых давлений при выполнении соотношения $\sigma_x = 2\sigma_y$ (случай, рассмотренный А. А. Ильюшиным [1] при наличии упрочнения материала) уравнение искривленной формы равновесия приводится к виду

$$\sigma_s h \frac{d^2 w}{dx^2} + Eh\frac{w}{R} = 0 \tag{17}$$

Это показывает независимость длины $l = \pi R\sqrt{\sigma_s / E}$ от толщины h. Следовательно, при $\sigma_x = 2\sigma_y$ и отсутствии упрочнения материала оболочка всегда неустойчива.

Поступила в редакцию
6 VIII 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин. Устойчивость пластинок и оболочек за пределом упругости. 1944. Т. VIII. Вып. 5.