Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ЗАМЕТКИ

ОБ ОЦЕНКЕ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

Д. Б. Тополянский

(Днепропетровск)

Приближенное решение задачи Дирихле с помощью вариационных методов основано на отыскании совокупности функций, обращающих в минимум интеграл Дирихле. В некоторых случаях при сопоставлении приближенных решений, полученных двумя выбранными методами, можно получить оценку для интеграла Дирихле сверху и снизу. В работе дается двусторонняя оценка для интеграла Дирихле. Полученная оценка применяется при приближенном решении задачи теории кручения стержней.

§ 1. Как известно, теорема о минимуме интеграла Дирихле утверждает, что *из всей совокупности функций* Ψ^*, *непрерывных вместе с их первыми и вторыми производными в области* T, *ограниченной контуром* L, *и принимающих на* L *одну и ту же совокупность значений* ψ_0, *гармоническая функция* ψ *есть та, которая обращает в минимум интеграл Дирихле*

$$J=\iint\limits_T D(\psi,\psi)\,d\tau \qquad \left(D(\psi,\psi)=\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]^2\right)$$

Таким образом, если ψ^*—любая негармоническая функция, принадлежащая совокупности Ψ^*, а ψ—принадлежащая этой совокупности гармоническая функция, то имеет место неравенство

$$\iint\limits_T D(\psi,\,\psi)\,d\tau<\iint\limits_T D(\psi^*,\,\psi^*)\,d\tau \tag{1.1}$$

Докажем теперь теорему, дающую для интеграла Дирихле оценку с другой стороны, а именно: *из всей совокупности гармонических функций* Ψ^{**}, *удовлетворяющих на контуре* L, *ограничивающем данную область* T, *условию*

$$\int\limits_L (\psi_0-\Psi^{**})\frac{\partial\Psi^{**}}{\partial n}\,ds=0 \tag{1.2}$$

где ψ_0—*некоторая данная совокупность значений, а* n—*внешняя нормаль, получает значение* ψ_0 *на контуре та, которая сообщает интегралу Дирихле, распространенному на область* T, *наибольшее значение*, т. е. если ψ^{**}—любая гармоническая функция, принадлежащая совокупности Ψ^{**}, но не получающая значений ψ_0 на контуре данной области, а ψ—гармоническая в данной области функция, получающая значения ψ_0 на контуре (принадлежащая, следовательно, той же совокупности), то имеет место неравенство

$$\iint\limits_T D(\psi^{**},\,\psi^{**})\,d\tau<\iint\limits_T D(\psi,\,\psi)\,d\tau \tag{1.3}$$

Положим

$$\psi^{**}-\psi=\varphi \tag{1.4}$$

Составим интеграл Дирихле для функции ψ: (1.5)

$$\iint\limits_T D(\psi, \psi)\,d\tau = \iint\limits_T D(\psi^{**} - \psi^\circ, \psi^{**} - \psi^\circ)\,d\tau =$$

$$= \iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^{**})\,d\tau - 2\iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^\circ)\,d\tau + \iint\limits_T D(\psi^\circ, \psi^\circ)\,d\tau =$$

$$= \iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^{**})\,d\tau - 2\left[\int\limits_L \psi^\circ \frac{\partial\psi^{**}}{\partial n}\,ds - \iint\limits_T \psi^\circ \triangle\psi^{**}\,d\tau\right] + \iint\limits_T D(\psi^\circ, \psi^\circ)\,d\tau$$

где $\triangle$—оператор Лапласа,

$$D(\psi^{**}, \psi^\circ) = \frac{\partial\psi^{**}}{\partial x}\frac{\partial\psi^\circ}{\partial x} + \frac{\partial\psi^{**}}{\partial y}\frac{\partial\psi^\circ}{\partial y}$$

Первый из интегралов квадратной скобки равен нулю вследствие условия (1.2), второй также равен нулю, так как ψ^{**}—гармоническая функция. Таким образом, имеем

$$\iint\limits_T D(\psi, \psi)\,d\tau = \iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^{**})\,d\tau + \iint\limits_T D(\psi^\circ, \psi^\circ)\,d\tau \tag{1.6}$$

При $\psi^\circ \neq 0$ второй интеграл в правой части—величина положительная, поэтому

$$\iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^{**})\,d\tau < \iint\limits_T D(\psi, \psi)\,d\tau < \iint\limits_T D(\psi^*, \psi^*)\,d\tau \tag{1.7}$$

