Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ[1]

А. К. Рухадзе

(Тбилиси)

Равновесие и колебание естественно закрученных стержней с различными ограничениями рассматривались в работах Н. Рейснера[2], С. Тумаркина[3], П. Риза[4], А. Лурье и Г. Джанелидзе[5]. Первые два автора предполагают, что сечения стержней бесконечно тонкие, и применяют в основном общую теорию тонких стержней.

П. Риз рассматривает в ненапряженном состоянии закрученные стержни произвольного сечения и решает методом малого параметра задачи кручения, растяжения продольной силой и изгиба парой с точностью до квадрата параметра.

А. Лурье и Г. Джанелидзе в своих четырех статьях также методом введения малого параметра отчасти повторяют результаты П. Риза и дают также решение задачи изгиба поперечной силой закрученного стержня. В последнем случае, как отмечают и сами авторы, вычисления их громоздки, не доведены до конца и решение не имеет вида, удобного для применения на практике.

В настоящей статье, пользуясь методом, развитым в работе[6], дается решение задачи изгиба поперечной силой естественно закрученного стержня.

1. Пусть дано призматическое тело, поперечные сечения которого в ненапряженном состоянии повернуты относительно друг друга так, что их плоскости остаются параллельными.

Начало координат поместим в центре инерции закрепленного основания, ось Oz направим параллельно образующим боковой поверхности тела, а оси Ox и Oy направим по главным осям инерции указанного основания.

Пусть поворот сечения относительно выбранного начального положения определяется углом $\theta(z)$. Мы рассмотрим случай равномерного закручивания, т. е. случай, когда $\theta(z) = kz$, где k — малый параметр, квадратом и высшими степенями которого мы пренебрегаем.

Придерживаясь обозначений Риза[4], введем систему координат

$$\xi = x - kyz, \qquad \eta = y + kxz, \qquad \zeta = z \tag{1.1}$$

Пусть уравнение боковой поверхности стержня есть

$$F(\xi, \eta) = 0 \qquad \text{или} \qquad E(x - kyz,\ y + kxz) = 0 \tag{1.2}$$

т. е. после поворота всех сечений на угол $\alpha = kz$ рассматриваемый стержень переходит в призматический.

Соотношения между производными от координат ξ, η, ζ и x, y, z с упомянутой точностью даются формулами

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + k\zeta \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - k\zeta \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + k\left(\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tag{1.3}$$

---

[1] Предварительное сообщение опубликовано в работе[1].

Мы воспользуемся этими формулами и преобразуем основные уравнения равновесия упругого тела и граничные условия к координатам ξ, η, ζ.

2. Будем считать, что боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, а усилия, действующие на свободной поверхности $z=l$, статически эквивалентны одной силе W, приложенной к центру тяжести основания и направленной параллельно одной из главных осей $O\xi$ этого сечения.

Будем исходить из компонентов смещения, которые при $k=0$ дают компоненты смещения задачи изгиба поперечной силой призматического тела, ограниченного поверхностью[2]:

$$\begin{aligned} u &= -\tau\eta\zeta + \nu\left[\tfrac{1}{2}\sigma(l-\zeta)(\xi^2-\eta^2) + \tfrac{1}{2}l\zeta^2 - \tfrac{1}{6}\zeta^3\right] + ku_1 \\ v &= \tau\xi\zeta + \nu\sigma(l-\zeta)\xi\eta + kv_1 \\ w &= \tau\varphi(\xi,\eta) - \nu\left[(l\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta^2)\xi + \chi(\xi,\eta) + \xi\eta^2\right] + kw_1 \end{aligned} \qquad \left(\nu = \frac{W}{EJ_\eta}\right) \tag{2.1}$$

где τ — постоянная, E — модуль Юнга, J_η — момент инерции сечения S призматического тела, ограниченного поверхностью (1.2) относительно оси, параллельной оси $O\eta$ и проходящей через центр тяжести этого сечения, $\varphi(\xi,\eta)$ и $\chi(\xi,\eta)$ — обычные функции кручения и изгиба призматического тела, ограниченного поверхностью (1.2), а u_1, v_1 и w_1 — искомые дополнительные компоненты смещения; мы будем их искать как функцию от ξ, η, ζ. Компоненты напряжения, соответствующие смещениям (2.1) с упомянутой точностью, будут (2.2)

$$X_x = \lambda\tau kH - \lambda\nu kL - 2k\tau(\lambda+\mu)\zeta^2 - k\lambda\nu(2\xi^2 - \eta^2 - \tfrac{1}{2}\zeta^2)\eta + k\tau_{11}$$

$$Y_y = \lambda\tau kH - \lambda\nu kL - 2k\tau(\lambda+\mu)\zeta^2 - k\lambda\nu(2\xi^2 - \eta^2 - \tfrac{1}{2}\zeta^2)\eta + k\tau_{22}$$

$$\begin{aligned} Z_z = &-\nu E(l-\zeta)\xi - 2k\lambda\tau\zeta^2 + \nu kE(l-\zeta)\eta\zeta + \tau k(\lambda+2\mu)H - \nu k(\lambda+2\mu)L - \\ &- \nu k(\lambda+2\mu)(2\xi^2 - \eta^2 - \tfrac{1}{2}\zeta^2)\eta + k\tau_{33} \end{aligned}$$

$$X_y = k\tau_{12}$$

$$\begin{aligned} X_z = &\mu\tau(\varphi_\xi' - \eta) - \mu\nu\left[\chi_\xi' + \tfrac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2) + \eta^2\right] + \mu\tau k\zeta\varphi_\eta' - \mu\nu k\zeta\chi_\eta' - \\ &- \mu k\tau\xi\zeta - 2\mu\nu k\xi\eta\zeta - 2\mu\nu k\sigma(l-\zeta)\xi\eta + k\tau_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_z = &\mu\tau(\varphi_\eta' + \xi) - \mu\nu\left[\chi_\eta' + (\sigma+2)\xi\eta\right] - \mu\tau k\zeta\varphi_\xi' + \mu\nu k\zeta\chi_\xi' - \mu\tau k\eta\zeta + \\ &+ \mu\nu k\eta\zeta^2 + \mu\nu\sigma k(l-\zeta)(\xi^2-\eta^2) + k\nu\mu(l\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta^2)\zeta + k\tau_{23} \end{aligned}$$

