Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

И. Н. Векуа

(Тбилиси)

В работе рассматриваются вопросы интегрирования системы уравнений равновесия тонкой сферической оболочки (§ 1—8). Полученные формулы выражают в явном виде усилия, моменты и смещения через четыре произвольные голоморфные функции. Отметим, что часть этих результатов нами получена раньше в работе [1], где для этой цели использованы некоторые уравнения А. Л. Гольденвейзера [2]. В настоящей работе все результаты получены непосредственно из основной системы уравнений тонкой сферической оболочки. При их помощи в качестве примера в работе решается одна граничная задача для оболочки, имеющей форму сферического сегмента (§ 9).

В работе особо рассматривается так называемая пологая сферическая оболочка (§ 10, 11), для которой отношение l/d (где l — высота, а d — диаметр основания наименьшего сферического сегмента, заключающего внутри себя данную оболочку) достаточно мало по сравнению с единицей.

В этом случае формулы § 1—8 могут быть упрощены (§ 10). Полученные результаты частично совпадают с результатами В. З. Власова [3], исследовавшего пологую оболочку иным путем, а также с более поздними результатами Е. Рейснера [4].

§ 1. Система дифференциальных уравнений тонкой сферической оболочки. Рассмотрим на поверхности сферы радиуса R какую-нибудь изотермическую сеть координатных линий; тогда линейный элемент выразится так:

$$ds^2 = R^2 A^2 (d\alpha^2 + d\beta^2) \tag{1.1}$$

Одну из изотермических сетей на поверхности сферы дает преобразование

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi \tag{1.2}$$

где θ, φ — географические координаты точки; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. В этом случае

$$A = \frac{2}{1+\alpha^2+\beta^2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{1.3}$$

Преобразование (1.2) представляет собой стереографическую проекцию поверхности единичной сферы с южного полюса $\theta = \pi$ на экваториальную плоскость $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Если рассматривать изотермические координаты α, β как прямоугольные координаты точки на плоскости, то получим конформное преобразование сферической поверхности на плоскость $z = \alpha + i\beta$. Преобразование

$$z = f(z') \qquad (z' = \alpha' + i\beta') \tag{1.4}$$

где f — произвольная голоморфная функция, изотермическую сеть (α, β)

переводит в новую изотермическую сеть (α', β'), так как относительно последней линейный элемент, очевидно, имеет вид

$$ds^2 = R^2 A'^2 (d\alpha'^2 + d\beta'^2) \qquad [A'^2 = A^2 f'(z') \overline{f'(z')}] \tag{1.5}$$

Уравнение равновесия тонкой сферической оболочки относительно изотермической сети координатных линий будет иметь вид (см., например, А. Ляв [5], стр. 562, 563)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A S}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial A}{\partial \alpha} T_2\right) + N_1 + RX = 0 \\
&\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A S}{\partial \alpha} + \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial A}{\partial \alpha} S\right) + N_2 + RY = 0 \\
&\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta}\right) - (T_1 + T_2) + RZ = 0 \\
&\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A H}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H - \frac{\partial A}{\partial \alpha} M_2\right) - RN_1 = 0 \\
&\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A H}{\partial \alpha} + \frac{\partial A M_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial A}{\partial \alpha} H\right) - RN_2 = 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $T_1, T_2, S, N_1, N_2, M_1, M_2$ и H — компоненты усилий и моментов, а X, Y, Z, — компоненты внешней силы, причем Z — радиальная, а X, Y — касательные составляющие этой силы.

К приведенной системе уравнений мы должны добавить уравнения, которые выражают компоненты усилий и моментов через компоненты вектора смещения u, v, w. Эти уравнения имеют вид (см., например, В. В. Новожилов [5])

$$\begin{aligned}
&T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \qquad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega \\
&M_1 = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \qquad M_2 = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \qquad H = D(1-\mu)\tau
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\right)$$

Здесь (1.8)

$$R\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \beta} v + w, \quad R\varepsilon_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} u + w, \quad R\omega = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right)$$

$$R\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\psi, \quad R\varkappa_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\vartheta, \quad 2R\tau = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\psi}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\vartheta}{A}\right)$$

причем (1.9)

$$R\vartheta = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + u, \qquad R\psi = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \beta} + v \tag{1.10}$$

В формулах (1.7) E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, D — цилиндрическая жесткость.

Если (1.11) подставим в (1.9) и затем полученные выражения и (1.8) внесем в (1.7), то T_1, T_2, S, M_1, M_2 и H выразятся через u, v, w. Если же теперь эти выражения подставим в последние два уравнения (1.6), то N_1 и N_2 также выразятся через u, v, w. Таким образом, все компоненты усилий и моментов мы можем выразить через u, v, w. Подставляя эти выражения в первые три уравнения (1.6), получим три дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями u, v, w, т. е. мы будем иметь систему уравнений в компонентах вектора смещения.

§ 2. Комплексное представление уравнений тонкой сферической оболочки. Введем следующие обозначения:

$$T = T_1 + T_2, \qquad P = T_1 - T_2 + 2iS, \qquad N = A(N_1 + iN_2), \qquad U = A(u + iv)$$
$$M = M_1 + M_2, \qquad Q = M_1 - M_2 + 2iH, \qquad F = A(X + iY) \tag{2.1}$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} T + \frac{1}{4} P + \frac{1}{4} \overline{P}, & S &= \frac{1}{4i} P - \frac{1}{4i} \overline{P}, & N_1 &= \frac{1}{2A}(N + \overline{N}) \\
T_2 &= \frac{1}{2} T - \frac{1}{4} P - \frac{1}{4} \overline{P}, & H &= \frac{1}{4i} Q - \frac{1}{4i} \overline{Q}, & N_2 &= \frac{1}{2Ai}(N - \overline{N}) \\
M_1 &= \frac{1}{2} M + \frac{1}{4} Q + \frac{1}{4} \overline{Q}, & X &= \frac{1}{2A}(F + \overline{F}), & Y &= \frac{1}{2iA}(F - \overline{F}) \\
M_2 &= \frac{1}{2} M - \frac{1}{4} Q - \frac{1}{4} \overline{Q}, & u &= \frac{1}{2A}(U + \overline{U}), & v &= \frac{1}{2iA}(U - \overline{U}),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Отметим, что как здесь, так и в дальнейшем всюду черта над комплексным выражением обозначает переход к сопряженному комплексному значению.

Рассмотрим теперь комплексные переменные

$$z = \alpha + i\beta, \qquad \zeta = \alpha - i\beta \tag{2.3}$$

и связанные с ним дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - i\frac{\partial}{\partial \beta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + i\frac{\partial}{\partial \beta}\right) \tag{2.4}$$

Тогда, принимая во внимание (1.8), (1.9), (1.10), (2.1), (2.2), (2.4), систему уравнений (1.6) и (1.7) можно представить в виде

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 P}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} + N + RF = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial \overline{N}}{\partial \zeta}\right) - T + RZ = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2 Q}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial \zeta} - RN = 0 \tag{2.7}$$

$$T = \frac{2Eh}{(1-\mu)R} w + \frac{Eh}{(1-\mu)R}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta}\right) \tag{2.8}$$

$$P = \frac{2Eh}{(1+\mu)R}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U}{A^2}\right) \tag{2.9}$$

$$M = -\frac{D(1+\mu)}{R^2}\nabla^2 w + \frac{D(1+\mu)}{R^2}\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta}\right) \tag{2.10}$$

$$Q = -\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{2D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{U}{A^2}\right) \tag{2.11}$$

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа поверхности единичной сферы:

$$\nabla^2 = \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right) = \frac{4}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \zeta} \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.5) — (2.11) эквивалентна системе (1.7), (1.8).