§ 2. Полученной оценкой можно воспользоваться при совместном применении двух определенным образом выбранных методов приближенного решения задачи Дирихле. Пусть в результате применения одного метода получено приближенное решение некоторой частной задачи Дирихле в виде линейной комбинации

$$\psi^{**} = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i^{**}$$

где φ_i^{**} $(i = 1, 2, \ldots, n)$—система гармонических функций в области T, при условии

$$\int\limits_L (\psi_0 - \psi^{**})\frac{\partial\varphi_i^{**}}{\partial n}\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1}$$

а в результате применения другого метода—в виде некоторой негармонической функции, принадлежащей совокупности Ψ^*. Тогда при совместном применении двух таких методов приближенного решения задачи придем к неравенствам (1.1) и (1.3).

§ 3. В виде примера, рассмотрим вопрос об оценке крутящего момента при приближенном решении основной задачи кручения стержней. Момент кручения M_t для цилиндрического стержня с поперечным сечением T может быть выражен так

$$M_t = \mu g\left[\iint\limits_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_T D(\psi, \psi)\,dx\,dy\right] \tag{3.1}$$

где μ—модуль сдвига, g—угол поворота, отнесенный к единице длины, ψ—гармоническая в данной области функция с значением на контуре, равным $\psi_0 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Вводя обозначения

$$J^* = \iint\limits_T D(\psi^*, \psi^*)\,d\tau, \qquad M_t^* = \mu g\left[\iint\limits_T (x^2 + y^2)\,d\tau - J^*\right]$$

$$J^{**} = \iint\limits_T D(\psi^{**}, \psi^{**})\,d\tau, \qquad M_t^{**} = \mu g\left[\iint\limits_T (x^2 + y^2)\,d\tau - J^{**}\right]$$

получим

$$M_t^* < M_t < M_t^{**}$$

§ **4.** Проследим теперь за оценкой погрешности для момента кручения при приближенном решении задачи различными методами.

1. Как известно, приближенное значение момента кручения, получаемое по методу Ритца, меньше истинного: например, для квадрата со стороной $2a$ ($x = \pm a$, $y = \pm a$), если искать приближенное решение задачи по Ритцу в виде

$$\psi^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + a_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

получим

$$J^* = \frac{4}{9} a^4, \qquad M_t^* = \mu g \left[\frac{8}{3} a^4 - \frac{4}{9} a^4 \right] = 0.1388 \, (2a)^4 \mu g$$

Истинные значения $J = 0.4171 \, a^4$, $M_t = 0.1406 \, (2a)^4 \, \mu g$; таким образом, в этом случае $J^* > J$, $M_t^* < M_t$.

2. По методу, предложенному Канторовичем [1], задача о минимуме функционала, зависящего от функции двух аргументов, сводится к задаче о минимуме функционала, зависящего от нескольких функций одного переменного; если, следуя Канторовичу, в качестве примера рассмотреть задачу о кручении призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением со сторонами 2 и 1, т. е. $x = \pm 1$, $y = \pm 0.5$, то получим

$$\psi^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}(1 - 4y^2)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{10}\, x}{\operatorname{ch} \sqrt{10}}\right)$$

В этом случае $J^* = 0.376$, $M_t^* = 0.457 \, \mu g$; истинные значения $J = 0.375$, $M_t = 0.458 \mu g$ и, следовательно, $J^* > J$, $M_t^* < M_t$.

3. Рассмотрим оценку погрешности для скручивающего момента при приближенном решении задачи по методу наименьших квадратов в различных его видоизменениях.

a) Приближенное решение задачи является функцией ψ^*. В этом случае, например, для квадрата со стороной, равной 2, т. е. $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, получим [2]

$$\psi^* = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 2(1 - x^2)(1 - y^2)\,[0.2902 + 0.0627\,(x^2 + y^2)]$$

$$J^* = 0.4238, \qquad M_t^* = 0.1402 \times 2^4 \mu g, \qquad J^* > J, \qquad M_t^* < M_t$$

b) Приближенное решение задачи является функцией ψ^{**}. Решая эту же задачу по методу наименьших квадратов, можно искать приближенное решение в виде

$$\psi^{**} = a_0 + a_1 (x^2 - y^2) + a_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