где $H = \xi\varphi_\eta' - \eta\varphi_\xi'$, $L = \xi\chi_\eta' - \eta\chi_\xi'$, а через $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{23}$ обозначены искомые напряжения, соответствующие смещениям u_1, v_1 и w_1.

Уравнения равновесия упругого тела на основании (1.3) принимают вид (2.3)

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta} + \tau(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial\xi} - \nu(\lambda+\mu)\frac{\partial L}{\partial\xi} - 2\mu\tau\xi - 4(\lambda+\mu)\nu\xi\eta + 4\mu\nu\sigma\xi\eta = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau_{21}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{22}}{\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial\xi}\tau(\lambda+\mu)\frac{\partial H}{\partial\eta} - \nu(\lambda+\mu)\frac{\partial L}{\partial\eta} - 2\eta\tau\eta - \lambda\nu(2\xi^2 - \eta^2 - \tfrac{1}{2}\zeta^2) + \\ + \mu\nu\eta^2 - \nu E(\xi^2 - \eta^2) + \mu\nu(2l - {}^{3}\,\zeta)\zeta = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\tau_{31}}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{32}}{\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta} - 4\tau(\lambda+\mu)\zeta + 4\mu\nu(l-\zeta)\eta + \lambda\nu\eta\zeta = 0$$

Условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности, будут (2.4)

$$\tau_{11}\alpha+\tau_{12}\beta+[\lambda\tau H-\lambda\nu L-2\tau(\lambda+\mu)\zeta^2-\lambda\nu\eta(2\xi^2-\eta^2-\tfrac{1}{2}\zeta^2)]\alpha+$$
$$+\mu\tau(\varphi_\xi'-\eta)(\xi\beta-\eta\alpha)-\mu\nu[\chi_\xi'+\tfrac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2](\xi\beta-\eta\alpha)=0$$
$$\tau_{21}\alpha+\tau_{22}\beta+[\lambda\tau H-\lambda\nu L-2\tau(\lambda+\mu)\zeta^2-\lambda\nu\eta(2\xi^2-\eta^2-\tfrac{1}{2}\zeta^2)]\beta+$$
$$+\mu\tau(\varphi_\eta'+\xi)(\xi\beta-\eta\alpha)-\mu\nu[\chi_\eta'+(\sigma+2)\xi\eta](\xi\beta-\eta\alpha)=0$$
$$\tau_{31}\alpha+\tau_{32}\beta+[2\mu\nu(l-\zeta)\eta+\mu\nu\sigma\eta\zeta-2\mu\tau\zeta]\xi\alpha+$$
$$+[\mu\nu\sigma(l-\tfrac{3}{2}\zeta)(\xi^2-\eta^2)-2\mu\tau\eta\zeta-E(l-\zeta)\xi^2+\mu\nu(l\zeta-\tfrac{1}{2}\zeta^2)\zeta)]\beta=0$$

где $\alpha=\cos(n\xi)$ и $\beta=\cos(n\eta)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности (1.2). Уравнения (2.3) и (2.4) представляют обычные уравнения равновесия упругого тела под действием объемных и поверхностных сил, поэтому к ним следует присоединить также условия совместимости Бельтрами-Мичелля, которые в рассматриваемом случае имеют вид (2.5)

$$\Delta\tau_{11}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\xi^2}+2\tau(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi^2}-2\nu(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 L}{\partial\xi^2}-4(\lambda+\mu)\tau-(5\lambda+8\mu)\nu\eta=0$$

$$\Delta\tau_{22}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2}+2\tau(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\eta^2}-2\nu(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^2}-4(\lambda+\mu)\tau+3(5\lambda+4\mu)\nu\eta=0$$

$$\Delta\tau_{33}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\zeta^2}-4(3\lambda+2\mu)\tau+5\lambda\nu\eta-4E\nu\eta=0$$

$$\Delta\tau_{12}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\,\partial\eta}+2\tau(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi\,\partial\eta}-2\nu(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 L}{\partial\xi\,\partial\eta}-8(\lambda+\mu)\nu\xi=0$$

$$\Delta\tau_{13}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\,\partial\zeta}=0$$

$$\Delta\tau_{23}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial\eta\,\partial\zeta}+2\nu\lambda\zeta+6\mu\nu(l-\zeta)-\mu\nu\zeta=0 \qquad (T=\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})$$

