Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

УДАР ПО ТВЕРДОМУ ТЕЛУ, НАХОДЯЩЕМУСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Галин

(Москва)

В этой работе рассматривается удар по твердому телу, ограниченному снизу плоскостью и находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. При этом предполагается, что в начальный момент заданы положение и скорость движения твердого тела, которое после удара перемещается параллельно самому себе. Дается точное решение задачи о совместном движении твердого тела и упругой среды после удара, причем это решение получено для начального периода удара, продолжительность которого установлена.

В случае сжимаемой жидкости нормальное напряжение σ_y и перемещение v в направлении оси y, которые будут нужны для дальнейшего исследования, следующим образом выражаются [1] на основании скалярного потенциала $\varphi(x, y, t)$:

$$\sigma_y = \lambda \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right], \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1}$$

Функция $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\lambda}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

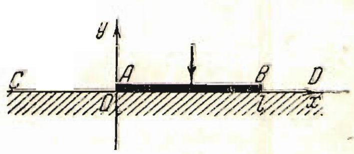
Здесь λ — постоянная Ламе, ρ — плотность жидкости. Приведенные выше уравнения выведены из общих уравнений движения упругого тела, в которых положено, что вторая константа Ламе $\mu = 0$.

Установим теперь граничные условия для определения $\varphi(x, y, t)$ в задаче об ударе по твердому телу (фиг. 1). На поверхности жидкости, свободной от усилий, давление $p = \sigma_x = \sigma_y = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

Уравнение движения твердого тела будет иметь такую форму (m масса тела):

$$m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \int_0^l (\sigma_y)_{y=0}\, dx$$



Фиг. 1

Начальные условия при $t = 0$

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_0$$

На основании этого граничные условия для $\varphi(x, y, t)$ будут:

на CA $(-\infty < x < 0;\ y=0)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

на AB $(0 < x < l;\ y=0)$

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lambda\int_0^l\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)dx \tag{3}$$

на BD $(l < x < +\infty;\ y=0)$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

Начальные условия при $t=0$ на AB будут

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=v. \tag{4}$$

До момента удара, т. е. когда $t<0$, жидкость находилась в покое и поэтому $\varphi(x,\ y,\ t)=0$.

На основании уравнения (2) одно из уравнений (3) может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\rho}{\lambda}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Условия на участках CA и BD будут удовлетворены, если мы положим на них $\varphi=0$ при $y=0$. В этом случае $(\partial^2\varphi/\partial t^2)_{y=0}=0$. Легко показать, что такое условие будет единственно возможным, так как в этом случае осуществляется необходимая непрерывность потенциала на плоскости xt.

Будем на участке AB полагать $\partial\varphi/\partial y=f(t)$ и на основании этого перемещения в направлении оси y во время удара определим искомое выражение для $\varphi(x,\ y,\ t)$. В этом случае граничные условия (3) для определения $\varphi(x,\ y,\ t)$ примут вид

$$\varphi=0 \ \text{ на } CA,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=f(t) \ \text{ на } AB,\quad \varphi=0 \ \text{ на } BD,\quad \varphi=0 \ \text{ при } t<0 \tag{5}$$

Введем новую переменную $\tau=t\sqrt{\lambda/\rho}$. Будем обозначать также

$$f(t)=f(\tau\sqrt{\rho/\lambda})=F(\tau) \tag{6}$$

Одно из условий, входящих в (3), приобретет в этом случае такой вид:

$$m\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0}=\lambda\int_0^l\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{y=0}dx \tag{7}$$

Условия (5) будут в этом случае иметь вид

$$\varphi=0 \ \text{ на } CA,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=F(\tau) \ \text{ на } AB,\quad \varphi=0 \ \text{ на } BD,\quad \varphi=0 \ \text{ при } \tau<0 \tag{8}$$

Функция $\varphi(x,\ y,\ \tau)$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=0 \tag{9}$$

Эта функция $\varphi(x,\ y,\ \tau)$, удовлетворяющая условию вида (8) и уравнению (9), была определена нами в работе [2]. Ее значение при $y=0$, которое в дальнейшем будет необходимо, имеет вид

$$\varphi(x, 0, \tau) = \int_0^\tau F(\tau-\omega) \frac{\partial\varphi_0(x, 0, \omega)}{\partial\omega} d\omega \tag{10}$$

При этом функция $\varphi_0(x, y, \tau)$ удовлетворяет волновому уравнению (9) и следующим граничным условиям (фиг. 1):

$$\varphi=0 \quad \text{на } CA, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=1 \quad \text{на } AB, \qquad \varphi=0 \text{ на } BD, \qquad \varphi=0 \quad \text{при } \tau=0$$

Если τ и соответственно t изменяются в интервалах

$$0<\tau<\frac{l}{2}, \qquad 0<t<\frac{l}{2}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