Из условия минимизации интеграла

$$\int \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - a_0 - a_1 (x^2 - y^2) - a_2 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \right]^2 ds$$

получим [1]

$$\psi^{**} = 0.5891 - 0.0970\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$J^{**} = 0.4160, \qquad M_t^{**} = 0.1407 \times 2^4 \mu g, \qquad J^{**} < J, \qquad M_t^{**} > M_t$$

Можно, следуя Треффтцу, искать приближенное решение задачи в виде

$$\psi^{**} = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i^{**}$$

а коэффициенты из условия минимизации интеграла Дирихле для погрешности $\psi^\circ = \psi^{**} - \psi$. Отсюда придем к системе n уравнений

$$\int\limits_L (\psi^{**} - \psi_0) \frac{\partial \varphi_i^{**}}{\partial n} \, ds = 0$$

а следовательно, и к условию (1.2). Результат получится тот же, как и в пункте b.

c) Естественно, к тому же результату придем, решая эту задачу путем разложения функции на контуре по наперед заданным функциям — гармоническим полиномам с помощью ортогонализации [2]. Решая данную задачу для квадрата со стороной, равной 2, ограничившись четными полиномами 1, x^2-y^2, $x^4-6x^2y^2+y^4$, получим [1]

$$\psi^{**}=a_1\omega_1+a_2\omega_2+a_3\omega_3$$

где

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{8}}, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{15}{64}}(x^2-y^2), \qquad \omega_3=0.23030\,(x^4-6x^2y^2+y^4+0.8)$$

$$a_1=\frac{2\sqrt{8}}{3}, \qquad a_2=0, \qquad a_3=0.42113$$

или

$$\psi^{**}=0.5891-0.0970\,(x^4-6x^2y^2+y^4); \qquad J^{**}<J, \qquad M_t^{**}>M_t$$

d) Если решить задачу о кручении стержня по методу наименьших квадратов [2] приведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (в данном случае к одному), то для прямоугольника со сторонами 2 и 1, т. е. $x=\pm 1$, $y=\pm 0.5$, получим

$$\psi^{*}=-2\,(1-4y^2)\,f(x)+\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)$$

где

$$f(x)=A\operatorname{ch}\alpha x\cos\beta x+B\operatorname{sh}\alpha x\sin\beta x-\frac{1}{8}, \qquad \alpha=3.237, \qquad \beta=0.691$$

а коэффициенты A и B получаются из требования $f(\pm 1)=0$.

Таким образом [1,2], получаем $A=0.00757$, $B=0.00624$.

$$J_*=0.381>J, \qquad M_t^*=0.452\,\mu g<M_t$$

4. Решим данную задачу по методу Фурье: решение ищем как сумму элементарных основных решений, имеющих вид произведений $X(x)\,Y(y)$, удовлетворяющих уравнению Лапласа и некоторым из контурных условий; затем соответствующим подбором коэффициентов обеспечивается выполнение всех предписанных условий для предельных значений. При этом приближенное решение получим в виде отрезка бесконечного ряда. Таким образом, отрезок этого ряда точно удовлетворяет уравнению Лапласа и некоторым контурным условиям, а остальным контурным условиям — приближенно. Воспользуемся известным решением [2] для прямоугольника со сторонами a и b; задача может быть сведена к решению уравнения Лапласа с граничными условиями

$$\psi_1^{**}=-(a-x)\,x \quad \text{при } y=\pm\tfrac{1}{2}b, \qquad \psi=0 \quad \text{при } x=0,\ x=a$$

Тогда по методу Фурье

$$\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\operatorname{sech}\frac{n\pi b}{2a}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad \left(\beta_n=-\frac{4a^2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)\right)$$

Ограничимся, например, первым приближением; легко показать, что взятый для этого отрезок бесконечного ряда принадлежит совокупности Ψ^{**}. Таким образом,

$$\psi_1^{**}=-\frac{8a^2}{\pi^3}\operatorname{sech}\frac{\pi b}{2a}\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi x}{a}$$

В случае квадрата со стороной 2, получим

$$J^{**}=0.4122, \qquad M_t^{**}=0.1409\times 2^4\mu g, \qquad J^{**}>J, \qquad M_t^{**}>M_t$$

Поступила в редакцию
12 II 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. 1936.