

ФУНКЦИИ ЛОММЕЛЯ ОТ ДВУХ МИНИМЫХ АРГУМЕНТОВ

П. И. Кузнецов

(Москва)

1. Будем рассматривать функции Ломмеля от двух мнимых аргументов, определяя их соотношениями¹

$$\Upsilon_n(w, z) = i^{-n} U_n(iw, iz), \quad \Theta_n(w, z) = i^{-n} V_n(iw, iz) \quad (1.1)$$

Здесь через $U_n(w, z)$ и $V_n(w, z)$ обозначены функции Ломмеля от двух действительных аргументов, определяемые рядами Неймана^[1,2]:

$$\begin{aligned} U_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z) \\ V_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $J_n(z)$ — функции Бесселя, n — любое целое число.

Принимая во внимание эти формулы и соотношение $I_n(z) = i^{-n} J_n(z)$, получим

$$\Upsilon_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z), \quad \Theta_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z) \quad (1.3)$$

Дадим некоторые формулы, выражающие свойства функции $\Upsilon_n(w, z)$ и $\Theta_n(x, z)$, аналогичные известным формулам для функций Ломмеля от двух действительных аргументов^[1,2]. Из самого определения функций Υ_n и Θ_n вытекают соотношения:

$$\Upsilon_n(w, z) - \Upsilon_{n+2}(w, z) = \left(\frac{w}{z}\right)^n I_n(z), \quad \Theta_n(w, z) - \Theta_{n+2}(w, z) = \left(\frac{z}{w}\right)^n I_n(z) \quad (1.4)$$

$$\Upsilon_n(w, z) = \Theta_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right), \quad \Theta_n(w, z) = \Upsilon_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right) \quad (1.5)$$

Введем соотношения, аналогичные соотношениям Якоби^[4], но для мнимого аргумента. Они представляются в виде

$$\operatorname{ch}(z \cos \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} I_{2n}(z) \cos 2n\eta, \quad \operatorname{sh}(z \cos \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} I_{2n+1}(z) \cos (2n+1)\eta$$

где $\varepsilon_m = 1$ при $m = 0$, $\varepsilon_m = 2$ при $m \neq 0$. Положив в них $e^{i\eta} = w/z$, получим

$$\begin{aligned} \Upsilon_{2n+1}(w, z) + \Theta_{-2n+1}(w, z) &= \operatorname{sh}\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w}\right) \\ \Upsilon_{2n+2}(w, z) + \Theta_{-2n}(w, z) &= \operatorname{ch}\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w}\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹ Первая из этих функций введена в предыдущей работе^[3]. При чтении гранок мне стала известна работа Мюллера^[10] по ламинарному движению вязкой жидкости, где, повидямому, впервые встречаются эти функции.

В частности, при $n=0$ последние формулы принимают следующий вид:

$$\Upsilon_1(w, z) + \Theta_1(w, z) = \operatorname{sh} \left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} \right), \quad \Upsilon_2(w, z) + \Theta_0(w, z) = \operatorname{ch} \left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} \right) \quad (1.7)$$

Сложив эти равенства, получим

$$\Upsilon_1(w, z) + \Upsilon_2(w, z) + \Theta_0(w, z) + \Theta_1(w, z) = \exp \left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} \right) \quad (1.8)$$

Дифференцируя функции Υ_n и Θ_n по z и w и используя соотношения^[4]

$$\left(\frac{d}{z dz} \right)^m \{ z^\nu I_\nu(z) \} = z^{\nu-m} I_{\nu-m}(z), \quad \left(\frac{d}{z dz} \right)^m \left\{ \frac{I_\nu(z)}{z^\nu} \right\} = \frac{I_{\nu+m}(z)}{z^{\nu+m}}$$

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z)$$

где ν —любое число, получим

$$\frac{\partial \Upsilon_n(w, z)}{\partial z} = \frac{z}{w} \Upsilon_{n+1}(w, z), \quad \frac{\partial \Theta_n(w, z)}{\partial z} = \frac{z}{w} \Theta_{n-1}(w, z) \quad (1.9)$$

$$2 \frac{\partial \Upsilon_n(w, z)}{\partial w} = \Upsilon_{n-1}(w, z) - \left(\frac{z}{w} \right)^2 \Upsilon_{n+1}(w, z) \quad (1.10)$$

$$2 \frac{\partial \Theta_n(w, z)}{\partial w} = \Theta_{n+1}(w, z) - \left(\frac{w}{z} \right)^2 \Theta_{n-1}(w, z)$$

$$\frac{\partial^2 \Upsilon_n(w, z)}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{w} \right)^2 \Upsilon_{n+2}(w, z) + \frac{1}{w} \Upsilon_{n+1}(w, z) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_n(w, z)}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{w} \right)^2 \Theta_{n-2}(w, z) + \frac{1}{w} \Theta_{n-1}(w, z)$$

