Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В. З. Власов

(Москва)

1. Исследование тонкой упругой оболочки с помощью некоторых геометрических гипотез можно привести к двухмерной задаче. При этом допускается, что деформации сдвига в нормальных плоскостях и деформации удлинений по направлению нормали к средней поверхности оболочки равны нулю. Основные уравнения имеют вид[1] (1.1).

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\Delta_0}{\partial\alpha}+\frac{\delta^2}{6}H\frac{\partial\Delta_1}{\partial\alpha}+\frac{\delta^2}{12}\frac{\partial\Delta_2}{\partial\alpha}\right)-(1-\nu)\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\chi_0}{\partial\beta}+\frac{\delta^2}{6}k_1\frac{\partial\chi_1}{\partial\beta}+\frac{\delta^2}{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial\beta}\right)+$$
$$+(1-\nu)\left(Ku+\frac{k_2}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\frac{1-\nu^2}{E\delta}X=0$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\Delta_0}{\partial\beta}+\frac{\delta^2}{6}H\frac{\partial\Delta_1}{\partial\beta}+\frac{\delta^2}{12}\frac{\partial\Delta_2}{\partial\beta}\right)+(1-\nu)\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\chi_0}{\partial\alpha}+\frac{\delta^2}{6}k_2\frac{\partial\chi_1}{\partial\alpha}+\frac{\delta^2}{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial\alpha}\right)+$$
$$+(1-\nu)\left(Kv+\frac{k_1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\frac{1-\nu^2}{E\delta}Y=0$$

$$\frac{\delta^2}{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{B}{A}\left[k_2\frac{\partial\Delta_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial\Delta_1}{\partial\alpha}+(1-\nu)K\left(k_1Au+\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right]-(1-\nu)k_1\frac{\partial\chi_0}{\partial\beta}\right\}+$$
$$+\frac{\delta^2}{12}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{A}{B}\left[k_1\frac{\partial\Delta_0}{\partial\beta}+\frac{\partial\Delta_1}{\partial\beta}+(1-\nu)K\left(k_2Bv+\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right]+(1-\nu)k\frac{\partial\chi_0}{\partial\alpha}\right\}-$$
$$-\frac{\delta^2}{6}(K\Delta_1+H\Delta_2)-2H\Delta_0+\frac{1-\nu}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_2Bu)+\frac{\partial}{\partial\beta}(k_1Av)-2ABKw\right]-\frac{1-\nu^2}{E\delta}Z=0$$

Здесь δ — толщина оболочки; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; α и β — координаты точки средней поверхности оболочки в линиях главных кривизн; k_1, k_2 — главные кривизны средней поверхности; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны; H и K — соответственно средняя и гауссова кривизны поверхности; A и B — коэффициенты первой квадратической формы; X, Y, Z — компоненты вектора интенсивности заданной внешней поверхностной нагрузки; из этих компонентов X и Y направлены по положительным касательным к линиям кривизн; Z — нормальная составляющая нагрузки, направленная для поверхности положительной гауссовой кривизны в сторону внутренней нормали; u и v — перемещения точки по линиям кривизн; w — перемещение по нормали к поверхности.

Величины $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ представляют собой параметры элементарного объемного расширения оболочки; χ_0, χ_1, χ_2 — параметры элементарного вращения относительно нормали к средней поверхности. Эти величины определяются как коэффициенты первых членов трех разложений соответствующих им величин Δ и χ в трехмерной задаче теории упругости по степеням расстояний γ по нормали от средней поверхности до точки (α, β, γ) тела оболочки

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma^2, \qquad \chi = \chi_0 + \chi_1\gamma + \chi_2\gamma^2$$

Параметры $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \chi_0, \chi_1, \chi_2$ в соответствии с основными гипотезами Кирхгофа определяются формулами (1.2)

$$\Delta_0 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Av)\right] - (k_1 + k_2)w$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial k_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial k_2}{\partial\alpha}\right)\frac{u}{A} + \left(\frac{\partial k_1}{\partial\beta} + \frac{\partial k_2}{\partial\beta}\right)\frac{v}{B} + (k_1^2 + k_2^2)w +$$
$$+ \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)$$

$$\Delta_2 = -\left(k_1\frac{\partial k_1}{\partial\alpha} + k_2\frac{\partial k_2}{\partial\alpha}\right)\frac{u}{A} - \left(k_1\frac{\partial k_1}{\partial\beta} + k_2\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\right)\frac{v}{B} - (k_1^3 + k_2^3)w -$$
$$- k_1\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right] - k_2\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right]$$

$$\chi_0 = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial\beta}(Au)\right]$$

$$\chi_1 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left[\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{B} + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{A}\right]$$

$$\chi_2 = \frac{k_1 - k_2}{2}\left\{k_1\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{B} + k_2\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{A} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right\}$$