§ 3. Выражение усилий T, M, N через нормальное перемещение w. В силу уравнений (2.8), (2.10), (2,9), (2.11) легко получим формулы

$$M=-\frac{D(1+\mu)}{R^2}(\nabla^2+2)w+\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}T,\quad Q=-\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial\zeta}+\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}P$$

Подставляя эти выражения в (2.7), получим (3.1)

$$RN=\frac{D(1-\mu^2)}{EhR}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2P}{\partial z}+\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)-$$
$$-\frac{4D(1-\mu)}{R^2}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial\zeta}-\frac{D(1+\mu)}{R^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)w \tag{3.2}$$

Отсюда на основании (2.5) получим

$$N=-\frac{h^2}{12\delta R}F-\frac{D(1+\mu)}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)w-\frac{4D(1-\mu)}{\delta R^3}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial w}{\partial\zeta}$$
$$\left(\delta=1+\frac{h^2}{12R^2}\right) \tag{3.3}$$

Нетрудно теперь проверить справедливость равенства:

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial(*)}{\partial\zeta}=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)(*) \tag{3.4}$$

Для этого надо воспользоваться известной формулой Гаусса (см., например, В. Бляшке [7], стр. 130), из которой для нашего случая получаем

$$\nabla^2\lg A=-1 \tag{3.5}$$

Если воспользуемся теперь формулой (3.4), то из (3.3) получим

$$N=-\frac{2D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)w-\frac{h^2}{12\delta R}F \tag{3.6}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.6), получим

$$T=-\frac{D}{\delta R^3}\nabla^2(\nabla^2+2)w+RZ-\frac{h^2}{12\delta R}\Phi\qquad\left(\Phi=\frac{1}{A^2}\left[\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\overline{F}}{\partial\zeta}\right]\right) \tag{3.7}$$

Если теперь (3.7) подставим в первую формулу (3.1), то получим

$$M=-\frac{Dh^2}{12\delta R^4}(\nabla^2+2)\left(\nabla^2+\frac{12\delta(1+\mu)R^2}{h^2}\right)w+\frac{h^2}{12}Z-\frac{h^4}{144\delta R^2}\Phi \tag{3.8}$$

§ 4. Дифференциальное уравнение для нормального перемещения w. На основании (3.5) нетрудно доказать справедливость следующих тождеств

$$\frac{1}{4}(\nabla^2+2)\frac{1}{A^2}\frac{\partial(*)}{\partial z}=\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{(*)}{A^2} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{4}(\nabla^2+2)\frac{1}{A^2}\frac{\partial(*)}{\partial\zeta}=\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}A^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{(*)}{A^2} \tag{4.2}$$

На основании этих формул из (2.8) и (2.9) получим

$$(\nabla^2+2)\left(\frac{1-\mu}{Eh}T-\frac{2}{R}w\right)=\frac{2(1+\mu)}{Eh}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2P}{\partial z}+\frac{2(1+\mu)}{Eh}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial A^2P}{\partial\zeta}$$

Отсюда на основании уравнений (2.5) и (2.6) получим

$$(\nabla^2+2)\left(\frac{T}{Eh}-\frac{w}{R}\right)=\frac{(1+\mu)R}{Eh}Z-\frac{(1+\mu)R}{Eh}\Phi$$

Подставляя сюда выражение (3.7), получим

$$(\nabla^2+2)\left(\nabla^2\nabla^2+2\nabla^2+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w=Z' \tag{4.3}$$

где

$$Z'=\frac{R^4}{D}\left\{\delta\nabla^2 Z+(1-\mu)\delta Z-\frac{h^2}{12R^2}\nabla^2\Phi+[(1+\mu)+(1-\delta)(1-\mu)]\Phi\right\} \tag{4.4}$$

Таким образом, w удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.3) шестого порядка; назовем его *основным дифференциальным уравнением изгиба тонкой сферической оболочки.*

§ 5. Выражения для величин U, P, Q. Предположим, что касательная составляющая внешней силы имеет потенциал, т. е.

$$F=A(X+iY)=2\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+i\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \tag{5.1}$$

где Ω — действительная функция точки (α, β). Тогда согласно (3.7) имеем

$$\Phi=\nabla^2\Omega \tag{5.2}$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.8), которое представим в виде

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\zeta}\right)=\frac{(1-\mu)R}{Eh}T-2w \tag{5.3}$$

Из уравнения (4.3) имеем

$$w=-\frac{D}{2\delta EhR^2}\nabla^2\left(\nabla^2\nabla^2+4\nabla^2+4+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w+\frac{D}{2\delta EhR^2}Z' \tag{5.4}$$

Подставляя теперь в (5.3) выражения (5.4), (3.7) и принимая во внимание (4.4), (5.2), получим

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\zeta}\right)=\nabla^2\left\{\frac{D}{\delta EhR^2}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\right.$$
$$\left.-\frac{R^2}{Eh}Z+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\}$$

Отсюда мы имеем, что

$$U=U_0+U^* \tag{5.5}$$

где

$$U^*=2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{D}{\delta EhR^2}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\frac{R^2}{Eh}Z+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\} \tag{5.6}$$

а U_0 является решением уравнения

$$\frac{\partial U_0}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}_0}{\partial\zeta}=0 \tag{5.7}$$

Отсюда имеем, что

$$U_0=2i\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} \tag{5.8}$$

где ω — действительная функция точки поверхности сферы, которая, очевидно, определяется с точностью до постоянной слагаемой.

Найдем теперь ω; для этой цели воспользуемся уравнениями (2.5) и (2.9). Подставим (5.5) в (2.9) и полученное выражение внесем в (2.5); если в (2.5) подставим также (3.6) и (3.7), то, принимая во внимание (5.8), получим

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial z}A^2\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=0$$

На основании (3.4) последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}(\nabla^2+2)\,\omega=0$$

Так как ω — действительная функция, то отсюда будем иметь

$$(\nabla^2+2)\,\omega=C,\qquad C=\mathrm{const}$$

Но мы можем положить $C=0$, ибо ω определена лишь с точностью до постоянной слагаемой. Поэтому имеем

$$\nabla^2\omega+2\omega=0 \tag{5.9}$$

Этим условием ω определяется однозначно через u и v.

На основании (5.6) и (5.8) из (5.5) получим

$$U=2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{i\omega+\frac{D}{\delta EhR^2}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\frac{R^2}{Eh}Z+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{12\delta E}\nabla^2\Omega-\frac{(1+\mu)R^2}{\delta Eh}\Omega\right\} \tag{5.10}$$

Подставляя теперь (5.10) в (2.9) и (2.11), получим

$$P=\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{4iEh}{(1+\mu)R}\omega+\frac{4D}{(1+\mu)\delta R^3}\left[(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)+\frac{\delta EhR^2}{D}\right]w-\right.$$
$$\left.-\frac{4R}{1+\mu}Z+\frac{h^2}{3(1+\mu)\delta R}\nabla^2\Omega-\frac{4R}{\delta}\Omega\right\}, \tag{5.11}$$

$$Q=\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{iEh^3}{3(1+\mu)R}\omega+\frac{Dh^2}{3(1+\mu)\delta R^4}(\nabla^2+2)(\nabla^2+1+\mu)w-\right.$$
$$\left.-\frac{h^2}{3(1+\mu)}Z+\frac{h^4}{36(1+\mu)\delta R^2}\nabla^2\Omega-\frac{h^2}{3\delta}\Omega\right\} \tag{5.12}$$

Таким образом, искомые функции T, M, N, P, Q, U выражены через две функции w и ω, причем последние являются произвольными решениями уравнений (4.3) и (5.9) соответственно.

