

О КРУЧЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

В настоящей заметке рассматривается задача о кручении прямолинейных стержней из однородного анизотропного материала, поперечное сечение которых представляет эллиптический кольцевой сектор. Анизотропия предполагается частного вида, характеризующегося следующим: в каждой точке материала имеются три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. При решении этих задач использован частный вид ($n=1$) специальной системы криволинейных неортогональных координат, предложенной нами в ранее опубликованной работе^[1].

Как частные случаи из приведенного решения получаются точные решения задачи о кручении стержней с поперечным сечением в виде кругового и кольцевого сектора.

1. Введем криволинейные координаты ρ и φ , связанные с декартовыми x и y соотношениями ($a > b > 0$):

$$x = a\rho^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \quad y = b\rho^{\frac{1}{2}} \sin \varphi$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Эта система криволинейных координат не ортогональна. Кривые $\rho = \text{const}$ образуют семейство эллипсов; кривые $\varphi = \text{const}$ образуют семейство прямых, проходящих через начало координат (фиг. 1). При $a = b$ система (1.1) переходит в обычную систему полярных координат.

2. Определение функции напряжения $u(x, y)$ при кручении, как известно, сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$L(u) = a_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 = 0 \quad \left(a_{44} = \frac{1}{G_{xz}}, \quad a_{45} = \frac{1}{G_{yz}} \right) \quad (2.1)$$

при условии $u = 0$ на контуре; G_{xz} и G_{yz} — модули сдвига.

Данная задача эквивалентна задаче о минимуме интеграла

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[a_{44} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + a_{45} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} d\rho d\varphi \quad (2.2)$$

Пусть поперечное сечение скрученного стержня ограничено двумя дугами эллипсов и двумя прямыми $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, тогда условия на контуре $u = 0$ можно представить в виде

$$u(\rho_1, \varphi) = u(\rho_2, \varphi) = u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.3)$$

Будем искать u_n функцию кручения в следующем виде:

$$u_n(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) \omega_k(\varphi) \quad (2.4)$$

где $\omega_k(\varphi)$ — система линейно независимых функций^[2], относительно полная в интервале $[0, \alpha]$ в смысле равномерной сходимости, и выбрана так, чтобы каждый член суммы (2.5) удовлетворял граничным условиям (2.4).

Согласно (1.1) и (2.4) из соотношения (2.3) получим

$$\begin{aligned} J(u_n) = & \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\alpha} \left\{ 2\rho \left[a_{44}\beta \cos^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\rho} \sin^2 \varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f'_k(\rho) f'_i(\rho) \omega_k(\varphi) \omega_i(\varphi) + \right. \\ & + \left[a_{45} \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi - a_{44}\beta \sin 2\varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f'_k(\rho) f_i(\rho) \omega_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) + \\ & + \frac{1}{2\rho} \left[a_{44}\beta \sin^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\rho} \cos^2 \varphi \right] \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) f_i(\rho) \omega'_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) - \\ & \left. - 2ab \sum_{k=1}^{k=n} f_k(\rho) \omega_k(\varphi) \right\} d\rho d\varphi \quad (2.5) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_{ik} &= A_{ki} = 2 \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) \omega_i(\varphi) \left[a_{44}\beta \cos^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\rho} \sin^2 \varphi \right] d\varphi \\ B_{ik} &= B_{ki} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \omega'_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) \left[a_{44}\beta \sin^2 \varphi + a_{45} \frac{1}{\rho} \cos^2 \varphi \right] d\varphi \\ C_{ik} &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) \omega'_i(\varphi) \left[a_{45} \frac{1}{\rho} \sin 2\varphi - a_{44}\beta \sin 2\varphi \right] d\varphi \\ D_k &= \int_0^{\alpha} \omega_k(\varphi) d\varphi, \quad \Gamma_{ik} = C_{ik} - C_{ki} = -\Gamma_{ki} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения Эйлера^[2] рассматриваемой вариационной задачи о минимуме интеграла представляют систему линейных уравнений ($t = \log \rho$)

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} f'_k(t) + \Gamma_{ik} f_k(t) - B_{ik} f_k(t) = -D_i a b e^t \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.7)$$

3. Зададим функцию $\omega_k(\varphi)$ в виде

$$\omega_k(\varphi) = \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \quad (3.1)$$