2. Формулы для тангенциальных усилий и моментов будут

$$T_1 = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - \frac{\delta^2}{12}(k_1 - k_2)\varkappa_1\right], \qquad G_1 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 + k_2(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)]$$
$$T_2 = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \frac{\delta^2}{12}(k_1 - k_2)\varkappa_2\right], \qquad G_2 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_2 + \nu\varkappa_1 + k_1(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)]$$
$$S_1 = +\frac{E\delta}{2(1+\nu)}\left[\omega - \frac{\delta^2}{12}(k_1 - k_2)\tau\right], \qquad H_1 = +\frac{E\delta^3}{24(1+\nu)}(2\tau + k_2\omega) \tag{2.1}$$
$$S_2 = -\frac{E\delta}{2(1+\nu)}\left[\omega + \frac{\delta^2}{12}(k_1 - k_2)\tau\right], \qquad H_2 = -\frac{E\delta^3}{24(1+\nu)}(2\tau + k_1\omega)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \varkappa_1, \varkappa_2, \tau$—компоненты деформации средней поверхности оболочки, из которых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ относятся к деформации растяжения и сдвига, а $\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ — к деформациям изгиба и кручения. Для деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$; $\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$—из общих геометрических уравнений теории упругости с помощью гипотез о нерастяжимости нормального элемента оболочки и об отсутствии деформаций сдвига в плоскостях нормальных сечений получаются формулы

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v - k_1 w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u - k_2 w, \quad \omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)$$
$$\varkappa_1 = \frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\frac{u}{A} + \frac{\partial k_1}{\partial\beta}\frac{v}{B} + k_1^2 w + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$
$$\varkappa_2 = \frac{\partial k_2}{\partial\alpha}\frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial\beta}\frac{v}{B} + k_2^2 w + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} \tag{2.2}$$
$$\tau = \frac{k_1 - k_2}{2}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) - \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\right] + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)$$

К уравнениям (2.1) и (2.2) следует присоединить статические уравнения равновесия оболочки (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_1) - T_2\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}(AS_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta}S_1 - ABk_1N_1 + ABX = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AT_2) - T_1\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BS_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}S_2 - ABk_2N_2 + ABY = 0$$

$$k_1T_1 + k_2T_2 + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2)\right] + Z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BH_1) - H_2\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}(AG_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta}G_1 + ABN_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AH_2) - H_1\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BG_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}G_2 - ABN_1 = 0$$

$$S_1 + S_2 + k_1H_1 + k_2H_2 = 0$$

Последнее из этих уравнений при (2.1) удовлетворяется тождественно. Остальные пять уравнений вместе с уравнениями (2.1) и (2.2) образуют полную систему 19 дифференциальных уравнений оболочки, эквивалентную системе 9 уравнений (1.1) и (1.2).

3. В случае сферической оболочки радиуса R и толщиной δ формулы (1.2) при $k_1 = k_2 = k = 1/R = \text{const}$ принимают вид

$$\Delta_0 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bu) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Av)\right] - 2kw, \quad \Delta_1 = \nabla^2 w + 2k^2 w, \quad \Delta_2 = -k(\nabla^2 w + 2k^2 w)$$

$$\chi_0 = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Au)\right], \qquad \chi_1 = 0, \qquad \chi_2 = 0 \tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем через ∇^2 обозначен дифференциальный оператор 2-го порядка эллиптического типа

$$\nabla^2 w = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\right] = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{AB}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)$$

Основные уравнения (1.1) путем дифференцирования и соответствующих линейных преобразований первых двух из них по подстановке величин (3.1) могут быть представлены в виде

$$[\nabla^2 + (1-\nu)k^2]\Delta_0 + \left[\frac{\delta^2}{12}\nabla^2 + (1-\nu)\right](\nabla^2 + 2k^2)kw +$$
$$+ \frac{1-\nu^2}{E\delta}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BX) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AY)\right] = 0$$

$$\left[\frac{\delta^2}{12}\nabla^2 - (1+\nu)\right]k\Delta_0 + \frac{\delta^2}{12}[\nabla^2 + (1-\nu)k^2](\nabla^2 + 2k^2)w - \frac{1-\nu^2}{E\delta}Z = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla^2\chi_0 + 2k^2\chi_0 - \frac{1+\nu}{E\delta}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(AX) - \frac{\partial}{\partial \beta}(BY)\right] = 0$$

Этими тремя уравнениями определяются три основные инвариантные величины: объемное расширение Δ_0, нормальное вращение χ_0 и нормальное перемещение w (положительное, направленное к центру сферы).