Нетрудно проверить, что выражения (3.6), (3.7), (3.8), (5.10), (5.11) и (5.12) действительно удовлетворяют системе уравнений (2.5) — (2.11); очевидно, указанные формулы дают нам общий интеграл этой системы.

§ 6. Другие выражения для усилий, моментов и компонентов смещения. Решение уравнения (4.3) имеет вид

$$w=w_0+w^* \tag{6.1}$$

где w_0 — частное решение его, а w^* — общее решение уравнения

$$(\nabla^2+2)\left(\nabla^2\nabla^2+2\nabla^2+\frac{\delta EhR^2}{D}\right)w^*=0 \tag{6.2}$$

Но решение последнего уравнения можно представить в виде

$$w^*=\chi+\psi^* \tag{6.3}$$

где χ и ψ^* — произвольные решения следующих уравнений:

$$\nabla^2\chi+2\chi=0 \tag{6.4}$$

$$\nabla^2\nabla^2\psi^*+2\nabla^2\psi^*+\frac{\delta EhR^2}{D}\psi^*=0 \tag{6.5}$$

причем нетрудно видеть, что χ и ψ^* однозначно определяются через w^*,

$$\chi = \frac{D}{\delta E h R^2}\left(\nabla^2\nabla^2 + 2\nabla^2 + \frac{\delta E h R^2}{D}\right) w^*, \qquad \psi^* = -\frac{D}{\delta E h R^2}(\nabla^2 + 2)\nabla^2 w \tag{6.6}$$

Уравнение (6.5) можно представить в виде

$$(\nabla^2 + 1 - i\nu)(\nabla^2 + 1 + i\nu)\psi^* = 0 \qquad \left(\nu = \frac{R}{h}\sqrt{12(1-\delta\mu^2)}\right) \tag{6.7}$$

Поэтому общее решение уравнения (6.5) имеет вид

$$\psi^* = \psi + \overline{\psi} \tag{6.8}$$

где ψ — произвольное решение уравнения[1]

$$\nabla^2\psi + (1 - i\nu)\psi = 0 \tag{6.9}$$

Так как $1 - i\nu$ есть комплексное число, то ψ будет комплексной функцией, а $\psi^* = 2\,\mathrm{Re}\,\psi$. Легко видеть, что ψ однозначно определяется через ψ^*:

$$\psi = \frac{1}{2i\nu}(\nabla^2 + 1 + i\nu)\psi^* \tag{6.10}$$

В силу (6.8), (6.3), (6.1) имеем

$$w = w_0 + \chi + \psi + \overline{\psi} \tag{6.11}$$

где w_0 — частное решение уравнения (4.3), а χ и ψ — произвольные решения уравнений (6.4) и (6.9), соответственно, причем, как показывают формулы (6.6) и (6.10), функции χ и ψ однозначно определяются через $w - w_0$. Это значит, что всякому заданному напряженному состоянию равновесия оболочки и заданному частному решению w_0 уравнения (4.3) соответствуют вполне определенные χ и ψ.

Подставим (6.11) в (3.6), (3.7), (3.8), (5.10), (5.11) и (5.12). Тогда в силу уравнений (6.4), (6.5) и (6.10) получим формулы

$$T = T_0 + \frac{Eh}{R}(\psi + \overline{\psi}), \qquad M = M_0 - \frac{D(1+\mu)}{R^2}\left[(\mu + i\nu)\psi + (\mu - i\nu)\overline{\psi}\right]$$

$$N = N_0 - \frac{2D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1 + i\nu)\psi + (1 - i\nu)\overline{\psi}\right]$$

$$P = P_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{4Eh}{R}\left(\frac{\psi}{1 - i\nu} + \frac{\overline{\psi}}{1 + i\nu}\right)\right] \tag{6.12}$$

$$Q = Q_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{4iD(1-\mu)}{R^2}\omega + \frac{4D(1-\mu)}{R^2}\left(\frac{\mu + i\nu}{1 + i\nu}\psi + \frac{\mu - i\nu}{1 + i\nu}\overline{\psi}\right)\right]$$

$$U = U_0 + 2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi + i\omega + (1+\mu)\left(\frac{\psi}{1 - i\nu} + \frac{\overline{\psi}}{1 + i\nu}\right)\right]$$

$$w = w_0 + \chi + \psi + \overline{\psi} \tag{6.13}$$

где T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 — значения T, M, N, P, Q, U, которые получаются из формул (3.7), (3.8), (3.6), (5.11), (5.12) и (5.10) соответственно, если туда подставим $\omega = 0$, $w = w_0$. Таким образом, T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 — известные функции, которые, очевидно зависят от компонентов внешней силы, причем, когда последние равны нулю, мы будем считать, что T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0, w_0 также равны нулю.

---

[1] Это уравнение несколько иным путем было получено А. Л. Гольденвейзером[3].

Формулы (6.12) и (6.13), где χ — произвольное решение уравнения (6.4), а ψ — произвольное решение урванения (6.9), дают нам общий интеграл системы уравнений тонкой сферической оболочки.

Как было уже выяснено выше, функции χ, ω, ψ однозначно определяются через заданное напряженное состояние равновесия оболочки и через заданное частное решение w_0 уравнения (4.3). Уравнения (6.4) и (6.9) будем называть *основными уравнениями сферической оболочки*.

Учитывая теперь, что отношение h/R очень мало по сравнению с единицей, мы можем внести некоторые упрощения в уравнения и формулы, полученные выше.

Формулы (6.12) и (6.13) мы можем записать еще так:

$$T = T_0 + \frac{Eh}{R}\psi_1, \quad M = M_0 - \frac{D\mu(1+\mu)}{R^2}\psi_1 - \frac{D\nu(1+\mu)}{R^2}\psi_2, \quad N = N_0 - \frac{2D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\psi_1 + \nu\psi_2)$$

$$P = P_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{4Eh}{(1+\nu^2)R}\psi_1 + \frac{4Eh\nu}{(1+\nu^2)R}\psi_2\right] \tag{6.14}$$

$$Q = Q_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{4iD(1-\mu)}{R^2}\omega + \frac{4D(1-\mu)(\mu-\nu^2)}{(1+\nu^2)R^2}\psi_1 + \frac{8D(1-\mu^2)\nu}{(1+\nu^2)R^2}\psi_2\right]$$

$$U = U_0 + 2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi + i\omega + \frac{1+\mu}{1+\nu^2}\psi_1 + \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu^2}\psi_2\right]$$

$$w = w_0 + \chi + \psi_1 \qquad \left(\psi_1 = \psi + \bar\psi, \quad \psi_2 = i(\psi - \bar\psi)\right) \tag{6.15}$$

Принимая во внимание малость отношения h/R, мы можем положить

$$\delta = 1 + \frac{h^2}{12R^2} = 1, \qquad \nu = \frac{\rho R}{h}, \qquad 1 + \nu^2 = \frac{\rho^2 R^2}{h^2} \tag{6.16}$$

где $\rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}$. Тогда формулы (6.14) и (6.15) примут вид

$$T = T_0 + \frac{Eh}{R}\psi_1, \qquad M = M_0 - \frac{E\mu h^3}{12(1-\mu)R^2}\psi_1 - \frac{(1+\mu)Eh^2}{\rho R}\psi_2$$

$$N = N_0 - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{2Eh^3}{\rho^2 R^3}\psi_1 + \frac{2Eh^2}{\rho R^2}\psi_2\right]$$

$$P = P_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{4Eh}{(1+\mu)R}(\chi + i\omega) + \frac{4Eh^3}{\rho^2 R^3}\psi_1 + \frac{4Eh^2}{\rho R^2}\psi_2\right] \tag{6.17}$$

$$Q = Q_0 + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{iEh^3}{3(1+\mu)R^2}\omega - \frac{Eh^3}{3(1+\mu)R^2}\psi_1 + \frac{2Eh^4}{3\rho R^3}\psi_2\right]$$

$$U = U_0 + 2\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\chi + i\omega + \frac{(1+\mu)h^2}{\rho^2 R^2}\psi_1 + \frac{(1+\mu)h}{\rho R}\psi_2\right]$$

$$w = w_0 + \chi + \psi_1 \tag{6.18}$$

Если мы теперь учтем, что

$$1 - i\nu \approx -\frac{i\rho R}{h}, \qquad \rho = \sqrt{12(1-\mu^2)} \tag{6.19}$$