Для определения дополнительных напряжений $\tau_{11},\tau_{22},\ldots,\tau_{23}$ примем, что [6] (2.6)

$$\tau_{11}=(\lambda+\mu)(\nu L-\tau H+2\tau\zeta^2)+\lambda\nu\eta\left(2\xi^2-\eta^2-\frac{1}{2}\zeta^2\right)-(a_0f+b_0\psi+\omega)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}$$

$$\tau_{22}=(\lambda+\mu)(\nu L-\tau H+2\tau\zeta^2)+\nu\lambda\eta\left(2\xi^2-\eta^2-\frac{1}{2}\zeta^2\right)-(a_0f+b_0\psi+\omega)-$$
$$-a_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2\eta-\frac{1}{3}\eta^3\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}$$

$$\tau_{33}=\lambda(\nu L-\tau H+2\tau\zeta^2)+\nu(\lambda+2\mu)\left(2\xi^2-\eta^2-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\eta-2\nu E(l-\zeta)\eta\zeta+$$
$$+2(a_0f+b_0\psi+\omega)+a_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2\eta-\frac{1}{3}\eta^3\right)+a_0\left(\eta\zeta^2-\frac{1}{3}\eta^3\right)+$$
$$+\sigma\Delta\Phi-pE(l-\zeta)\eta+A\xi+B\eta+C$$

$$\tau_{12}=b_0(\eta^2-\xi^2)-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

$$\tau_{13}=2\mu[\tau\xi\zeta-2\nu(\sigma-1)\xi\eta\zeta+\nu l\sigma\xi\eta]+\zeta(a_0f_\xi'+b_0\psi_\xi'+\omega_\xi-2b_0\eta)+$$
$$+p[\chi_{1\xi}'+(\sigma+2)\xi\eta]+\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$$

$$\tau_{23}=\mu\left[2\tau\eta\zeta-\nu\eta^2\zeta-\nu\sigma l\,(\xi^2-\eta^2)-\nu\left(l-\frac{1}{2}\zeta\right)\zeta^2\right]+E\nu\,(\xi^2-\eta^2)\,\zeta+$$
$$+\zeta\left[a_0f_\eta'+b_0\psi_\eta'+\omega_\eta'+a_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\,\xi^2-\eta^2\right)+2b_0\xi\right]+$$
$$+p\left[\chi_{,\eta}'+\frac{1}{2}\,\sigma(\eta^2-\xi^2)+\xi^2\right]+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$$

где a_0 и b_0 — постоянные, f, ψ, ω и Ψ — гармонические функции в поперечном сечении S цилиндра (1.2), а Φ — бигармоническая функция.

Нетрудно убедиться, что система напряжений (2.6) будет удовлетворять уравнениям равновесия (2.3), условиям совместимости (2.5), а также граничным условиям (2.4), если функции f, ψ, ω, Ψ и Φ определены условиями:

в области S (2.7)

$$\Delta f=0,\qquad \Delta\psi=0,\qquad \Delta\omega=0,\qquad \Delta\Psi=0,\qquad \Delta\Delta\Phi=0$$

на контуре L области S

$$\frac{df}{dn}=-\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\,\xi^2-\eta^2\right)\beta,\qquad \frac{d\psi}{dn}=2\,(\eta\alpha-\xi\beta)\qquad \begin{pmatrix}\alpha=\cos\,(n\xi)\\ \beta=\cos\,(n\eta)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\omega}{dn}=\mu\nu\left[(3\sigma-2)\,\xi\eta\alpha+\left(\frac{\sigma+6}{2}\,\eta^2-\frac{5\sigma+8}{2}\,\xi^2\right)\beta\right]$$

$$\frac{d\Psi}{dn}=E\nu l\,(\xi^2\beta-\xi\eta\alpha),\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=\int\limits_0^s[(a_0f+b_0\psi+\omega)\,\beta+b_0\,(\xi^2-\eta^2)\,\alpha+X_n^{(0)}]\,ds$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=-\int\limits_0^s\left[(a_0f+b_0\psi+\omega)\alpha+a_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\,\xi^2\eta-\frac{1}{3}\,\eta^3\right)\alpha+b_0\,(\xi^2-\eta^2)\,\beta+Y_n^{(0)}\right]ds$$

где

$$X_n^{(0)}=+\mu\tau\,(\xi\varphi_\eta'-\eta^2)\,\alpha-\mu\tau\,(\xi\varphi_\xi'-\xi\eta)\,\beta-\mu\nu\left[\xi\chi_\eta'+\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi^2-\eta^2)\,\eta+\eta^3\right]\alpha+$$
$$+\mu\nu\left[\xi\chi_\xi'+\tfrac{1}{2}\,\sigma\,(\xi^2-\eta^2)\,\xi+\xi\eta^2\right]\beta$$
$$Y_n^{(0)}=-\mu\tau\,(\eta\varphi_\xi'+\xi^2)\,\beta+\mu\tau\,(\eta\varphi_\eta'+\xi\eta)\,\alpha+\mu\nu\left[\eta\chi_\xi'+(\sigma+2)\,\xi^2\eta\right]\beta-$$
$$-\mu\nu\left[\eta\chi_\eta'+(\sigma+2)\,\xi\eta^2\right]\alpha$$

Таким образом, функции f, ψ, ω и Ψ определяются решением задач Неймана[1] для области S, а Φ — решением бигармонической задачи.

Условия однозначности функции $\partial\Phi\,/\,\partial\xi$, $\partial\Phi\,/\,\partial\eta$ и Φ при обходе контура L дают (2.8)

$$a_0=\nu E\left[\frac{J_\eta}{J_\xi}-1\right]$$

$$a_0\int\limits_L\left[f(\xi\beta-\eta\alpha)+\xi\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2\eta-\frac{1}{3}\,\eta^3\right)\beta\right]ds+b_0\int\limits_L[\psi\,(\xi\beta-\eta\alpha)+(\xi^2-\eta^2)\,(\xi\beta-\eta\alpha)]\,ds=$$
$$=\int\limits_L[\omega\,(\xi\beta-\eta\alpha)+\eta X_n^{(0)}-\xi Y_n^{(0)}]\,ds$$

Эти формулы определяют значения постоянных a_0 и b_0, причем J_ξ, J_η — моменты инерции сечения S относительно осей $O\xi$ и $O\eta$.