Тогда согласно (2.6) находим

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\alpha}{2} \left[\rho_1 E_{ik} + (-1)^{k+i} \frac{\rho_2}{2} E_{ik}^{(3)} \right], \quad C_{ik} = (-1)^{k+i+1} \frac{i\pi}{8} \rho_2 E_{ik}^{(3)} \\ B_{ik} &= \frac{ik\pi^2}{8\alpha} \left[\rho_1 E_{ik} + (-1)^{k+i} \frac{\rho_2}{2} E_{ik}^{(2)} \right], \quad D_{ik} = \frac{2\alpha}{i\pi} E_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ($s=1, 2$)

$$E_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=i \\ 0 & \text{при } k \neq i \end{cases} \quad E_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \text{ нечетном} \\ 0 & \text{при } i \text{ четном} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$E_{ik}^{(2)} = +4\alpha \sin 2\alpha \left[\frac{(-1)^k}{\pi^2 (k-i)^2 - 4\alpha^2} - \frac{1}{\pi^2 (k+i)^2 - 4\alpha^2} \right], \quad \mu_i = a_{44}\beta + a_{45} \frac{1}{\beta} \quad (3.4)$$

$$E_{ik}^{(3)} = -2\alpha \sin 2\alpha \left[\frac{\pi (k+i)}{\pi^2 (k+i)^2 - 4\alpha^2} + \frac{\pi (k-i)}{\pi^2 (k-i)^2 - 4\alpha^2} \right], \quad \mu_2 = a_{44}\beta - a_{45} \frac{1}{\beta}$$

4. Пусть сечение изотропного стержня представляет кольцевой или круговой сектор с центральным углом $\varphi = \alpha$, тогда в силу (3.2) и (3.4) имеем

$$A_{kk} = \frac{\alpha}{G}, \quad B_{kk} = \frac{k^2 \pi^2}{4\alpha G}, \quad D_k = \frac{2\alpha}{k\pi} E_k, \quad \Gamma_{kk} = 0 \quad (4.1)$$

Общий интеграл уравнения (2.7) будет (H_k, H'_k, F_k, F'_k) — произвольные постоянные)

$$f_k(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном} \\ H'_k \rho + \frac{F'_k}{\rho} - \frac{G\alpha^2}{k\pi} \rho \log \rho & \text{при } k = \frac{2\alpha}{\pi} \\ H_k \rho^\nu + \frac{F_k}{\rho^\nu} - \frac{8\alpha^2 G\alpha^2}{\pi k (4\alpha^2 - \pi^2 k^2)} & \text{при } k \neq \frac{2\alpha}{\pi} \end{cases} \quad (4.2)$$

Функция напряжения $u(\rho, \varphi)$ (согласно (2.5) и (4.2)) будет (4.3)

$$u(\rho, \varphi) = \frac{8\alpha^2 G\alpha^2}{\pi} \sum_{k=1,3,5}^{k=\infty} \frac{\sin 2\nu\varphi}{k (4\alpha^2 - k^2 \pi^2)} \left[\frac{1 - \rho_1^{\nu+1}}{1 - \rho_1^{2\nu}} \rho^\nu + \frac{1 - \rho_1^{\nu-1}}{1 - \rho_1^{2\nu}} \rho_1^{\nu+1} \rho^{-\nu} - \rho \right] \quad \left(\nu = \frac{k\pi}{2\alpha} \right)$$

Жесткость C при кручении определится формулой ($\alpha = \pi / 2\alpha$) (4.4)

$$C = \frac{64\alpha^3 G\alpha^4}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2 (4\pi^2 \alpha^2 - k^2)} \left[\frac{2\alpha (1 - \rho_1^{2\nu+1})^2}{(\pi k + 2\alpha) (1 - \rho_1^{2\nu})} - \frac{2\alpha (1 - \rho_1^{2\nu-1})^2 \rho_1^2}{(2\alpha - \pi k) (1 - \rho_1^{2\nu})} - \frac{1 - \rho_1^2}{2} \right]$$

Полагая $\rho_1 = 0$ в (4.4), найдем жесткость для кругового сектора:

$$C = \left[\frac{\alpha}{4} - 0.62506 + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) - \frac{1}{\pi} \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right) \right] G\alpha^4 = K_0(\alpha) G\alpha^4 \quad (4.5)$$

где $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ — соответственно первая и вторая логарифмические производные функции гамма.