то для ψ вместо уравнения (6.9) можно взять уравнение

$$\nabla^2\psi - \frac{i\rho R}{h}\psi = 0 \tag{6.20}$$

Поэтому в силу (6.8), (6.3) и (6.1) вместо уравнения (4.3) для w можно взять уравнение

$$(\nabla^2 + 2)\left(\nabla^2\nabla^2 + \frac{12(1-\mu^2)R^2}{h^2}\right)w = Z' \tag{6.21}$$

где в силу (6.16)

$$Z' = \frac{R^4}{D}\left[\nabla^2 Z + (1-\mu)Z - \frac{h^2}{12R^2}\nabla^2\Phi + (1-\mu)\Phi\right] \tag{6.22}$$

В качестве w_0 можно брать любое частное решение уравнения (6.22) и соответственно с этим вычислять T_0, M_0, N_0, P_0, Q_0, U_0 из формул (3.7), (3.8), (3.6), (5.11), (5.12) и (5.10), где надо принять $\omega = 0$, $w = w_0$.

§ 7. Общее представление функций χ, ω, ψ через аналитические функции комплексной переменной. Предположим теперь, что

$$\alpha = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\varphi \tag{7.1}$$

Тогда на основании (1.3) и (2.12) найдем

$$\nabla^2 = \frac{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) = (1+z\zeta)^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\zeta} \tag{7.2}$$

где $z = \alpha + i\beta$, $\zeta = \alpha - i\beta$. В силу (7.2) основные уравнения (6.4) и (6.9) соответственно будут

$$(1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\zeta} + 2V = 0, \qquad (1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\zeta} + (1-i\nu)V = 0 \tag{7.3}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$(1+z\zeta)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\zeta} + n(n+1)V = 0 \tag{7.4}$$

где n — некоторая комплексная постоянная; при $n = 1$ мы получим первое уравнение (7.3), а при $n = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5-4i\nu}\right)$ — второе.

В работах[2,7,8] нами даны формулы, выражающие все решения уравнения (7.4) через аналитические функции одной комплексной переменной. Приведем эти формулы без доказательства.

Пусть G_0 — область на поверхности сферы радиуса R, занимаемая серединной поверхностью оболочки. Пусть G — соответствующая ей область на плоскосси $z = \alpha + i\beta$; очевидно, G есть стереографическая проекция области G_0 с южного полюса $\theta = \pi$ на экваториальную плоскость $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Мы можем без ущерба для общности считать, когда это окажется целесообразным, что начало координат $z = 0$ принадлежит области G; это равносильно предположению, что на сфере северный полюс принадлежит G_0.

Допустим, что G — односвязная область. Будем предполагать, что начало координат принадлежит G. Тогда имеет место следующее предложение:

Все регулярные в G решения уравнения (7.4) даются формулой (7.5)

$$V(z,\zeta) = a_0 P_n\left(\frac{1-z\zeta}{1+z\zeta}\right) + \int_0^z \Phi(t)\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right)dt + \int_0^\zeta \Phi^*(\tau)\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right)d\tau$$

где P_n — функция Лежандра первого рода с индексом n, a_0 — произвольная постоянная, $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции своих аргументов в G и $\overline{G}$ соответственно; $\overline{G}$ обозначает зеркальное отображение области G относительно действительной оси; a_0, Φ и Φ^* однозначно определяются через V, а именно,

$$a_0 = V(0,0), \qquad \Phi(z) = \frac{\partial V(z,0)}{\partial z}, \qquad \Phi^*(\zeta) = \frac{\partial V(0,\zeta)}{\partial\zeta} \tag{7.6}$$

Если примем во внимание, что

$$z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}, \qquad \zeta = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \tag{7.7}$$

то формулу (7.5) можно еще представить в виде

$$V=a_0P_n(\cos\theta)+\int\limits_0^1[z\Phi(zt)+\zeta\Phi^*(\zeta t)]\,P_n[\cos\theta+(1-\cos\theta)\,t]\,dt \tag{7.8}$$

Заметим теперь, что если n — действительное число, то все действительные решения уравнения (7.4) мы получим из формулы (7.8) тогда и только тогда, когда a_0 — действительная постоянная, а $\Phi(z)$ и $\Phi^*(\zeta)$ — взаимно сопряженные функции. Рассмотрим теперь следующие функции:

$$\Phi_0(z)=\frac{a_0}{2}+\int\limits_0^z\Phi(t)\,dt,\qquad \Phi_0^*(\zeta)=\frac{a_0}{2}+\int\limits_0^\zeta\Phi^*(\tau)\,d\tau \tag{7.9}$$

Тогда при помощи интегрирования по частям формуле (7.5) можно придать следующий вид:

$$V(z,\zeta)=\Phi_0(z)-\int\limits_0^z\Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial t}\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2\zeta t}{1+z\zeta}\right)dt+$$

$$+\Phi_0^*(\zeta)-\int\limits_0^\zeta\Phi_0^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\,P_n\left(\frac{1-z\zeta+2z\tau}{1+z\zeta}\right)d\tau \tag{7.10}$$

Функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0{}^*(\zeta)$, очевидно, голоморфны в G и $\overline{G}$ соответственно и удовлетворяют условию

$$\Phi_0(0)=\Phi_0^*(0) \tag{7.11}$$

При этом условия Φ_0 и Φ_0^* однозначно определяются через V; а именно,

$$\Phi_0(z)=V(z,0)-\tfrac{1}{2}V(0,0),\qquad \Phi_0^*(\zeta)=V(0,\zeta)-\tfrac{1}{2}V(0,0) \tag{7.12}$$

В силу (7.7), формулу (7.10) можно представить еще в виде (7.13)

$$V=\Phi_0(z)+\Phi_0^*(\zeta)-(1-\cos\theta)\int\limits_0^1[\Phi_0(zt)+\Phi_0^*(\zeta t)]\,P_n'\,[\cos\theta+(1-\cos\theta)\,t]\,dt$$

Подставим в (7.8) поочередно тройки выражений

$$\begin{array}{lll} a_0=1, & \Phi(z)=0, & \Phi^*(\zeta)=0\\ a_0=0, & \Phi(z)=z^{k-1}, & \Phi^*(\zeta)=0\\ a_0=0, & \Phi(z)=0, & \Phi^*(\zeta)=\zeta^{k-1}\end{array} \tag{7.14}$$

Тогда получим следующие частные решения уравнения (7.4):

$$P_n(\cos\theta),\qquad \Theta_{nk}(\cos\theta)\,e^{ik\varphi},\qquad \Theta_{nk}(\cos\theta)\,e^{-ik\varphi}\qquad (k=1,2,\ldots) \tag{7.15}$$

где

$$\Theta_{nk}(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}k}\int\limits_0^1 t^{k-1}P_n[x+(1-x)\,t]\,dt \tag{7.16}$$

Нетрудно доказать, что Θ_{nk} отличаются от присоединенных функций Лежандра P_{nk} только постоянным множителем, а именно,

$$P_{nk}(x)=\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-k+1)}\,\Theta_{nk}(x) \tag{7.17}$$

Поэтому формулу (7.16) можно использовать для определения присоединенных функций Лежандра при любых значениях индексов n, k.