Принимая во внимание (1.4) и (1.9), соотношения (1.11) можно представить в виде

$$-\frac{\partial^2 \Upsilon_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Upsilon_n}{\partial z} + \left(\frac{z}{w} \right)^2 \Upsilon_n = \left(\frac{w}{z} \right)^{n-2} I_n(z) \quad (1.12)$$

$$-\frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Theta_n}{\partial z} + \left(\frac{z}{w} \right)^2 \Theta_n = \left(\frac{z}{w} \right)^{n+2} I_n(z)$$

Таким образом, показано, что Υ_n и Θ_n суть частные интегралы уравнений (1.12). Если $w=z$, то согласно формулам (1.3) получим

$$\Upsilon_m(z, z) = \Theta_m(z, z) \quad (1.13)$$

а из формул (1.6) следует

$$\Upsilon_{2n}(z, z) = \frac{1}{2} [I_0(z) + \operatorname{ch} z] - \sum_{m=0}^{n-1} I_{2m}(z)$$

$$\Upsilon_{2n+1}(z, z) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} z - \sum_{m=0}^{n-1} I_{2m+1}(z) \quad (1.14)$$

при $n=0$ получаем из (1.14)

$$\Upsilon_0(z, z) = \frac{1}{2} [I_0(z) + \operatorname{ch} z], \quad \Upsilon_1(z, z) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} z \quad (1.15)$$

при $n=1$ находим из (1.14)

$$\Upsilon_2(z, z) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} z - I_0(z)], \quad \Upsilon_3(z, z) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} z - I_1(z) \quad (1.16)$$

При $w=z=0$ будем иметь

$$\Upsilon_0(0, 0) = 1, \quad \Upsilon_n(0, 0) = 0 \quad \text{при } n \geq 1 \quad (1.17)$$

Если $w \neq 0$, а $z = 0$, то согласно второй из формул (1.3) имеем

$$\Theta_0(w, 0) = 1, \quad \Theta_n(w, 0) = 0 \quad \text{при } n \geq 1 \quad (1.18)$$

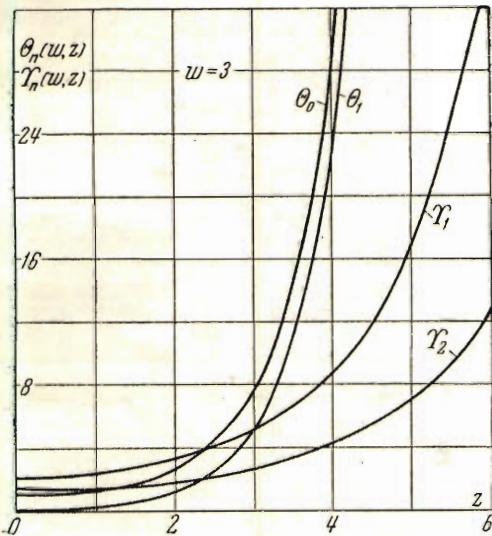
а из формул (1.7) будем иметь

$$\Upsilon_1(w, 0) = \text{sh } \frac{1}{2} w, \quad \Upsilon_2(w, 0) = \text{ch } \frac{1}{2} w - 1 \quad (1.19)$$