---

[1] Легко убедиться, что необходимые условия решений этих задач удовлетворены; в частности, ψ есть удвоенная функция кручения для области S.

Возвращаясь к формулам (2.2), будем иметь (2.9)

$$X_x = -k\tau\mu\,(\xi\varphi'_\eta - \eta\varphi'_\xi) + k\mu\nu\,(\xi\chi'_\eta - \eta\chi'_\xi) - k\,(a_0 f + b_0\psi + \omega) + k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}$$

$$Y = -k\tau\mu\,(\xi\varphi_\eta' - \eta\varphi_\xi') + k\nu\mu\,(\xi\chi_\eta' - \eta\chi_\xi') - k\,(a_0 f + b_0\psi + \omega) - $$
$$ - a_0 k\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right) + k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}$$

$$Z_z = -\nu E\,(l-\zeta)\xi + 2\mu\tau k\,(\xi\varphi_\eta' - \eta\varphi_\xi') - 2\mu\nu k\,(\xi\chi_\eta' - \eta\chi_\xi') - k\nu E\,(l-\zeta)\eta\zeta +$$
$$+ 2\,(a_0 f + b_0\psi + \omega)\,k + ka_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2\eta - \frac{1}{3}\eta^3\right) + ka_0\left(\eta\zeta^2 - \frac{1}{3}\eta^3\right) +$$
$$+ k\sigma\triangle\Phi - Epk\,(l-\zeta)\,\eta + k\,(A\xi + B\eta + C)$$

$$X_y = -kb_0\,(\xi^2 - \eta^2) - k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

$$X_z = \mu\tau\,(\varphi_\xi' - \eta) - \mu\nu\left[\chi_\xi' + \tfrac{1}{2}\sigma\,(\xi^2 - \eta^2) + \eta^2\right] - 2\mu k\nu\,(\sigma - 1)\eta\,\zeta + \mu k\tau\xi\zeta +$$
$$+ \mu k\tau\zeta\varphi_\eta' - \mu\nu k\zeta\chi_\eta' + \zeta\,(a_0 f_\xi' + b_0\psi_\xi' + \omega_\xi - 2b_0\eta)\,k + kp\,[\chi_{1\xi} + (\sigma+2)\,\xi\eta] + k\,\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$$

$$Y_z = \mu\tau\,(\varphi_\eta' + \xi) - \mu\nu\,[\chi'_\eta + (\sigma+2)\,\xi\eta] + \mu\nu k\,(\sigma+2)\,(\xi^2 - \eta^2)\,\zeta + \mu\tau k\eta\zeta - \mu\tau\zeta k\varphi_\xi' +$$
$$+ \mu\nu k\zeta\chi_\xi' + k\zeta(a_0 f'_\eta + b_0\psi_\eta' + \omega_\eta' + 2b_0\xi) + a_0 k\zeta\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\xi^2 - \eta^2\right) +$$
$$+ pk\left[\chi'_{1\eta} + \frac{1}{2}\sigma\,(\eta^2 - \xi^2) + \xi^2\right] + k\,\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$$

Переходя к координатам x, y, z при помощи формул (1.3) и отбрасывая члены, содержащие k в квадрате и более высоких степенях, для компонентов напряжения находим значения (2.10)

$$X_x = -k\tau\mu\,(x\varphi_y' - y\varphi_x') + k\nu\mu\,(x\chi_y' - y\chi_x') - k\,(a_0 f + b_0\psi + \omega) + k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$Y_y = -k\tau\mu\,(x\varphi_y' - y\varphi_x') + k\mu\nu\,(x\chi_y' - y\chi_x') - k\,(a_0 f + b_0\psi + \omega) -$$
$$- ka_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right) + k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$Z_z = -\nu E\,(l-z)\,x + 2\mu\tau k\,(x\varphi_y' - y\varphi_x') - 2\mu\nu k\,(x\chi_y' - y\chi_x') + 2\,(a_0 f + b_0\psi + \omega) +$$
$$+ ka_0\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right) + a_0 k\left(yz^2 - \frac{1}{3}y^3\right) + k\sigma\triangle\Phi + pkE\,(l-z)\,y +$$
$$+ k\,(Ax + By + C)$$

$$X_y = -kb_0\,(x^2 - y^2) - k\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

$$X_z = \mu\tau\,(\varphi_x' - y) - \mu\nu\left[\chi_x' + \frac{1}{2}\sigma\,(x^2 - y^2) + y^2\right] +$$
$$+ kz\,(a_0 f_x' + b_0\psi_x' + \omega_x' - 2b_0 y) + kp\,[\chi'_{1x} + (\sigma+2)\,xy] + k\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

$$Y_z = \mu\tau\,(\varphi_y' + x) - \mu\nu\,[\chi_y' + (\sigma+2)\,xy] + kz\,(a_0 f_y' + b_0\psi_y' + \omega_y' + 2b_0 x) +$$
$$+ ka_0 z\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}x^2 - y^2\right) + kp\left[\chi_{1y}' + \frac{1}{2}\sigma\,(y^2 - x^2) + x^2\right] + km\,\frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