Функции (7.15) являются частными решениями уравнения (7.4), регулярными всюду на сфере, за исключением точки $\theta=\pi$; в этой точке все функции $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ обращаются в бесконечность, за исключением того случая, когда n — целое число; в этом случае $P_n(\cos\theta)$ и $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ — целые функции от θ, так как P_n — полином, а

$$\Theta_{nk}(\cos\theta)=\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{(n+k)!}\sin^k\theta P_n^{(k)}(\cos\theta) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Что же касается функций $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ при $k>n$, то они обращаются в бесконечность при $\theta=\pi$; это легко вытекает из (7.16).

Подставляя теперь в (7.8) ряды Тейлора

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}, \qquad \Phi^*(\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{k-1}$$

в силу (7.16) получим

$$V=a_0P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k e^{ik\varphi}+b_k e^{-ik\varphi})\,\Theta_{nk}(\cos\theta) \tag{7.18}$$

причем согласно (7.6)

$$a_0=(V)_0, \quad a_k=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\partial^k V}{\partial z^k}\right)_0, \quad b_k=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\partial^k V}{\partial \zeta^k}\right)_0 \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{7.19}$$

где $(\;)_0$ обозначает значение в начале координат $(z=0)$ выражения, помещенного внутри скобки. Принимая теперь обозначения

$$\Theta_{n0}(x)=P_n(x), \qquad \Theta_{n,-k}(x)=\Theta_{nk}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{7.20}$$

ряд (7.18) мы можем записать еще так:

$$V=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\Theta_{nk}(\cos\theta)\,e^{ik\varphi} \tag{7.21}$$

где $c_0=a_0$, $c_k=a_k$, $c_{-k}=b_k$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Таким образом, всякое решение V уравнения (7.4), регулярное внутри круга $(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta)<R_0$, можно разложить в ряд вида (7.21); этот ряд сходится абсолютно и равномерно внутри сферического сегмента $|\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta|\leqslant R_0$.

Вернемся теперь к функциям χ, ω, ψ и выразим их через аналитические функции одной комплексной переменной.

Так как χ и ω являются произвольными действительными решениями первого из уравнений (7.3), а ψ — произвольным (комплексным) решением второго из уравнений (7.3), то согласно общей формуле (7.8) получим

$$\chi=a_0P_1(\cos\theta)+\int_0^1\left[z\Phi_1(zt)+\zeta\overline{\Phi_1(zt)}\right]P_1\left[\cos\theta+(1-\cos\theta)\,t\right]dt \tag{7.22}$$

$$\omega=b_0P_1(\cos\theta)+\int_0^1\left[z\Phi_2(zt)+\zeta\overline{\Phi_2(zt)}\right]P_1\left[\cos\theta+(1-\cos\theta)\,t\right]dt \tag{7.23}$$

$$\psi=c_0P_n(\cos\theta)+\int_0^1\left[z\Phi_3(zt)+\zeta\overline{\Phi_4(zt)}\right]P_n\left[\cos\theta+(1-\cos\theta)\,t\right]dt \tag{7.24}$$

где $n = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5 - 4i\nu}$; величины $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$, $\Phi_4(z)$ — произвольные голоморфные функции в G; далее a_0, b_0 — произвольные действительные постоянные, а c_0 — произвольная комплексная постоянная. Напомним, что здесь $\zeta = \bar{z} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta e^{-i\varphi}$.

Если мы воспользуемся формулой (7.13) и примем во внимание, что $P_1(x) = x$, то для представления χ и ω получим также следующие формулы:

$$\chi = [\Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)}]\cos\theta + z\Psi_1'(z) + \bar{z}\,\overline{\Psi_1'(z)} \tag{7.25}$$

$$\omega = [\Psi_2(z) + \overline{\Psi_2(z)}]\cos\theta + z\Psi_2'(z) + \bar{z}\,\overline{\Psi_2'(z)} \tag{7.26}$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ — произвольные голоморфные функции в G, которые можно подчинить условиям

$$\Psi_1(0) = \overline{\Psi_1(0)}, \qquad \Psi_2(0) = \overline{\Psi_2(0)} \tag{7.27}$$

§ 8. Выражение компонентов смещения через аналитические функции одной комплексной переменной. Подставляя выражения (7.22), (7.23), (7.24) в (6.12) и (6.13), мы получим формулы, выражающие T, M, N, P, Q, U, w через четыре произвольные аналитические функции Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Приведем только формулы для компонентов смещения [1]. Из (7.6) легко получим.

$$(1 + z\zeta)\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \Phi^*(0) P_n(x_0) - a_0 \sin\theta\, P_n'(x_0) e^{i\varphi} + \Phi(0) P_n(x_0) e^{2i\varphi} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[(1 + z\zeta t)\Phi^*(\zeta t) + e^{2i\varphi}(1-t)\Phi(zt)] P_n(x_t)\,dt \tag{8.1}$$

$$(1 + z\zeta)\frac{\partial \bar{V}}{\partial \zeta} = \bar{\Phi}(0) P_{\bar{n}}(x_0) - \bar{a}_0 \sin\theta P_{\bar{n}}'(x_0) e^{i\varphi} + \overline{\Phi^*(0)} P_{\bar{n}}(x_0) e^{2i\varphi} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[(1 + z\zeta t)\overline{\Phi(zt)} + e^{2i\varphi}(1-t)\overline{\Phi^*(\zeta t)}] P_{\bar{n}}(x_t)\,dt \tag{8.2}$$

где $x_t = \cos\theta + (1 - \cos\theta)t$, $x_0 = \cos\theta$. Согласно формуле (7.17) имеем

$$\sin\theta P_n'(\cos\theta) = P_{n1}(\cos\theta) = n(n+1)\Theta_{n1}(\cos\theta) \tag{8.3}$$

Вспомним теперь, что согласно (2.1)

$$U = \frac{2(u + iv)}{1 + z\zeta} \tag{8.4}$$

В силу этого из формулы (6.18) получим

$$u + iv = u_0 + iv_0 + (1 + z\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\chi + i\omega + \frac{1+\mu}{1-i\nu}\psi + \frac{1+\mu}{1+i\nu}\bar{\psi}\right) \tag{8.5}$$

$$\left(u_0 + iv_0 = \frac{(1+z\zeta)U_0}{2}\right)$$

причем U_0 определяется из (5.10), где надо положить $\omega = 0$, $w = w_0$. На основании (6.13), (7.22), (7.23), (7.24), (8.1), (8.2), (8.3) и (8.5) легко получим

$$w = w_0 + a_0 P_1(x_0) + \int_0^1 [z\Phi_1(zt) + \zeta\overline{\Phi_1(\zeta t)}] P_1(x_t)\,dt + c_0 P_n(x_0) + \tag{8.6}$$

$$+ \int_0^1 [z\Phi_3(zt) + \zeta\overline{\Phi_4(zt)}] P_n(x_t)\,dt + \bar{c}_0 P_{\bar{n}}(x_0) + \int_0^1 [\zeta\overline{\Phi_3(zt)} + z\Phi_4(zt)] P_{\bar{n}}(x_t)\,dt$$

$$u + iv = u_0 + iv_0 + [\overline{\Phi_1(0)} + i\overline{\Phi_2(0)}]\, P_1(x_0) + \frac{1+\mu}{1-i\nu}\overline{\Phi_4(0)}\, P_n(x_0) +$$

$$+ \frac{1+\mu}{1+i\nu}\overline{\Phi_3(0)}\, P_{\bar n}(x_0) - [2(a_0 + ib_0)\,\Theta_{11}(x_0) +$$