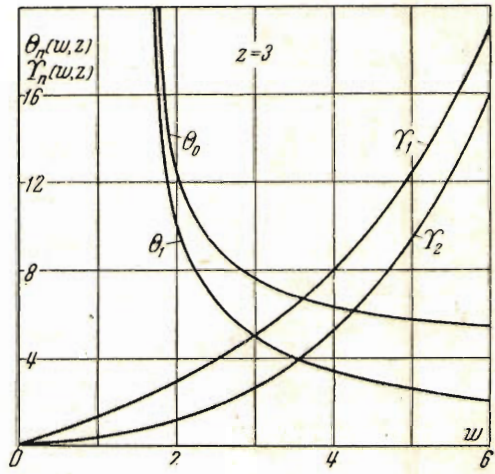
Из формул (1.4) видно, что необходимо протабулировать только функции $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Theta_0$ и Θ_1 . При значениях $w/z < 1$ значения Υ_1 и Υ_2 вычисляются по первой формуле (1.3), а Θ_0 и Θ_1 по формулам (1.7). При значениях $w/z = 1$ значения $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Theta_0$ и Θ_1 вычисляются по формулам (1.15) и (1.16). При значениях $w/z > 1$ вычисляются значения функций Θ_0 и Θ_1 по второй формуле (1.3), а Υ_1 и Υ_2 по формулам (1.7). Кроме того, при $z=0$ используются формулы (1.18) и (1.19). Значение функций $I_n(z)$, гиперболических и показательных взяты из таблиц [4,5,6,7].

Значения функций $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Theta_0$ и Θ_1 даются через интервал, равный единице для обоих аргументов, и приведены в табл. 4 на стр. 558.

Вид функций $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Theta_0$ и Θ_1 для $w=3$ и для $z=3$ показан соответственно на фиг. 1 и 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Мы привели только те сведения, которые необходимы для решения задачи, поставленной в статье [3]. Другие изученные свойства функций Ломмеля от двух действительных аргументов легко переносятся и на функции от мнимых аргументов.

2. В предыдущей работе [3] было найдено, что решение системы уравнений

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RJ + L \frac{\partial J}{\partial x}, \quad -\frac{\partial J}{\partial x} = GV + C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.1)$$

при начальных и граничных условиях

$$V(x, 0) = J(x, 0) = 0, \quad V(0, t) = 1 \quad (2.2)$$

выражается так:

$$V(x, t) = e^{-\alpha t} [I_0(z) + \Upsilon_1(w_1, z) + \Upsilon_2(w_1, z) + \Upsilon_1(w_2, z) + \Upsilon_2(w_2, z)] H(t - \xi) \quad (2.3)$$

$$J(x, t) = \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\alpha t} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} I_0(z) + \Upsilon_1(w_1, z) + \Upsilon_2(w_1, z) - \right. \\ \left. - \Upsilon_1(w_2, z) - \Upsilon_2(w_2, z) \right] H(t - \xi) \quad (2.4)$$

Таблица 1

	z	$\Upsilon_1(w, z)$	$\Upsilon_2(w, z)$	$\Theta_0(w, z)$	$\Theta_1(w, z)$
$w = 1$	0	0.521 095	0.127 626	1.000 000	0.000 000
	1	0.587 600	0.138 508	1.404 574	0.587 600
	2	0.822 220	0.175 433	5.956 856	5.227 984
	3	1.353 714	0.253 519	73.956 430	72.849 497
	4	2.492 507	0.406 957	2 456.977 565	2 454.891 811
	5	4.950 471	0.708 449	221 205.987 557	221 201.745 532
	6	10.364 272	1.312 551	54 142 492.562 564	54 142 483.510 843
$w = 2$	0	1.175 201	0.543 081	1.000 000	0.000 000
	1	1.316 560	0.588 250	1.300 174	0.285 359
	2	1.813 430	0.741 305	3.020 890	1.813 430
	3	2.932 228	1.064 145	11.850 412	9.943 555
	4	5.312 992	1.696 517	72.513 432	68.890 219
	5	10.417 973	2.934 963	701.117 816	693.634 096
	6	21.597 369	5.408 624	11 007.824 296	10 991.635 551
$w = 3$	0	2.129 279	1.352 410	1.000 000	0.000 000
	1	2.363 599	1.460 500	1.281 183	0.189 209
	2	3.482 524	1.825 902	2.595 947	1.124 765
	3	5.008 937	2.593 435	7.474 227	5.008 937
	4	8.852 962	4.089 096	28.168 703	23.389 334
	5	17.008 096	7.002 286	137.534 130	127.524 860
	6	34.698 877	12.790 680	891.230 804	869.322 054
$w = 4$	0	3.626 860	2.762 196	1.000 000	0.000 000
	1	3.985 096	2.971 604	1.274 561	0.141 636
	2	5.227 984	3 677 271	2.455 018	0.822 220
	3	7.965 805	5.151 194	6.250 722	3.392 174
	4	13.644 959	8.003 155	19.305 077	13.644 959
	5	25.521 6 [55]	13.516 5 [46]	70.573 4 [98]	58.562 4 [43]
	6	50.954 4 [92]	24.392 2 [31]	308.179 3 [37]	281.615 5 [73]
$w = 5$	0	6.050 204	5.132 289	1.000 000	0.000 000
	1	6.581 523	5.497 506	1.271 500	0.113 209
	2	8.409 590	6.723 462	2.391 122	0.649 971
	3	12.378 815	9.266 431	5.732 306	2.586 548
	4	20.471 2 [57]	14.144 0 [19]	16.034 4 [11]	9.690 6 [00]
	5	37.101 605	23.485 038	50.724 910	37.101 605
	6	72.145 [883]	41.742 [083]	181.187 [923]	150.781 [881]
$w = 6$	0	10.017 875	9.067 662	1.000 000	0.000 000
	1	10.798 326	9.668 589	1.269 839	0.094 296
	2	13.459 843	11.676 885	2.356 764	0.538 132
	3	19.149 242	15.809 506	5.462 794	2.099 540
	4	30.528 29 [3]	23.655 55 [2]	14.449 93 [7]	7.564 07 [2]
	5	53.451 [253]	38.515 [207]	42.143 [322]	27.201 [077]
	6	100.856 579	67.240 615	134.475 022	100.856 579