Постоянные A, B, C, p и τ подбираются так, чтобы удовлетворялись торцовые условия (2.11)

$$\iint\limits_S Y_z\,d\sigma = \iint\limits_S Z_z\,d\sigma = 0, \qquad \iint\limits_S xZ_z\,d\sigma = \iint\limits_S yZ_z\,d\sigma = 0, \qquad \iint\limits_S (xY_z - yX_z)\,d\sigma = 0$$

Тогда нетрудно показать, что будет иметь место также и условие

$$\iint_S X_z\, d\sigma = W \tag{2.12}$$

Как частный случай рассмотренной задачи при $\nu = 0$ получается решение задачи кручения (2.1) естественно закрученного стержня.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда область S есть внутренность эллипса, т. е.

$$F(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 \tag{3.1}$$

В этом случае с точностью до k^2 поверхность $F(x - kyz,\ y + kxz) = 0$ совпадает с поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - 2\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} kxyz \tag{3.2}$$

Как известно, в этом случае

$$\varphi(\xi, \eta) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\xi\eta, \tag{3.3}$$

$$\chi(\xi, \eta) = -\frac{2(1+\sigma)a^2 + b^2}{3a^2 + b^2}a^2\xi + \frac{1}{3}\,\frac{2a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\sigma(a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2}(\xi^3 - 3\xi\eta^2)$$

Обозначая через $Z = \xi + i\eta$ комплексную переменную на плоскости $\xi\eta$ поперечного сечения S, положим

$$Z = \omega(\zeta) = \frac{n}{2}\left(\zeta + \frac{m^2}{\zeta}\right) \qquad (m, n > 0) \tag{3.4}$$

В силу этого преобразования, каждой точке плоскости Z соответствуют две точки, сопряженные по отношению окружности γ_0 радиуса m с центром в начале координат на плоскости ζ, а каждому эллипсу соответствуют две концентрические окружности, расположенные одна внутри, а другая вне γ_0. Окружность γ_0 соответствует отрезку, соединяющему фокусы эллипса L. Для определенности рассмотрим окружность, расположенную вне γ_0, т. е. примем

$$n = a + b, \qquad m^2 = \frac{a - b}{a + b} \tag{3.5}$$

Нетрудно убедиться, что эллипсу L соответствует окружность γ единичного радиуса. Напомним, что искомая гармоническая функция f должна удовлетворять граничному условию, налагаемому на df / dn согласно (2.7).

Пусть $\Phi(Z) = f(\xi, \eta) + ig(\xi, \eta)$ аналитическая функция в области S. Производя замену переменных (3.4) и представляя в виде ряда Лорана, имеем

$$\Phi(Z) = \Phi(\omega(\zeta)) = \Phi_1(\zeta) = f_1 + ig_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty}(a_k + ib_k)\zeta^k \tag{3.6}$$

Заменяя ζ через $\rho e^{i\vartheta}$ и определяя вещественные и мнимые части, получим

$$f_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\rho^k a_k + \rho^{-k}a_{-k})\cos k\vartheta - (\rho^k b_k - \rho^{-k}b_{-k})\sin k\vartheta \tag{3.7}$$

Если $\zeta = me^{i\vartheta}$, причем ϑ меняется, например, от $-\pi$ до π, т. е. если точка ζ описывает окружность γ_0, соответствующая ей точка Z дважды опишет отрезок оси $O\xi$, соединяющей фокусы эллипса L; поэтому из однозначности и голоморфности функции $\Phi(Z)$ внутри эллипса следует

$$a_{-k} = m^{2k} a_k, \qquad b_{-k} = m^{2k} b_k \tag{3.8}$$

Заметим, что на контуре L в силу преобразования (3.4) имеем

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{df}{dn}\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|, \quad \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| \cos(n\xi) = b\cos\vartheta, \quad \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| \cos(n\eta) = a\sin\vartheta \qquad \begin{pmatrix}\eta = b\sin\vartheta \\ \xi = a\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

Поэтому условие (2.7) для df/dn в координатах ρ и ϑ принимает вид

$$\frac{df_1}{d\rho} = -\frac{a}{4}\left[\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 - 3b^2\right)\sin\vartheta + \left(\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 + b^2\right)\sin 3\vartheta\right] \text{ на контуре } \gamma \tag{3.9}$$

Из этого условия в силу формул (3.8) получаем, что все коэффициенты a_k, a_{-k} $(k=1, 2, \ldots)$, а также b_k, b_{-k} $(k=2, 4, 5, \ldots)$ равны нулю; постоянные a_0 и b_0 остаются произвольными; будем полагать их также равными нулю, а коэффициенты b_1, b_3, b_{-1} и b_{-3} будут иметь значения

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a+b}{8}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 - 3b^2\right], & b_3 &= \frac{(a+b)^3}{24(3b^2+a^2)}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 + b^2\right] \\ b_{-1} &= \frac{a-b}{8}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 - 3b^2\right], & b_{-3} &= \frac{(a-b)^3}{24(3b^2+a^2)}\left[\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 + b^2\right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Возвращаясь к формуле (3.7), получим

$$\begin{aligned} f_1 = &-\frac{a+b}{8}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 - 3b^2\right)\left(\rho - \frac{m^2}{\rho}\right)\sin\vartheta - \\ &- \frac{(a+b)^2}{24(3b^2+a^2)}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}a^2 + b^2\right)\left(\rho^3 - \frac{m^6}{\rho^3}\right)\sin 3\vartheta \end{aligned} \tag{3.11}$$

или в координатах $\xi\eta$ окончательно получим

$$f = \frac{a^2 + 2(1+\sigma)b^2}{(1+\sigma)(3b^2+a^2)}b^2\eta + \frac{1}{3}\,\frac{b^2 + \sigma(a^2+b^2)}{(1+\sigma)(3b^2+a^2)}(\eta^3 - 3\xi^2\eta) \tag{3.12}$$