$$+ c_0(1+\mu)\,\Theta_{n1}(x_0) + \bar c_0 (1+\mu)\,\Theta_{\bar n 1}(x_0)]\, e^{i\varphi} +$$

$$+ \left\{[\Phi_1(0) + i\Phi_2(0)]\, P_1(x_0) + \frac{1+\mu}{1-i\nu}\Phi_3(0)\, P_n(x_0) + \frac{1+\mu}{1+i\nu}\Phi_4(0)\, P_{\bar n}(x_0)\right\} e^{2i\varphi} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{(1 + z\zeta t)\,[\overline{\Phi_1(zt)} + i\overline{\Phi_2(zt)}] + e^{2i\varphi}(1-t)\,[\Phi_1(zt) + i\Phi_2(zt)]\right\} P_1(x_t)\, dt +$$

$$+ \frac{1+\mu}{1+i\nu}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\,[(1 + z\zeta t)\,\overline{\Phi_4(zt)} + e^{2i\varphi}(1-t)\,\Phi_3(zt)]\, P_n(x_t)\, dt +$$

$$+ \frac{1+\mu}{1+i\nu}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\,[(1 + z\zeta t)\,\overline{\Phi_3(zt)} + e^{2i\varphi}(1-t)\,\Phi_4(zt)]\, P_{\bar n}(x_t)\, dt \qquad (8.7)$$

где

$$x_t = \cos\theta + (1 - \cos\theta)\, t, \qquad x_0 = \cos\theta, \qquad n = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5 - 4i\nu})$$

Очевидно, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, $\Theta_{11}(\cos\theta) = \sin\theta$.

Формулы (8.6) и (8.7) дают общее выражение компонентов смещения через произвольные голоморфные функции Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. При помощи интегрирования по частям этим формулам можно придать различный вид[1].

§ 9. Решение граничной задачи в случае оболочки с закрепленным краем, имеющей форму сферического сегмента. Пусть срединная поверхность оболочки представляет собой сферический сегмент $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, где $\theta_0 < \pi$. Предполагая компоненты внешней силы, приложенной к оболочке, в достаточной степени регулярными функциями внутри сегмента $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, можно функции χ, ω, ψ разложить внутри этого сегмента в ряды вида (7.21), а именно, (9.1)

$$\chi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Theta_{1k}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}, \qquad \omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \Theta_{1k}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}, \qquad \psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Theta_{nk}(\cos\theta)\, e^{ik\varphi}$$

причем, так как χ и ω—действительные функции, то должны иметь

$$a_k = \bar a_{-k}, \qquad b_k = \bar b_{-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \qquad (9.2)$$

Подставляя выражения (9.1) во вторую формулу (6.12) и в (8.5) и принимая во внимание формулы

$$(1 + z\zeta)\frac{\partial \cos\theta}{\partial\zeta} = -\sin\theta\, e^{i\varphi}, \qquad (1 + z\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{ie^{i\varphi}}{\sin\theta} \qquad (9.3)$$

получим

$$w - w_0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k\Theta_{1k}(\cos\theta) + c_k\Theta_{nk}(\cos\theta) + c_{-k}\Theta_{\bar n k}(\cos\theta)]\, e^{ik\varphi} \qquad (9.4)$$

$$u + iv - (u_0 + iv_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_k + ib_k)\, H_{1k} + a c_k H_{nk} + \bar a\, \bar c_{-k} H_{\bar n k}]\, e^{i(k+1)\varphi} \qquad (9.5)$$

где приняты следующие обозначения:

$$H_{nk} = H_{nk}(\cos\theta) = -\sin\theta\, \Theta_{nk}'(\cos\theta) - \frac{k}{\sin\theta}\Theta_{nk}(\cos\theta), \qquad a = \frac{\mu+1}{1-i\nu} \qquad (9.6)$$

Разложения (9.4) и (9.5) можно получить также из формул (8.6) и (8.7), подставляя туда вместо функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 ряды Тейлора.

Используем формулы (9.4) и (9.5) для решения граничной задачи. *Найти деформированное состояние оболочки с закрепленным краем, срединная поверхность которой совпадает со сферическим сегментом* $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $\theta_0 < \pi$.

Эта задача сводится к граничной задаче: *Требуется определить компоненты вектора смещения точек оболочки при соблюдении условий*

$$u = v = w = \frac{dw}{d\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0 \tag{9.7}$$

Подставляя в эти граничные условия выражения (9.4) и (9.5), получим

$$\begin{gathered}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} [(a_k + ib_k) H_{1k} + ac_k H_{nk} + \bar{a}\,\bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k}]\, e^{i(k+1)\varphi} = -(u_0 + iv)_{\theta=\theta_0} \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \Theta_{1k} + c_k \Theta_{nk} + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k}]\, e^{ik\varphi} = -(w_0)_{\theta=\theta_0} \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k \Theta_{1k}' + c_k \Theta_{nk}' + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k}']\, e^{ik\varphi} = \frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{dw_0}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}
\end{gathered} \tag{9.8}$$

Здесь и в дальнейшем с целью сокращения письма вместо $\Theta_{nk}(\cos\theta_0)$, $H_{nk}(\cos\theta_0)$ мы пишем просто Θ_{nk} и H_{nk}.

Разложим правые части равенств (9.8), которые являются известными функциями, в ряды Фурье; эти ряды мы можем записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
-(u_0 + iv_0)_{\theta=\theta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i(k+1)\varphi} \qquad -(w_0)_{\theta=\theta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\varphi} \\
\frac{1}{\sin\theta_0}\left(\frac{dw}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k' e^{ik\varphi}
\end{gathered} \tag{9.9}$$

причем, очевидно, $B_k = \bar{B}_{-k}$, $B_k' = \bar{B}_{-k}'$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Тогда из (9.8) получим для определения a_k, b_k, c_k уравнения

$$\begin{gathered}
(a_k + ib_k) H_{1k} + ac_k H_{nk} + \bar{a}\,\bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k} = A_k \\
a_k \Theta_{1k} + c_k \Theta_{nk} + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k} = B_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\
a_k \Theta_{1k}' + c_k \Theta_{nk}' + \bar{c}_{-k} \Theta_{\bar{n}k}' = B_k'
\end{gathered} \tag{9.10}$$

В силу (9.6) и (7.20) эти уравнения при $k = 0$ принимают вид

$$\begin{gathered}
a_0 + ib_0 + ac_0 P_n' + \bar{a}\,\bar{c}_0 P_{\bar{n}}' = -\frac{A_0}{\sin\theta_0} \\
a_0 \cos\theta_0 + c_0 P_n + \bar{c}_0 P_{\bar{n}} = B_0, \qquad a_0 + c_0 P_n' + \bar{c}_0 P_{\bar{n}}' = B_0'
\end{gathered} \tag{9.11}$$

Отсюда, как нетрудно видеть, однозначно определяются a_0, b_0, c_0.