(Значения приведены с точностью до последнего десятичного знака, в скобках указаны неточные цифры).

Здесь $H(t-\xi) = 0$ при $t < \xi$, $H(t-\xi) = 1$ при $t > \xi$ и

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \rho = \alpha + \beta, \quad m = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_1 = m^2(t - \xi)$$

$$\beta = \frac{G}{2C}, \quad \sigma = \alpha - \beta, \quad n = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}, \quad \xi = \frac{x}{v}, \quad \omega_2 = n^2(t - \xi)$$

$$z = \sigma \sqrt{t^2 - \xi^2}$$

Покажем, что (2.3) и (2.4) удовлетворяют уравнения (2.1) и начальным и граничным условиям (2.2).

В самом деле, дифференцируя V и J по x и t и подставляя их в уравнения (2.1), увидим, что эти уравнения обращаются в тождества.

Таблица 2

$t = x/v = 6.56 \mu\text{sec}$			$t = \infty$		
$x \text{ км}$	$V(x, t)$	$10^3 J(x, t)$	$V(x, t)$	$10^3 J(x, t)$	
0	1.0000	0.3834	1.0000	0.2607	
100	0.7736	0.3346	0.8253	0.2152	
200	0.5973	0.2933	0.6811	0.1776	
300	0.4393	0.2526	0.5627	0.1467	
400	0.3138	0.2162	0.4644	0.1211	

Из самого решения видно, что начальные условия выполняются; действительно, так как при $t=0$ для всех $x > 0$ имеет место неравенство $t < \xi$, следовательно, $H(t-\xi) = 0$ и первые из условий (2.2) выполняются.

Наконец, покажем, что удовлетворяется и граничное условие. Действительно, при $x=0$ имеем $\omega_1 = m^2 t$, $\omega_2 = n^2 t$, $z = \sigma t$, ($\sigma = mn$) и $z^2 / \omega_1 = \omega_2$; тогда, применяя формулы (1.4), (1.5), (1.8), получим $V(0, t) = 1$.

Найдем значения V и J при $t = \xi$, т. е. величины напряжения и тока фронта волны. В этом случае $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ и $z = 0$; согласно формулам (1.17) и $I_0(0) = 1$ получим

$$V = e^{-\rho \xi}, \quad J = e^{-\rho \xi} \sqrt{C/L}$$

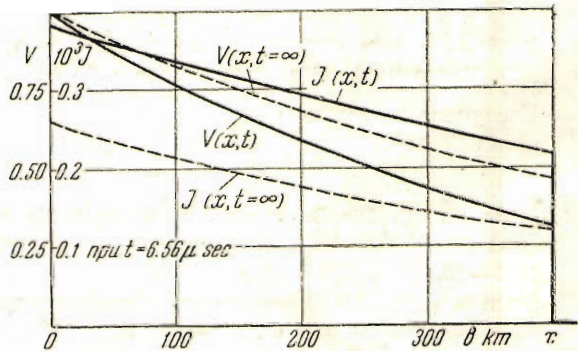
Определим предельные значения V и J при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном x , т. е. напряжение и ток при установившемся режиме.

