Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ОБ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК КИРХГОФА-ЛЯВА

Х. М. Муштари

(Казань)

1. Теория тонких оболочек, построенная на гипотезе Кирхгофа-Лява, для компонентов деформации дает выражения

$$e_{xx} = \frac{\varepsilon_1 - z\varkappa_1}{1 - z / R_1}, \ldots \tag{1.1}$$

причем здесь и далее в этой статье приняты обозначения курса теории упругости Лява, а также $h_0 = h / R$, $w_0 = w / h$.

Новожилов и Финкельштейн показали [1], что эта гипотеза дает при определении напряжения погрешность порядка h_0 по сравнению с единицей, если R — наименьший из линейных размеров или радиусов кривизны срединной поверхности оболочки, и что, следовательно, вместо (1.1) можно применять с той же степенью точности выражения

$$e_{xx} = \varepsilon_1 - z\varkappa_1 \tag{1.2}$$

При этом компоненты усилия и момента будут соответственно

$$T_1 = \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \ldots \qquad G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \ldots \tag{1.3}$$

Однако некоторые авторы, принимая гипотезу Кирхгофа, все же предпочитают формулы (1.1) и вместо (1.3) предлагают выражения

$$\begin{gathered} T_1 = D\left[\frac{3}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\varkappa_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1}\right)\right], \ldots \\ G_1 = -D\left[\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2 + \varepsilon_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right], \ldots \end{gathered} \tag{1.4}$$

Ниже устанавливается область применимости линейной теории оболочек и показывается, что нет необходимости уточнять формулы (1.2), если

$$h_0 \leqslant \sqrt{\varepsilon_p} \tag{1.5}$$

Здесь ε_p — максимальное относительное удлинение в пределах закона Гука.

2. Нами было показано [2], что с точностью до квадратов компонентов перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\frac{\ }{\partial\alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2}\gamma_1^2, \ldots \\ \varkappa_1 &= \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\gamma_2 + \frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{2R_1}\gamma_2^2, \ldots \\ \varkappa_2 &= \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_1 + \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\beta} - \frac{1}{2R_2}\gamma_1^2, \ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\left(\gamma_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right) \\ &\left(\gamma_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть α, β — безразмерные гауссовы координаты. Тогда, если R_1 и R_2 велики, справедливость (1.2) очевидна.

Пусть хотя бы один из радиусов кривизны R_1 и R_2 будет одного порядка с величинами A и B. Обозначим через $\varkappa$ большую из величин $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, через γ—большую из величин γ_1 и γ_2, через γ_α—производную от γ по α.

Как видно из имеющихся решений уравнений упругого равновесия тонкой оболочки, дифференцирование по безразмерной координате либо не изменяет порядка величин, характеризующих деформацию, либо увеличивает их (в пограничной зоне). Дифференцирование же величин A и B не изменяет их порядка. Поэтому по формулам (2.1) с точностью линейной теории

$$\varkappa \sim \frac{1}{R} \gamma_\alpha$$

Здесь и в дальнейшем символ $\sim$ указывает, что сравниваемые величины имеют одинаковый порядок. Следовательно, максимальное удлинение от изгиба

$$h\varkappa \sim h_0 \gamma_\alpha \tag{2.2}$$

если α — та координата, дифференцирование по которой может увеличить порядок величины.

3. Прежде чем переходить к доказательству достаточности условия (1.5) для применимости формул первого приближения Лява-Кирхгофа (1.2) и (1.3) заметим, что существенным является возможно более точное определение лишь таких деформаций удлинения ε и изгиба $h\varkappa$, которые являются величинами одного порядка с ε_p, причем, приняв для зависимости между компонентами напряжения и деформации закон Гука, величинами порядка ε_p^2 будем пренебрегать по сравнению с ε_p. Нетрудно показать также, пользуясь, например, формулами второго приближения, приведенными в § 339 книги Лява [3], что, приняв гипотезу Кирхгофа о том, что линейные элементы оболочки, нормальные к ее срединной поверхности, не изменяют своей длины, мы тем самым пренебрегаем $h\varepsilon$ по сравнению с w (это допустимо, если оболочка не толстая и давления на внутреннюю и внешнюю поверхности разные).

Рассмотрим теперь три возможных типа деформации.

а) В случае, когда деформации удлинений играют превалирующую роль:

$$\varepsilon \sim \frac{h\varkappa}{h_0} \leqslant \varepsilon_p \tag{3.1}$$

Как известно из имеющихся решений, в этом случае при достаточно гладких граничных условиях $w_\alpha \sim w$ и согласно (2.1) имеем

$$R\gamma \sim w, \qquad h\varkappa \sim h_0 \varkappa_\alpha \sim h_0 \gamma \sim \varepsilon h_0, \qquad w \sim R\varepsilon$$

Следовательно, линейная теория в этом случае применима. Но согласно (1.4) и (3.1)

$$T_1 \approx \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad \text{если} \qquad h_0 \leqslant \sqrt{\varepsilon_p}$$

Величины $G_1, \ldots$ по (1.3) определяются неточно. Но в рассматриваемом случае потенциальная энергия изгиба имеет порядок величины $D\varkappa^2 \sim T\varepsilon^2 h_0^2$, т. е. будет мала по сравнению с потенциальной энергией удлинений при условии (1.5).