Из системы (9.10) при $k \neq 0$ получим следующую систему уравнений:

$$(a_k + ib_k) H_{1k} + ac_k H_{nk} + \bar{a}\,\bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k} = A_k, \qquad a_k H_{1k} + c_k H_{nk} + \bar{c}_{-k} H_{\bar{n}k} = C_k \tag{9.12}$$

где

$$C_k = -\sin\theta_0 B_k' - \frac{k}{\sin\theta_0} B_k \tag{9.13}$$

Из (9.12) имеем (9.14)

$$c_k = \frac{A_k - aC_k}{(a-\bar{a})H_{nk}} - \frac{[(1-a)a_k + ib_k]H_{1k}}{(a-\bar{a})H_{nk}}, \qquad \bar{c}_{-k} = \frac{A_k - aC_k}{(\bar{a}-a)H_{\bar{n}k}} - \frac{[(1-a)a_k + ib_k]H_{1k}}{(a-a)H_{\bar{n}k}}$$

Заменяя в последнем уравнении k через $-k$ и переходя к сопряженному равенству, в силу (9.2) получим

$$c_k = \frac{A_{-k} - \bar{a}\bar{C}_{-k}}{(a-\bar{a})H_{n,-k}} - \frac{[(1-\bar{a})a_k - ib_k]H_{1,-k}}{(a-\bar{a})H_{n,-k}} \tag{9.15}$$

Приравнивая правые части выражений (9.14) и (9.15) получим

$$h_k a_k + g_k b_k = F_k \tag{9.16}$$

где

$$h_k = (1-\bar{a})H_{1k}H_{n,-k} - (1-a)H_{1,-k}H_{nk}, \qquad g_k = iH_{1k}H_{n,-k} + iH_{1,-k}H_{nk}$$

$$F_k = (A_k - \bar{a}C_k)H_{n,-k} - (\bar{A}_{-k} - \bar{a}\bar{C}_{-k})H_{nk} \tag{9.17}$$

Из (9.16) в силу (9.2) получим

$$\bar{h}_{-k}a_k + \bar{g}_{-k}b_k = \bar{F}_{-k} \tag{9.18}$$

Из (9.16) и (9.18) получим

$$a_k = \frac{F_k\bar{g}_{-k} - \bar{F}_{-k}g_k}{h_k\bar{g}_{-k} - \bar{h}_{-k}g_k}, \qquad b_k = \frac{\bar{F}_{-k}h_k - F_k\bar{h}_{-k}}{h_k\bar{g}_{-k} - \bar{h}_{-k}g_k} \tag{9.19}$$

Нетрудно видеть, что

$$h_k\bar{g}_{-k} - \bar{h}_{-k}g_k = i(a+\bar{a}-2)(H_{1k}H_{1,-k}' - H_{n,-k}H_{\bar{n}k}' - H_{nk}H_{\bar{n},-k}') = \tag{9.20}$$

$$= 2ik(2-a-\bar{a})H_{1k}H_{1,-k}(\Theta_{nk}\Theta_{\bar{n}k}' - \Theta_{nk}'\Theta_{\bar{n}k}) =$$

$$= 4\nu k(2-a-\bar{a})H_{1k}H_{1,-k}\frac{1}{\sin\theta_0}\int_0^{\theta_0}\sin\theta\,\Theta_{nk}(\cos\theta)\,\Theta_{\bar{n}k}(\cos\theta)\,d\theta$$

При выводе последней части этой формулы надо воспользоваться тем фактом, что $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{nk}}{d\theta}\right) - \frac{k^2}{\sin^2\theta}\Theta_{nk} + (1-i\nu)\Theta_{nk} = 0 \tag{9.21}$$

Нетрудно доказать, что

$$H_{1k}(\cos\theta) \neq 0, \quad H_{nk}(\cos\theta) \neq 0 \qquad \text{при } 0 < \theta < \pi \ (n = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5-4i\nu}),\ k = 0, 1, \ldots$$

Поэтому в силу (9.20) знаменатели формул (9.14) и (9.19) отличны от нуля при $k \neq 0$. Подставляя теперь (9.19) в первую формулу (9.14), найдем c_k.

Таким образом, окончательно определены коэффициенты a_k, b_k, c_k разложений (9.4) и (9.5); доказательство сходимости мы здесь не рассматриваем.

Рассмотрим частный случай $A_k = B_k = B_k' = 0$ при $k \neq 0$. В силу (9.18), (9.19) имеем $a_k = b_k = c_k = 0$ при $k \neq 0$. Поэтому из (9.6), (9.7) получим

$$w = w_0 + a_0P_1(\cos\theta) + c_0P_n(\cos\theta) + \bar{c}_0P_{\bar{n}}(\cos\theta) \tag{9.22}$$

$$u + i\vartheta = u_0 + iv_0 - [a_0 + ib_0 + ac_0P_n'(\cos\theta) + \bar{a}\bar{c}_0P_{\bar{n}}'(\cos\theta)]\sin\theta e^{i\varphi} \tag{9.23}$$

где a_0, b_0, c_0 являются решением уравнений (9.11).

Решение задачи будет иметь такой вид, если радиальная сила Z и потенциал касательных сил Ω не зависят от угла φ.

Допустим теперь, что $\Omega=0$, $Z=\mathrm{const}$. Тогда, очевидно, можно принять

$$w_0=\frac{(1-\mu)R^2}{2Eh}Z,\qquad u_0=v_0=0 \tag{9.24}$$

Следовательно, в силу (9.9) будем иметь

$$A_0=B_0'=0,\qquad B_0=-w_0 \tag{9.25}$$

Подставляя эти значения в (9.11) и решая полученную систему, имеем

$$c_0=\frac{1-\bar a}{(a-\bar a\,P_{\bar n}'(\cos\theta_0)\,\Delta(\theta_0)}w_0,\qquad a_0=-\frac{w_0}{\Delta(\theta_0)},\qquad b_0=0 \tag{9.26}$$

где

$$\Delta(\theta)=\cos\theta+\frac{1-\bar a}{\bar a-a}\frac{P_n(\cos\theta)}{P_n'(\cos\theta_0)}+\frac{1-a}{a-\bar a}\frac{P_{\bar n}(\cos\theta)}{P_{\bar n}'(\cos\theta_0)} \tag{9.27}$$

Подставляя (9.26) в (9.22) и (9.23), будем иметь

$$w=\frac{w_0}{\Delta(\theta_0)}[\Delta(\theta_0)-\Delta(\theta)] \tag{9.28}$$

$$u+iv=\frac{w_0}{\Delta(\theta_0)}\left[1+\frac{a(1-\bar a)\,P_n'(\cos\theta)}{(\bar a-a)\,P_n'(\cos\theta_0)}+\frac{\bar a(1-a)\,P_{\bar n}'(\cos\theta)}{(a-\bar a)\,P_{\bar n}'(\cos\theta)}\right]\sin\theta e^{i\varphi} \tag{9.29}$$

§ 10. Пологая сферическая оболочка. Пусть S_0 — минимальный сферический сегмент, внутри которого лежит срединная поверхность G_0 данной сферической оболочки. Пусть d — диаметр основания S_0, а l — его высота.

Если отношение l/d достаточно мало по сравнению с единицей, то оболочку будем называть малой. Например, Е. Рейснер [4] считает оболочку малой, если $l/d<{}^1/_8$, что равносильно условию: $\theta_0\leqslant 28^\circ$, где θ_0 — угловое расстояние от центра сегмента S_0 до его края. При выполнении этого условия мы можем с достаточной точностью считать, что $A=2$. Тогда

$$\nabla^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta} \tag{10.1}$$

и основные уравнения (6.4) и (6.9) примут соответственно вид

$$\triangle V+8V=0,\qquad \triangle V+4(1-i\nu)V=0\qquad\left(\triangle=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) \tag{10.2}$$

При $A=2$, формулы (6.12) и (6.13) примут вид

$$\begin{aligned}
&T=T_0+\frac{Eh}{R}(\psi+\bar\psi),\qquad M=M_0-\frac{D(1+\mu)}{R^2}\,[(\mu+i\nu)\psi+(\mu-i\nu)\bar\psi]\\
&N_1+iN_2=N_1^0+iN_2^0-\frac{D}{\delta R^3}\frac{\partial}{\partial\zeta}[(1+i\nu)\psi+(1-i\nu)\bar\psi]\\
&P=P_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{Eh}{(1+\mu)R}(\chi+i\omega)+\frac{Eh}{R}\left(\frac{\psi}{1-i\nu}+\frac{\bar\psi}{1+i\nu}\right)\right]\\
&Q=Q_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{iD(1-\mu)}{R^2}\omega+\frac{D(1-\mu)}{R^2}\left(\frac{\mu+i\nu}{1-i\nu}\psi+\frac{\mu-i\nu}{1+i\nu}\bar\psi\right)\right]\\
&u+iv=u_0+iv_0+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\chi+i\omega+\frac{1+\mu}{1-i\nu}\psi+\frac{1+\mu}{1+i\nu}\bar\psi\right)\\
&\qquad\qquad w=w_0+\chi+\psi+\bar\psi
\end{aligned} \tag{10.3}$$

где χ, ω — произвольные действительные решения первого уравнения (10.2), а ψ — произвольное решение второго уравнения (10.2).