Приводим некоторые значения $K_0(\alpha)$, вычисленные по формуле (4.5), и для сравнения результаты Сен-Венана [3] и Динника [4]:

	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Формула (3.12)	0.0048	0.0086	0.019	0.035	0.0824	0.145	0.297	0.564	0.878
по Диннику	0.0041	0.0068	0.017	0.035	0.080	0.144	0.297	0.560	0.878
по Сен-Венану	—	—	0.018	0.0349	0.0825	0.148	0.296	0.528	0.878

5. Рассмотрим оценку максимальной погрешности жесткости C_n при n -м приближении. Для погрешности $\delta_n(\alpha)$ в значении жесткости имеем

$$\delta_n(\alpha) = C - C_n = \frac{8\alpha^3 G\alpha^4}{\pi^4} \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 [2(k-1) + p]^2} \quad (5.1)$$

Из равенства (5.1) и (4.5) получим, что погрешность $\delta_n(\alpha)$ для C_n будет

$$\delta_n(\alpha) < \frac{8\alpha^3 G\alpha^4}{\pi^4} \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^2 [2(x-1) + p]^2} = \frac{G\alpha^4}{2\pi} \left[\frac{\alpha(x+2n\pi)}{\pi n(x+n\pi)} + 2 \log \frac{n\pi}{\alpha+n\pi} \right] \quad (5.2)$$

Вычисления, проведенные при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ для $n = 1, 2, 3$, дают максимальные значения $\delta_n(\frac{1}{2}\pi) = 4.1, 0.71, 0.23\%$.

Из формул (4.5) и (5.2) легко получить формулы, дающие нижнюю оценку C_* с погрешностью не более 4% и верхнюю оценку C^* с погрешностью меньше 1.2% для значения жесткости C , а именно:

$$C_* = \frac{8z^3 G a^4}{\pi^2 (\pi + 2z)^2}, \quad C^* = \left\{ \frac{8z^3}{\pi^2 (\pi + 2z)^2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{z(z+2\pi)}{\pi(z+\pi)} + 2 \log \frac{\pi}{z+\pi} \right] \right\} G a^4 \quad (5.3)$$

6. Пусть поперечное сечение стержня представляет эллиптический кольцевой сектор с центральным углом $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Ограничиваясь первым приближением, т. е. полагая в выражениях (3.1) и (3.2) $k = 1$, получим

$$C_1 = \frac{a^2 b^3}{4\pi\mu_1} \left[\frac{\rho_1^2 \log \rho_1^2}{\rho_1^2 - 1} (1 - \rho_1^2 + \log \rho_1^2) + 1 + \rho_1^2 (\log \rho_1^2 - 1) \right] \quad (6.1)$$

$$\tau_{xz} = \frac{4b}{\pi\mu_1} \frac{2\rho_1^2 \log \rho_1 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \sin 2\varphi \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = \frac{4a}{\pi\mu_1} \frac{2\rho_1^2 \log \rho_1 - \rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \rho_1^{\frac{1}{2}} \sin 2\varphi \sin \varphi$$

Полагая $\rho_1 = 0$ в (6.1), получим выражение жесткости C эллиптического сектора, в котором для изотропного случая $G_{xz} = G_{yz} = G$. Имеем соответственно

$$C_1 = \frac{\beta^2 a^2 b^2 G_{xz} G_{yz}}{2\pi (\beta^2 G_{yz} + G_{xz})}, \quad C_1 = \frac{G a^2 b^2 \beta}{2\pi (\beta^2 + 1)} \quad (6.2)$$

7. Рассмотрим кручение стержня эллиптического трубчатого профиля с радиальной трещиной вдоль оси Ox . Полагая $\alpha = 2\pi$ в (3.1) и (3.2), имеем

$$C_1 = \frac{256 a^3 b^3 G}{15\pi (a^2 + b^2)} \left[\frac{4}{5} \frac{(1 - \rho_1^{5/4})^2}{1 - \rho_1^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{3} \frac{(\rho_1 - \rho_1^{1/4})^2}{1 - \rho_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{1 - \rho_1^2}{2} \right] \quad (7.1)$$

Полагая $\rho_1 = 0$ и $G_{xz} = G_{yz} = G$ в соотношениях (7.1), получим жесткость C изотропного стержня, поперечное сечение которого представляет сплошной эллипс с радиальной трещиной вдоль полуоси a :

$$C_1 = \frac{128 G a^3 b^3}{25\pi (a^2 + b^2)} \quad (7.2)$$

т. е. наличие радиальной трещины в сплошном эллиптическом стержне уменьшает его жесткость в 1.87 раз.

Наличие трещины в эллиптическом трубчатом профиле очень снижает его жесткость. Так, сравнение результатов, полученных по формуле (7.1), с вычислениями по формуле Тимошенко [3]

$$C_0 = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \rho_1^2)$$

для профиля без трещины в случае $a \geq \delta_1 > 0.2a$ показывает, что жесткость уменьшается приблизительно в 70 раз.

Поступила в редакцию
31 V 1947

Академия Наук
Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.
2. Канторович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. ОГИЗ. 1941. Москва—Ленинград.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ. 1934. Москва.
4. Динник А. Н. Кручение. ОНТИ. 1936. Москва.