Следовательно, с принятой точностью компоненты напряжения можно определять по безмоментной теории так, что задача является статически определенной.

b) Пусть

$$\varepsilon \sim h\varkappa \sim \varepsilon_p \tag{3.2}$$

В линейных задачах такая деформация имеет место обычно вблизи заделки (краевой эффект). Из решений соответствующих задач для цилиндрической, сферической и других оболочек известно, что в этом случае, вообще говоря:

$$w \sim w_\alpha \sqrt{h_0}, \qquad h\varkappa \sim h_0\gamma_\alpha \sim \gamma\sqrt{h_0} \sim \varepsilon_p$$

Следовательно, при условии (1.5)

$$\gamma^2 \sim \frac{\varepsilon_p^2}{h_0} \geqslant \varepsilon_p h_0$$

и, пользуясь линейной теорией, членами вида εh_0 логично пренебрегать.

Пусть далее

$$\gamma^2 \sim \varepsilon \sim \varepsilon_p$$

Тогда

$$\varepsilon_p^2 \sim \varepsilon_p h_0, \quad \text{т. е.} \quad h_0 \sim \varepsilon_p$$

При $\gamma^2 \sim \varepsilon / h_0$ формулы (2.1) недостаточно точны и в выражениях ε необходимо сохранить и члены порядка γ^4. Таким образом, если

$$\varepsilon_p < h_0 < \sqrt{\varepsilon_p} \tag{3.3}$$

то удлинения следует определять по формулам (2.1); при этом

$$h_0 < w_0 < 1$$

а величины $h\varkappa$ можно определять по линейной теории.

Рассуждения, аналогичные предыдущему, показывают, что в случае (3.2), но при отсутствии резко выраженного краевого эффекта, погрешность линейной теории еще более превышает погрешность формулы (1.2). Поэтому наше утверждение о законности применения этих последних остается в силе и в этом случае.

Применяя квадратичную теорию, но пользуясь упрощенными формулами (1.2) и (1.3), мы допускаем погрешность порядка h_0 по сравнению с единицей при условии (3.3). В задачах на определение критических напряжений в ограниченных пластинах эта погрешность мала. В самом деле, при продольном сжатии цилиндрических оболочек критическое значение относительного удлинения $\varepsilon_k \sim h_0$.

Следовательно, устойчивость теряется в пределах пропорциональности лишь при соблюдении условия $h_0 \leqslant \varepsilon_p$, а тогда (1.2) вполне соответствуют принятой степени точности.

При кручении парами, распределенным по торцевым сечениям:

$$\omega_k \sim h_0^{5/4}\sqrt{\frac{r}{l}}$$

Для оболочек средней длины $\sqrt{r / l} \sim 1$

$$\omega_k \sim h_0^{5/4}$$

т. е.

$$\varepsilon_k < \varepsilon_p, \qquad \text{если} \qquad h_0 \leqslant \varepsilon_p^{4/5}$$

c) Пусть

$$\frac{\varepsilon}{h_0} \sim h\varkappa \sim \varepsilon_p \tag{3.4}$$

т. е. имеет место в основном деформация изгиба.

При этом обычно

$$w_\alpha \sim w, \qquad h\varkappa \sim h_0\gamma \sim \varepsilon_p$$

Далее имеем

$$\gamma^2 \sim \frac{\varepsilon_p^2}{h_0^2} \geqslant \varepsilon h_0$$

если линейная теория дает погрешность в величине ε, не меньшую чем (1.2). Но в даннном случае согласно (3.4)

$$\varepsilon \sim \varepsilon_p h_0.$$

Поэтому указанное условие эквивалентно неравенству

$$\frac{\varepsilon_p^2}{h_0^2} \geqslant \varepsilon_p h_0^2$$

Следовательно, уже при $h_0 \leqslant \sqrt[4]{\varepsilon_p}$ линейная теория даст погрешность в величине ε, не меньшую чем (1.2).

С другой стороны, квадратичная теория применима, если $\gamma^4 \leqslant \varepsilon_p^2$, т. е. если

$$\frac{\varepsilon_p^2}{h_0^2} \leqslant \varepsilon_p$$

Таким образом, при (3.4) удлинения следует определять по (2.1), если

$$\sqrt{\varepsilon_p} \leqslant h_0 \leqslant \sqrt[4]{\varepsilon_p}$$

При этом

$$\sqrt{\varepsilon_p} \leqslant w_0 \leqslant 1$$

Далее

$$h_0\gamma^2 \geqslant h_0 h\varkappa$$

если

$$\frac{\varepsilon_p^2}{h_0^2} \geqslant \varepsilon_p, \qquad h_0 \leqslant \sqrt{\varepsilon_p}$$

В этом случае $G_1, \ldots$ следует определять по (1.3), величины же $T_1, \ldots$ одинаково неточно определяются по формулам (1.3) и (1.4). Но роль удлинений в этой деформации мала, так что отношение потенциальной энергии деформации удлинения и потенциальной энергии деформации изгиба $\sim \varepsilon_p$, изменения же кривизны в данном случае следует определять по (2.1).

Таким образом, во всех случаях применимы формулы первого приближения (1.3) при условии (1.5).

Поступило в редакцию
22 III 1946

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии Наук СССР,
Казанский химико-технологический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. и Финкельштейн «О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек». ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5.
2. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.