Исключая из первых двух уравнений Δ_0, получим

$$\left[(\nabla^2+k^2)^2+\frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2}k^2\right](\nabla^2+2k^2)w=-\frac{12(1-\nu^2)}{E\delta^3}\left\{(1+\nu)\frac{k}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right]+(1-\nu)\,k^2Z+\nabla^2\left[Z+\frac{\delta^2}{12}\frac{k}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right)\right]\right\}$$

$$\nabla^2\chi_0+2k^2\chi_0=\frac{1+\nu}{E\delta}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(AX)-\frac{\partial}{\partial\beta}(BY)\right] \qquad (3.4)$$

Уравнения (3.4) представляют собой также уравнения сферической оболочки относительно двух инвариантных величин: нормального перемещения (прогиба) w и нормального вращения χ_0. С определением прогиба объемное расширение Δ_0 находится из формулы

$$k\Delta_0=\frac{\delta^2}{12(1+\nu)}\nabla^2(\nabla^2+2k^2)w-\frac{(1-\nu)\delta k}{12E}\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right]-\frac{1-\nu}{E\delta}Z \qquad (3.5)$$

получающейся из первых двух уравнений (3.3) путем исключения величины $\nabla^2\Delta_0$. Тангенциальные перемещения определяются из формул

$$k^2u=-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Delta_0+\frac{\delta^2}{12}k\nabla^2w\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial\chi_0}{\partial\beta}-\frac{k}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{E\delta}X$$

$$k^2v=-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\Delta_0+\frac{\delta^2}{12}k\nabla^2w\right)-\frac{1}{A}\frac{\partial\chi_0}{\partial\alpha}-\frac{k}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{1+\nu}{E\delta}Y \qquad (3.6)$$

Эти формулы получаются из уравнений (3.1) и основных уравнений (1.1), в которых для сферической оболочки $k_1=k_2=k=1/R=\mathrm{const}$. Величины u и v могут быть также найдены из первого и четвертого уравнений (3.1).

Формулы (2.2) принимают вид

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v-kw, \qquad \varkappa_1=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+k^2w$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u-kw, \qquad \varkappa_2=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+k^2w \qquad (3.7)$$

$$\omega=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right), \qquad \tau=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2w}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)$$

Последние три из этих формул показывают, что в данной постановке введенные параметры деформации изгиба и кручения в случае сферической оболочки зависят только от нормального перемещения w. Другими словами, для тангенциальной деформации, определяемой одними только тангенциальными перемещениями u, v (при $w=0$), деформация сферической оболочки происходит с сохранением ее формы, что находится в согласии с основной гипотезой Кирхгофа [1]. Полагая в формулах (2.1) $k_1=k_2=k$, получим

$$T_1=\frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2), \qquad G_1=-\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_1+\nu\varkappa_2+k(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)]$$

$$T_2=\frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1), \qquad G_2=-\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}[\varkappa_2+\nu\varkappa_1+k(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1)] \qquad (3.8)$$

$$S_1=-S_2=S=\frac{E\delta}{2(1+\nu)}\omega, \qquad H_2=-H_1=H=-\frac{E\delta^3}{24(1+\nu)}(2\tau+k\omega)$$

Дадим теперь другое представление основных уравнений сферической оболочки, вводя наряду с прогибом функцию напряжений φ.

Статические уравнения (2.3) при $k_1 = k_2 = k = \text{const}$ и при $X = Y = Z = 0$ могут быть представлены в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \alpha}[B(T_1 - kG_1)] - \frac{\partial B}{\partial \alpha}(T_2 - kG_2) + \frac{\partial}{\partial \beta}[A(S - kH)] + \frac{\partial A}{\partial \beta}(S - kH) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \beta}[A(T_2 - kG_2)] - \frac{\partial A}{\partial \beta}(T_1 - kG_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha}[B(S - kH)] + \frac{\partial B}{\partial \alpha}(S - kH) = 0 \\
k(T_1 + T_2) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2)\right] = 0 \qquad (4.1) \\
N_1 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(AH) + \frac{\partial A}{\partial \beta}H + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BG_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}G_2\right] \\
N_2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BH) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}H + \frac{\partial}{\partial \beta}(AG_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta}G_1\right]
\end{gathered}
$$

Введем функцию $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$, аналогичную функции Эри в плоской задаче теории упругости. Подобно тому как геометрические величины χ_1, χ_2, τ определяются в функции перемещения w, определим следующие комбинации внутренних усилий:

$$
\begin{gathered}
T_2 - kG_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + k^2\varphi \\
T_1 - kG_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{A^2B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + k^2\varphi \qquad (4.2) \\
-(S - kH) = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)
\end{gathered}
$$