Предварительно докажем следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} I_n(z) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} Y_n(\omega_2, z) = 0 \quad (2.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \Theta_n(\omega_1, z) = 0$$



Фиг. 3

Действительно, как известно [8], имеет место соотношение $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} I_n(y) = 0$ при $y \rightarrow \infty$, поэтому ($\rho t > z$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} I_n(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-z} I_n(z) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho t - z)} = 0$$

Представляя функцию $Y_1(\omega_2, z)$ в виде ряда (1.3) и умножая этот ряд на $e^{-\rho t}$, получим

$$e^{-\rho t} Y_n(\omega_2, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\omega_2}{z}\right)^{n+2m} e^{-\rho t} I_{n+2m}(z)$$

Учитывая, что $w_2/z \leq n/m < 1$, и применяя первое равенство (2.5), найдем второе соотношение (2.5). Аналогично доказывается и третье соотношение (2.5)

Прибавляя $\Theta_0(w_1, z) + \Theta_1(w_1, z) - \Theta_0(w_1, z) - \Theta_1(w_1, z)$ к (2.3) и (2.4) и применяя формулы (1.8) и (2.5), найдем

$$V(x, t = \infty) = \exp(-x\sqrt{RG}), \quad J(x, t = \infty) = \sqrt{G/R} \exp(-x\sqrt{RG})$$

Наконец, рассмотрим случай, когда отсутствует искажение в линии. В этом случае $\alpha = \beta$ и, следовательно, $w_1 = 4z(t - \xi)$, $w_2 = 0$ и $z = 0$. На основании формул (1.17) и (1.19) из (2.3) и (2.4) получаем известные формулы

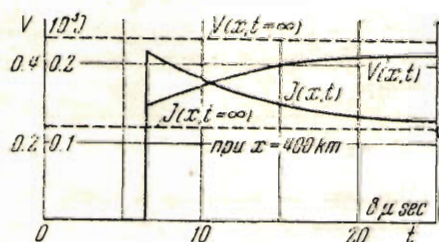
$$V(x, t) = \exp(-x\sqrt{RG}) H(t - \xi)$$

$$J(x, t) = \sqrt{G/R} \exp(-x\sqrt{RG}) H(t - \xi)$$

Теперь рассмотрим численный пример^[9] для железной однопроводной пятимиллиметровой линии с параметрами

$$R = 7.36 \frac{\Omega}{\text{km}}, \quad L = 23.8 \times 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}}, \quad C = 11.3 \times 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{km}}, \quad G = 0.5 \times 10^{-6} \frac{1}{\Omega \text{ km}}$$

Результаты вычислений по формулам (2.3) и (2.4) приведены в табл. 2 и 3 и на фиг. 3, 4.



Фиг. 4

Таблица 3

$x = 400 \text{ m}$

t μsec	$V(x, t)$	$10^2 J(x, t)$
6.56	0.3198	0.2162
10.00	0.3608	0.1766
15.00	0.3987	0.1491
20.00	0.4205	0.1367
25.00	0.4353	0.1308

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность П. М. Квятко и М. Д. Тахтамышевой за вычисление таблиц.

Поступила в редакцию

6 V 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Lommel E. Die Beugungerscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet. Münchener. Abh. XV. 1884—1886. (S. 233—328.)
2. Lommel E. Die Beugungerscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Münchener Abh. XV. 1884—1886 (S. 531—663.)
3. Кузнецов П. И. О представлении одного контурного интеграла. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
4. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. 1945. London.
5. Lodge A. BAAS. Report 1889 (p. 28—32).
6. Tables of Circular and hyperbolic Sines and Cosines for Radian Arguments. 1939. New York.
7. Hoffappel H. W. Tafeln von e^z . 1938. Groningen-Batavia.
8. Montroll E. W. A note on Bessel functions of purely imaginary argument. Journal of Mathematics and Physics. 1946. Vol. 25. No. 1.
9. Коваленков В. И. Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий. 1945. Москва.
10. Müller W. Laminare Ausbreitungsvorgänge in der zähen Flüssigkeit. ZAMM 1933. Bd. 13. Heft 6.