Аналогичным образом найдем, что

$$\begin{aligned} &\psi = -2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\xi\eta, \qquad \Psi = El\nu\frac{a^2-b^2}{3b^2+a^2}\left[b^2\eta - \frac{1}{3}(\eta^3 - 3\xi^2\eta)\right] \\ &\omega = -\mu\nu\frac{(2\sigma+1)a^2 + 4(\sigma+1)b^2}{3b^2+a^2}b^2\eta - \mu\nu\frac{(5\sigma-10)b^2 - (5\sigma+8)a^2}{6(3b^2+a^2)}(\eta^3 - 3\xi^2\eta) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Определим теперь бигармоническую функцию Φ, пользуясь методом Мусхелишвили [7]; воспользуемся граничными условиями (2.7) для $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$, где постоянные a_0 и b_0 определяются соотношениями (2.8) и в рассматриваемом случае будут

$$a_0 = \nu\frac{a^2-b^2}{b^2}E, \qquad b_0 = 0 \tag{3.14}$$

Воспользуемся преобразованием (3.4) и выразим $\partial\Phi/\partial\xi - i\partial\Phi/\partial\eta$ как функцию от дуги ϑ контура γ. Для этого заметим, что на контуре L мы имеем

$$\cos(n\xi)\,ds = b\cos\vartheta\,d\vartheta, \qquad \cos(n\eta)\,ds = a\sin\vartheta\,d\vartheta$$

Поэтому в силу формул (3.11), (3.12) и (3.14) контурные условия для $\partial\Phi / \partial\xi$ и $\partial\Phi / \partial\eta$ согласно (2.7) будут (3.15)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = -\mu\tau\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,a\left[\frac{1}{4}(a^2-b^2)\cos\vartheta + \frac{1}{12}(a^2+3b^2)\cos 3\vartheta)\right] -$$

$$-\mu\nu\frac{ab}{2}\left[\frac{4(1+\sigma)a^4+(\sigma+6)a^2b^2+(2-\sigma)b^4}{4(3a^2+b^2)} - \frac{(4\sigma+12)a^4+(17\sigma+18)a^2b^2-(9\sigma-6)b^4}{12(3b^2+a^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\sigma}{3}(a^2-b^2)\right]\sin 2\vartheta - \mu\nu\frac{ab}{4}\left[\frac{(\sigma+4)^4+(2\sigma+14)a^2b^2-(3\sigma-6)b^4}{16(3a^2+b^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(5\sigma-36)a^4-(14\sigma+30)a^2b^2+(9\sigma-6)b^4}{48(3b^2+a^2)} - \frac{5\sigma+8}{24}(a^2-b^2)\right]\sin 4\vartheta$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\mu\tau\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,b\left[\frac{1}{4}(a^2-b^2)\sin\vartheta + \frac{1}{12}(3a^2+b^2)\sin 3\vartheta\right] -$$

$$-\frac{\mu\nu}{2}\left[\frac{(2-\sigma)a^2b^4+2a^4b^2-(7\sigma+4)a^6}{8(3a^2+b^2)} - \frac{12\sigma a^6+(11\sigma+12)a^4b^2-(56\sigma+6)a^2b^4+(9\sigma-6)b^6}{24(3b^2+a^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma a^4+2(1-\sigma)a^2b^2-(2-\sigma)b^4}{8}\right]\cos 2\vartheta - \frac{\mu\nu}{4}\left[\frac{(\sigma+4)a^6+(2\sigma+14)a^4b^2-(3\sigma-6)a^2b^4}{16(3a^2+b^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{12\sigma a^6+(19\sigma+36)a^4b^2-(22\sigma-30)a^2b^4-(9\sigma-6)b^6}{48(3b^2+a^2)} + \frac{\sigma a^4-2a^2b^2+(2-\sigma)b^4}{16}\right]\cos 4\vartheta$$

и, следовательно, на контуре γ будет

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = -\mu\tau\left[c_1e^{i\vartheta}+c_{-1}e^{-i\vartheta}+c_3e^{3i\vartheta}+c_{-3}e^{-3i\vartheta}\right] +$$

$$+ i\mu\nu\left[c_2e^{2i\vartheta}+c_{-2}e^{-2i\vartheta}+c_4e^{4i\vartheta}+c_{-4}e^{-4i\vartheta}\right] \qquad (3.16)$$

где постоянные c имеют значения

$$c_1 = \frac{1}{8}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}(a-b), \qquad c_3 = \frac{1}{24}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(a-b)^3$$

$$c_{-1} = \frac{1}{8}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}(a+b), \qquad c_{-3} = \frac{1}{24}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}(a+b)^3 \qquad (3.17)$$

$$c_2 = \frac{1}{16(3a^2+b^2)}\left[-(7\sigma+4)a^6+8(1+\sigma)a^5b+2a^4b^2+2(\sigma+6)a^3b^3+(2-\sigma)a^2b^4+\right.$$

$$\left.+2(2-\sigma)ab^5\right] - \frac{1}{48(3b^2+a^2)}\left[9\sigma a^6-16\sigma a^5b+2(4\sigma+3)a^4b^2+2(9\sigma+10)a^3b^3-\right.$$

$$\left.-(41\sigma+18)a^2b^4+6(\sigma+6)ab^5+12b^6\right]$$

$$c_{-2} = \frac{1}{16(3a^2+b^2)}\left[-(7\sigma+4)a^6-8(1+\sigma)a^5b+2a^4b^2-2(\sigma+6)a^3b^3+(2-\sigma)a^2b^4-\right.$$