Легко видеть, принимая во внимание уравнение Гаусса:

$$
\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) = -k_1k_2AB
$$

что этим мы удовлетворим первым двум уравнениям (4.1). Полагая моменты $G_1 = G_2 = H = 0$ в (4.2) и (4.1), получим основное дифференциальное уравнение для безмоментной сферической оболочки в виде [1]

$$
\nabla^2\varphi + 2k^2\varphi = 0 \qquad (4.3)
$$

Из формул (3.8) нетрудно получить соотношения

$$
\begin{aligned}
G_1 + \frac{k\delta^2}{12}T_1 &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_1 + \nu\chi_2) \\
G_2 + \frac{k\delta^2}{12}T_2 &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_2 + \nu\chi_1)
\end{aligned}
\qquad H + \frac{k\delta^2}{12}S = \frac{E\delta^3}{12(1+\nu)}\tau \qquad (4.4)
$$

Уравнениями (4.2), (4.4), (3.7) усилия T_1, T_2, S и моменты G_1, G_2, H выражены через две основные функции $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ и $w = w(\alpha, \beta)$.

Для величины Δ_0 из (4.2), (4.4), (3.7) и (3.8) нетрудно получить формулу

$$
\Delta_0 = \frac{1-\nu}{E\delta}(\nabla^2\varphi + 2k^2\varphi) - \frac{\delta^2 k}{12}(\nabla^2 w + 2k^2 w) \qquad (4.5)
$$

[1] При некотором выборе независимых переменных уравнение (4.3) приводится к оператору Лапласа [2, 3, 4].

На основании этого равенства первые два уравнения (3.3) принимают вид $(X = Y = Z = 0)$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E\delta}\left[\nabla^2+(1-\nu)\,k^2\right](\nabla^2\varphi+2k^2\varphi)+(\nabla^2+2k^2)\,kw=0 \\ \frac{12\,(1-\nu)\,k}{E\delta^3}\left[\frac{\delta^2}{12}\nabla^2-(1+\nu)\right](\nabla^2\varphi+2k^2\varphi)+(\nabla^2+2k^2)\,(\nabla^2 w+2k^2 w)=0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Если ввести теперь новую функцию $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ по формулам

$$\varphi = -(\nabla^2\Phi+2k^2\Phi), \qquad w=\frac{1}{E\delta k}\left[\nabla^2+(1-\nu)\,k^2\right](\nabla^2\Phi+2k^2\Phi) \tag{4.7}$$

то для этой функции из (4.6) получаем дифференциальное уравнение восьмого порядка, которое может быть представлено в виде

$$\left[(\nabla^2+k^2)^2+\frac{12\,(1-\nu^2)\,k^2}{\delta^2}\right](\nabla^2+2k^2)\,(\nabla^2\Phi+2k^2\Phi)=0 \tag{4.8}$$

Из уравнения (4.8) следует, что функция Φ может быть представлена в виде суммы трех функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, определяемых уравнениями [1]

$$(\nabla^2+2k^2)\,(\nabla^2\Phi_3+2k^2\Phi_3)=0, \qquad \nabla^2\Phi_1+2\lambda_1^2\Phi_1=0, \qquad \nabla^2\Phi_2+2\lambda_2^2\Phi_2=0 \tag{4.9}$$

Здесь λ_1^2, λ_2^2 обозначают комплексные величины:

$$2\lambda_1^2=k^2+\frac{2k}{\delta}\sqrt{-3\,(1-\nu^2)}, \qquad 2\lambda_2^2=k^2-\frac{2k}{\delta}\sqrt{-3\,(1-\nu^2)} \tag{4.10}$$

После определения функции Φ внутренние силы и перемещения находятся соответственно по формулам (4.6), (4.3), (4.2), (3.7), (3.6), (4.5).

Поступила в редакцию
5 VI 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 4
2. Власов В. З. Расчет оболочек вращения на несимметричную нагрузку «Проект и стандарт» № 3 и 4 за 1937 г.
3. Власов В. З. Расчет оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка. Сбор. «Пластинки и оболочки» ЦНИПС. Госстройиздат. 1939.
4. Власов В. З. Безмоментная теория оболочек, очерченных по поверхностям вращения. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.
5. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ. 1944. Т. IX. Вып. 6.
6. Власов В. З. Некоторые новые задачи строительной механики ортотропных оболочек. Известия ОТН Академия Наук СССР. 1947. Вып. 1.
7. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки, ПММ. 1945. Т. X. Вып. 5.

[1] Распадение общего уравнения (4.8) на три уравнения (4.9) соответствует тому факту, что, как показано в работе [5], полное напряженное состояние сферической оболочки можно разложить на три более простых: безмоментное, моментное и смешанное; функция Φ_3 соответствует первым двум из этих напряженных состояний, а функции Φ_1 и Φ_2 соответствуют смешанному напряженному состоянию. Методы интегрирования уравнений (4.9), представленных в несколько ином виде, рассматривались А. Л. Гольденвейзером [5] и И. Н. Векуа [7].