Уравнения (10.2) приводят к виду

$$\triangle V+\lambda^2V=0,\qquad \lambda=\mathrm{const} \tag{10.4}$$

общее решение которого дается формулой [10]

$$V=a_0J\left(\lambda\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)+\int_0^1[z\Phi(zt)+\zeta\Phi^*(\zeta t)]\,J_0(\lambda\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1-t})\,dt \tag{10.5}$$

где $\zeta=\bar z=e^{-i\varphi}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta$, $\Phi(z)$ и $\Phi(\zeta)$ — произвольные голоморфные функции в G и $\bar G$ соответственно, причем G — стереографическая проекция G_0 на экваториальную плоскость; ради простоты мы считаем, что G — односвязная область, содержащая начало координат. Учитывая пологость оболочки, можно положить $J_0(\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\theta)\approx 1$. Поэтому на основании (10.5) общее решение уравнения (10.3), для которого $\lambda^2=8$, будет иметь вид

$$V=a_0+\int_0^1[z\Phi(zt)+\zeta\Phi^*(\zeta t)]\,dt \tag{10.6}$$

Но это выражение есть гармоническая функция. Следовательно, в случае пологой оболочки первое уравнение (10.2) можно заменить уравнением Лапласа $\triangle V=0$. Это значит, что в случае пологой оболочки функции χ, ω, входящие в формулы (10.3), можно считать гармоническими функциями α, β.

Принимая во внимание также малость отношения h/R, можно положить

$$4(1-i\nu)\approx-\frac{i4\rho R}{h}\qquad\left(\rho=\sqrt{12(1-\mu^2)}\right) \tag{10.7}$$

Поэтому уравнение для ψ примет вид

$$\triangle\psi-\frac{4i\rho R}{h}\psi=0 \tag{10.8}$$

В силу последней формулы (10.3) для w имеем уравнение

$$\triangle\left(\triangle\triangle+\frac{192(1-\mu^2)R^2}{h^2}\right)w=Z' \tag{10.9}$$

где

$$Z'=\frac{16R^4}{D}\left[\triangle Z+4(1-\mu)Z-\frac{h^2}{12R^2}\triangle\Phi+4(1-\mu)\Phi\right] \tag{10.10}$$

Уравнение (10.9) впервые было получено иным путем В. З. Власовым [9, 11]; это уравнение мы встречаем также у Е. Рейснера [4].

В случае пологой оболочки формулы (6.17) и (6.18) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&T=T_0+\frac{Eh}{R}\psi_1,\qquad M=M_0-\frac{E\mu h^3}{12(1-\mu)R^2}\psi_1-\sqrt{\frac{1+\mu}{12(1-\mu)}}\frac{Eh^2}{R}\psi_2\\
&N_1+iN_2=N_1^0+iN_2^0-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3}\psi_1+\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}R^2}\psi_2\right]\\
&P=P_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{Eh}{(1+\mu)R}(\chi+i\omega)+\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)R^3}\psi_1+\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\mu^2)}R^2}\psi_2\right]\\
&Q=Q_0+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[\frac{iEh^3}{12(1+\mu)R^2}\omega-\frac{Eh^3}{12(1+\mu)R^2}\psi_2+\frac{Eh^4}{12\sqrt{3(1-\mu^2)}R^3}\psi_2\right]\\
&u+iv=u_0+iv_0+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\chi+i\omega+\frac{h^2}{12(1-\mu^2)R^2}\psi_1+\sqrt{\frac{1+\mu}{12(1-\mu)}}\frac{h}{R}\psi_2\right)\\
&w=w_0+\chi+\psi_1
\end{aligned} \tag{10.11}$$

где w_0 — частное решение уравнения (10.9), χ и ω — произвольные гармонические функции, $\psi_1 = \psi + \overline{\psi}$, $\psi_2 = i(\psi - \overline{\psi})$, причем ψ — произвольное решение второго уравнения (10.1). Функции χ, ω, ψ можно теперь представить в виде

$$\chi = \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} \qquad \omega = \Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z)} \tag{10.12}$$

$$\psi = a_0 J_0\left(\lambda \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta\right) + \int_0^1 \left[z\Phi_3(zt) + \zeta\overline{\Phi_4(zt)}\right] J_0\left(\lambda \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{1-t}\right) dt$$

$$\left(\lambda = 2i\sqrt{i}\sqrt{\frac{\rho R}{h}}, \quad \rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}\right)$$

где a_0 — произвольная постоянная, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 — произвольные голоморфные функции, причем мы можем без ущерба для общности Φ_1 и Φ_2 подчинить условиям

$$\Phi_1(0) = \overline{\Phi_1(0)}, \qquad \Phi_2(0) = \overline{\Phi_2(0)} \tag{10.13}$$

Подставляя (10.12) в формулы (10.3), получим выражение усилий, моментов и смещений через произвольные голоморфные функции Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

§ 11. Замечание о решении граничной задачи в случае пологой оболочки с закрепленным краем, имеющей форму сферического сегмента. Для решения этой задачи дословно надо повторить все то, что нами было сделано в § 9, со следующими изменениями: всюду надо вместо $\Theta_{1n}(\cos\theta)$ и $\Theta_{1,-k}(\cos\theta)$ подставить $(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta)^k$, а $\Theta_{nk}(\cos\theta)$ и $\Theta_{n,-k}(\cos\theta)$ заменить через $J_k(\lambda\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда нетрудно видеть, что вместо H_{1k} и H_{nk} надо будет всюду брать следующие выражения $(k = 1, 2, \ldots)$

$$H_{1k}(\cos\theta) = 0 \quad \text{при } k \geqslant 0, \qquad H_{1,-k}(\cos\theta) = \frac{2k}{\sin\theta}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^k$$

$$H_{nk}(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} J_{k+1}\left(\lambda\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right), \qquad H_{n,-k}(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} J_{k-1}\left(\lambda\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$$

где

$$\lambda = i\sqrt{i}\,\frac{2\sqrt{\rho R}}{\sqrt{h}}, \qquad \rho = \sqrt{12(1-\mu^2)}$$

Заметим, что изложенный метод может быть применим к решению граничных задач для сферической оболочки произвольной формы.

Поступила в редакцию
3 VII 1947

Институт математики
Академии наук Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. ПММ. 1945. Т. X. Вып. 5.
2. Гольденвейзер А. Л. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 6.
3. Власов В. З. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 2.
4. Reissner E. Jour. Math. and Phys. 1946. Vol. XXV. N 1.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
6. Новожилов В. В. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 3.
7. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. ОНТИ. 1935.
8. Векуа И. Н. ДАН СССР. 1945. Т. XLIX. № 5.
9. Векуа И. Н. Сообщения Акад. Наук Грузинской ССР. 1946. Т. VII. № 1—2.
10. Векуа И. Н. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1946. Т. VII. № 3.
11. Власов В. З. Изв. АН СССР. Отд. технических наук. 1947. № 1.