$$\left.-2(2-\sigma)ab^5\right] - \frac{1}{48(3b^2+a^2)}\left[9\sigma a^6+16\sigma a^5b+2(4\sigma+3)a^4b^2-2(9\sigma+10)a^3b^3-\right.$$

$$\left.-(41\sigma+18)a^2b^4-6(\sigma+6)ab^5+12b^6\right]$$

$$c_4 = \frac{1}{64(3a^2+b^2)}\left[(\sigma+4)a^6+(\sigma+4)a^5b+2(\sigma+7)a^4b^2+2(\sigma+7)a^3b^3-\right.$$

$$\left.-3(\sigma-2)a^2b^4-3(\sigma-2)ab^5\right] - \frac{1}{192(3b^2+a^2)}\left[9\sigma a^6+5(3\sigma-4)a^5b+\right.$$

$$\left.+2(5\sigma+21)a^4b^2+2(3\sigma+1)a^3b^3-2(8\sigma-21)a^2b^4-3(7\sigma-18)ab^5+12b^6\right]$$

$$c_{-4} = \frac{1}{64(3a^2+b^2)}\left[(\sigma+4)a^6-(\sigma+4)a^5b+2(\sigma+7)a^4b^2-2(\sigma+7)a^3b^3-\right.$$

$$\left.-3(\sigma-2)a^2b^4+3(\sigma-2)ab^5\right] - \frac{1}{192(3b^2+a^2)}\left[9\sigma a^6-5(3\sigma-4)a^5b+\right.$$

$$\left.+2(5\sigma+21)a^4b^2-2(3\sigma+1)a^3b^3-2(8\sigma-21)a^2b^4+3(7\sigma-18)ab^5-12b^6\right]$$

Мы предполагаем здесь, что при $\vartheta = 0$ $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$ имеют значения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = -\frac{1}{3}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,a^3\mu\tau$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{\mu\nu}{32}\left[\frac{-3(9\sigma+4)a^6+2(\sigma+11)a^4b^2-7(\sigma-2)b^4}{3a^2+b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{15\sigma a^6+2(7\sigma+11)a^4b^2-(61\sigma+10)a^2b^4+12b^6}{3b^2+a^2}\right]$$

Известно, что определение функции Φ сводится к нахождению двух гармонических функций $\varphi(Z)$ и $\psi(Z)$ в области S, которые связаны с Φ формулой

$$\overline{\varphi}(\overline{Z}) + \overline{Z}\varphi'(Z) + \psi(Z) = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - i\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \tag{3.18}$$

Пусть $\varphi(\zeta) = \varphi[\omega(\zeta)]$ и $\psi(\zeta) = \psi[\omega(\zeta)]$; тогда ясно, что функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ должны быть голоморфны в кольце между γ и γ_0 и на контуре γ удовлетворять условию $(\sigma = e^{i\vartheta})$:

$$\overline{\varphi}(\overline{\sigma}) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega}'(\overline{\sigma})}\,\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = -\mu\tau\,[c_1\sigma + c_{-1}\overline{\sigma} + c_3\sigma^3 + c_{-3}\overline{\sigma}^3] +$$

$$+ i\mu\nu\,[c_2\sigma^2 + c_{-2}\overline{\sigma}^2 + c_4\sigma^4 + c_{-4}\overline{\sigma}^4] \tag{3.19}$$

Кроме того, так как на окружности γ_0 точкам $me^{i\vartheta}$ и $me^{-i\vartheta}$ соответствует одна и та же точка отрезка, соединяющего фокусы эллипса, а функции $\varphi(Z)$ и $\psi(Z)$ голоморфны внутри эллипса, то при $\sigma = e^{i\vartheta}$ мы имеем

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\overline{\sigma}), \qquad \psi(\sigma) = \psi(\overline{\sigma}) \tag{3.20}$$

Следовательно, имеют место разложения

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k\zeta^k, \qquad \psi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k'\zeta^k \tag{3.21}$$

Из условия (3.20) следует

$$a_{-k} = m^{2k}a_k, \qquad a_{-k}' = m^{2k}a_k' \tag{3.22}$$

Из условия (3.19) в силу формул (3.21) и (3.22) получаем, что все коэффициенты a_k, a_{-k} $(k = 5, 6, \ldots)$ и a_k', a_{-k}' $(k = 5, 6, \ldots)$ равны нулю; постоянную a_0 мы также предполагаем равной нулю, а остальные коэффициенты будут иметь значения (3.23)

$$a_1 = \frac{(m^2c_1 - c_{-1})\mu\tau}{2(1-m^4)}, \qquad a_0' = i\mu\nu c_0 - 2(1+m^4)\,a_2 - 4(1+m^4)\,m^2a_4$$

$$a_2 = \frac{(c_{-2} - m^4c_2)\,i\mu\nu}{(1+m^2)^2(1-m^4)}, \qquad a_1' = -\mu\tau c_1 - 2m^2a_1 - 3(1+m^4)\,a_3$$

$$a_3 = \frac{(m^6c_3 - c_{-3})\mu\tau}{(1+4m^4+m^8)(1-m^4)}, \qquad a_2' = i\mu\nu c_2 - (2+m^2)\,m^2a_2 - 4(1+m^2)\,a_4$$

$$a_4 = \frac{(c_{-4} - m^8c_4)\,i\mu\nu}{[(1+m^8)(1+m^4)+4m^6](1-m^4)}, \qquad a_3' = \mu\tau c_3 - m^2(3+m^4)\,a_3$$