(интервал изменения t, указанный здесь, мы будем называть начальным периодом удара), то $\partial\varphi_0 / \partial\omega$ при $y=0$ имеет следующее выражение:

$$\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial\omega}\right]_{y=0} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\arccos\left(1-2\frac{x}{\omega}\right) & \text{при } \omega<x \\ 1 & \text{при } \omega>x \end{cases} \tag{12}$$

Воспользуемся условием (7), которое, согласно (6) и (9), представим в виде:

$$m\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}F(\tau) = \lambda\int_0^l \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right)_{y=0} dx \tag{13}$$

Подставляя сюда выражение для $\varphi(x, 0, \tau)$ из (10) и (12), будем иметь

$$m\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}F(\tau) = \lambda\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^\tau F(\tau-\omega)\int_0^l \frac{\partial\varphi_0(x, 0, \omega)}{\partial\omega} dx\, d\omega \tag{14}$$

Интеграл по переменной x в правой части имеет простое выражение:

$$\int_0^l \frac{\partial\varphi_0(x, 0, \omega)}{\partial\omega} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\omega \arccos\left(1-2\frac{x}{\omega}\right) dx + \int_0^{l-\omega} dx = l-\omega \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), получаем следующее уравнение для определения функции $F(\tau)$, т. е. закона движения тела в начальный период удара:

$$m\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}F(\tau) - \lambda\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^\tau F(\tau-\omega)(l-\omega)\,d\omega = 0 \tag{16}$$

Начальные условия при $\tau=0$ будут

$$F(0)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}F(\tau) = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\, v_0 \tag{17}$$

Покажем, что полученное выражение эквивалентно некоторому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Введем переменную $\zeta=\tau-\omega$. В таком случае

$$\int_0^\tau F(\tau-\omega)(l-\omega)\,d\omega = \int_0^\tau F(\zeta)[l-(\tau-\zeta)]\,d\zeta = l\int_0^\tau F(\zeta)\,d\zeta - \int_0^\tau F(\zeta)(\tau-\zeta)\,d\zeta$$

Но как известно:

$$\int_0^\tau F(\zeta)(\tau-\zeta)\,d\zeta = \int_0^\tau \int_0^\zeta F(\xi)\,d\xi\,d\zeta$$

Подставляя полученное выражение в (16), найдем (18)

$$\frac{m}{\rho}\frac{d^2}{d\tau^2}F(\tau) - \frac{d^2}{d\tau^2}\left[l\int_0^\tau F(\zeta)\,d\zeta - \int_0^\tau\int_0^\zeta F(\xi)\,d\xi\,d\zeta\right] = \frac{m}{\rho}F''(\tau) - lF'(\tau) + F(\tau) = 0$$

Функция $F(\tau)$, удовлетворяющая этому уравнению и начальным условиям (17), имеет вид

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\,\frac{v_0}{\varkappa_1-\varkappa_2}\left(e^{\varkappa_1\tau} - e^{\varkappa_2\tau}\right) \tag{19}$$

При этом

$$\varkappa_1 = \frac{l\rho}{2m} + \sqrt{\left(\frac{l\rho}{2m}\right)^2 - \frac{\rho}{m}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{l\rho}{2m} - \sqrt{\left(\frac{l\rho}{2m}\right)^2 - \frac{\rho}{m}} \tag{20}$$

Или, переходя к переменной t, получим перемещение тела

$$f(t) = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\,\frac{v_0}{\varkappa_1-\varkappa_2}\left[\exp\left(\varkappa_1\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}\,t\right) - \exp\left(\varkappa_2\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\,t\right)\right] \tag{21}$$

Таков закон движения твердого тела после удара в течение промежутка времени, когда

$$0 < t < \frac{l}{2}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Пользуясь (13), для силы $P(t)$, действующей на тело в течение удара (имея в виду тот же указанный выше промежуток времени), получим

$$P(t) = m\frac{d^2f}{dt^2} = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}\,\frac{mv_0}{\varkappa_1-\varkappa_2}\left[\varkappa_1^2\,\frac{\lambda}{\rho}\exp\left(\varkappa_1\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}\,t\right) - \varkappa_2^2\,\frac{\lambda}{\rho}\exp\left(\varkappa_2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}\,t\right)\right]$$

В момент удара при $t=0$, воспользовавшись (20), найдем следующее выражение для силы, действующей на тело:

$$P(0) = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}\,v_0\,l\rho \tag{23}$$

Величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ обе будут действительными или комплексными, если соответственно будет

$$\frac{l^2\rho}{4m} > 1, \qquad \frac{l^2\rho}{4m} < 1$$

Нетрудно показать, что в первом случае сила, действующая на тело, будет непрерывно возрастать в течение указанного промежутка времени. Во втором случае сила может, вообще говоря, менять знак, следствием чего может быть отрыв (отскакивание) твердого тела от жидкости.

Поступила в редакцию
24 VII 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. 1937. Гл. XII.
2. Галин Л. А. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.