$$a_4' = i\mu\nu c_4 - (4+m^6)\,m^2a_4$$

Таким образом, имеем

$$\varphi(\zeta) = a_1\left(\zeta + \frac{m^2}{\zeta}\right) + a_2\left(\zeta^2 + \frac{m^4}{\zeta^2}\right) + a_3\left(\zeta^3 + \frac{m^6}{\zeta^3}\right) + a_4\left(\zeta^4 + \frac{m^8}{\zeta^4}\right)$$

$$\psi(\zeta) = a_0' + a_1'\left(\zeta + \frac{m^2}{\zeta}\right) + a_2'\left(\zeta^2 + \frac{m^4}{\zeta^2}\right) + a_3'\left(\zeta^3 + \frac{m^6}{\zeta^3}\right) + a_4'\left(\zeta^4 + \frac{m^8}{\zeta^4}\right)$$

Или, возвращаясь к переменной $Z=\xi+i\eta$, будем иметь (3.24)

$$\varphi(Z)=2m^2(a_4m^2-a_2)+\frac{2}{n}(a_1-3m^2a_3)Z+\frac{4}{n^2}(a_2-4m^2a_4)Z^2+\frac{8}{n^3}a_3Z^3+\frac{16}{n^3}a_4Z^4$$

$$\psi(Z)=a_0'+2m^2(a_4'm^2-a_2')+\frac{2}{n}(a_1'-3m^2a_3')Z+\frac{4}{n^2}(a_2'-4m^2a_4')Z^2+\frac{8}{n^3}a_3'Z^3+\frac{16}{n^3}a_4'Z^4$$

При помощи $\varphi(Z)$ и $\psi(Z)$ легко находим по формуле (3.18) производные $\partial\Phi/\partial\xi$ и $\partial\Phi/\partial\eta$, которые только и нужны. Простые вычисления дают

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}=-\frac{2}{n}[2(a_1-3m^2a_3)+a_1'-3m^2a_3']\mu\tau-\frac{8}{in^2}[(a_2-4m^2a_4)+a_2'-4m^2a_4']\mu\nu\eta-$$
$$-\frac{24}{n^3}\mu\tau(4a_3+a_3')\xi^2+\frac{24}{n^3}\mu\tau a_3'\eta^2-\frac{192}{in^4}(3a_4+a_4')\mu\nu\xi^2\eta-\frac{64}{in^4}(a_4-a_4')\mu\nu\eta^3$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{8}{in^2}[(a_2-4m^2a_4)+a_2'-4m^2a_4']\mu\nu\xi+\frac{48}{n^3}a_3'\mu\tau\xi\eta-$$
$$-\frac{192}{in^4}(a_4-a_4')\mu\nu\xi\eta^2-\frac{64}{in^4}(3a_4+a_4')\mu\nu\xi^3$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=-\frac{2}{n}[2(a_1-3m^2a_3)-(a_1'-3m^2a_3')]\mu\tau-\frac{8}{in^2}[3(a_2-4m^2a_4)-(a_2'-4m^2a_4')]\mu\nu\eta+$$
$$+\frac{24}{n^3}a_3'\mu\tau\xi^2+\frac{24}{n^3}(4a_3-a_3')\mu\tau\eta^2-\frac{192}{in^4}\mu\nu(a_4-a_4')\xi^2\eta-\frac{64}{in^4}\mu\nu(2a_4+a_4')\eta^3$$

$$p=\frac{1}{6}\frac{1}{(1+\sigma)a^2(3b^2+a^2)}[(26\sigma+11)a^4-2(14\sigma-1)a^2b^2+(50\sigma+73)b^4]\mu\nu l$$

$$\tau=0,\ A=0,\ C=\left[\frac{8\sigma}{n}(a_1-3m^2a_3)+\frac{a^2-b^2}{2n^3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}n^3+48\sigma a_3\right)\right]\mu\tau$$

$$B=\frac{2\mu\nu}{in^4}\Big\{[a_4(4a^2-3b^2)-(a_2-4m^2a_4)n^2]\sigma+$$
$$+\frac{(2-\sigma)b^4+(6+2\sigma)a^2b^2-(12+9\sigma)a^4}{2(3a^2+b^2)}+\frac{\sigma a^4+7a^2b^2+11(1+\sigma)b^4}{3(3b^2+a^2)}\frac{a^2-b^2}{b^2}\Big\}$$

В частности, когда $a=b=R$, т. е. при $m=0$, $n=2R$, мы получим с точностью до k^2 решение задачи изгиба поперечной силой естественно закрученного кругового стержня.

Поступило в редакцию
14 V 1946

Институт математики
Академии Наук Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А. К. К вопросу деформации естественно закрученных стержней. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1944. Т. V. № 5.
2. Reissner H. Ingenieur Archiv. 1933. H. 6.
3. Тумаркин С. А. Равновесие и колебания закрученных стержней. Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 341.
4. Риз П. М. Деформации и напряжения естественно закрученных стержней. Известия Академии Наук СССР. Сер. мат. 1939. № 4 (см. также Труды ЦАГИ, 1940. Вып. 471).
5. Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю. Задача Сен-Венана для естественно скрученных стержней. Доклады Академии Наук 1939. Т. XXIV, № 1, 3, 4 (см. также Доклады Академии Наук. 1940. Т. XXVII. № 5).
6. Рухадзе А. К. Задача изгиба тел, близких к призматическим. ПММ. 1942. Т. VI.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Издание Академии Наук СССР. 1935.