Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ЗАМЕТКИ

ОБ УПРУГИХ КОНСТАНТАХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. М. Риз

(Москва)

В совместной работе автора этой заметки и М. В. Зволинского [1] были выведены общие формулы, связывающие напряжения и деформации в изотропном теле:

$$\sigma_{ij} = [\lambda J_1 + (B + \tfrac{1}{2}\lambda) J_1^2 - (C + B\lambda) J_2]\,\delta_{ij} + [2\mu - (C + \lambda - 2\mu) J_1]\,\varepsilon_{ij} + \\ + \tfrac{1}{2}(A + S\mu)\,[\varepsilon_{ij}(\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}) + \varepsilon_{ik} + \varepsilon_{jk}] \qquad (1)$$

Здесь J_1 и J_2 — инварианты тензора деформаций, причем деформации выражаются через производные перемещений по координатам окончательного состояния, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$.

Формулы эти, справедливые с точностью до квадратов деформации, содержат три дополнительные упругие константы A, B и C.

Если предположить, как это делалось нами ранее, линейную зависимость между главными напряжениями, отнесенными к первоначальной, недеформированной величине площади, и главными удлинениями, коэффициенты A, B и C равны нулю.

Цель настоящей заметки — указать на возможность такого выбора дополнительных упругих констант, который позволяет с большим приближением описать зависимость между деформациями и напряжениями в изотропном теле.

Для дальнейшего существенно, что промежуточным шагом к получению формул (1) было установление зависимостей

$$\sigma_i^* = 2\mu e_i + \lambda S_1 + A e_i^2 + B S_1^2 + C(e_i S_1 - S_2) \qquad \left(\begin{array}{l} S_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ S_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \end{array}\right) \qquad (2)$$

где e_i — главные удлинения, σ_i^* — главные напряжения, отнесенные к первоначальной площади. Окончательные формулы (1) получены из выражений (2) переходом к начальным напряжениям в деформированном теле и переходом от главных осей к произвольным декартовым координатам.

Рассмотрим частные случаи деформации: растяжение и сдвиг.

В первом случае положим $e_2 = e_3 = -ke_1$. Формулы (2) дадут нам

$$\sigma_1^* = 2\mu e_1 + \lambda(1 - 2k)e_1 + Ae_1^2 + Be_1^2(1 - 2k) + C(1 - 2k)e_1^2 - C(k^2 - 2k)e_1^2 \qquad (3)$$

$$0 = -2\mu k e_1 + \lambda(1 - 2k)e_1 + Ak^2 e_1^2 + Be_1^2 + Be_1^2(1 - 2k) - \\ - C(1 - 2k)ke_1^2 - C(k^2 - 2k)e_1^2 \qquad (4)$$

Откуда находим (ν — обычное значение коэффициента Пуассона)

$$k = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \nu, \qquad A\nu^2 + B(1 - 2\nu) + 3\nu C(1 - \nu) = 0 \qquad (5)$$

Таким образом, для существования эффекта Пуассона константы A, B и C должны быть связаны вторым из соотношений (5). С учетом последнего равенство (3) может быть записано в форме

$$\sigma_1 = Ee_1 - A\nu^2 e_1^2 \tag{6}$$

Рассмотрим деформацию чистого сдвига. Обозначим касательное напряжение через τ и угол, бывший до деформации прямым, через 2α. Тогда главные удлинения будут

$$e_1 = \sqrt{2}\cos\alpha - 1, \qquad e_2 = \sqrt{2}\sin\alpha - 1, \qquad e_2 = \nu \tag{7}$$

или, отбрасывая члены порядка θ^3 и выше:

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi + \theta, \qquad e_1 = -\theta - \tfrac{1}{2}\theta^2, \qquad e_2 = \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2, \qquad e_3 = 0 \tag{8}$$

Для напряжений из непосредственных условий равновесия получим

$$\sigma_1^* = \tau\sqrt{2}\,2\cos\alpha = \tau 2\left(1 - \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2\right), \qquad \sigma_2^* = -2\tau\left(1 + \theta - \tfrac{1}{2}\theta^2\right) \tag{9}$$

Сопоставляя формулы (8) и (9) с формулой (2), найдем

$$A + C = \lambda + 3\mu \tag{10}$$

Следовательно, для осуществления деформации чистого сдвига упругие константы должны быть связаны еще одним дополнительным соотношением (10) и из трех констант A, B и C только одна является произвольной, например, A.

Естественно выбрать ее так, чтобы зависимость (6) по возможности точно описывала диаграмму Гука до точки текучести.

Обозначая удлинение и напряжение, соответствующие переходу к пластическому состоянию при одностороннем растяжении, соответственно e_* и σ_*, будем иметь

$$A = \frac{Ee_* - \sigma_*}{\nu^2 e_*^2} \tag{11}$$

При таком выборе констант опыты решения задачи нелинейной теории упругости, изложенные в работе [1], могут быть применены не только на прямолинейном участке диаграммы Гука, но с некоторой идеализацией и для любых упругих деформаций вплоть до наступления явления текучести.

Заметим еще, что зависимость между касательным напряжением и углом сдвига получается при этом линейной; действительно, из равенств (8) и (9) найдем

$$\tau = \mu\theta \tag{12}$$

Наконец, отметим, что, рассматривая деформацию гидравлического сжатия, т. е. полагая $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = \sigma$ и называя модулем $k = -\sigma / \Delta v$, получим

$$k = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} + \frac{A + 9B - 2\mu - 3\lambda}{3}\,e. \tag{13}$$

Поступила в редакцию
26 XII 1946

P. M. RIZ. – ELASTIC CONSTANTS IN THE NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY

In the work which the author carried out jointly with M. V. Zvolinsky the general relationships between stress and strain in an isotropic body were given (1).

The author now takes up the possibility of the choice of additional elastic constants in formula (1), for the best possible description of the relationships between stresses and strain.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зволинский И. В. и Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной упругости. ПММ. 1939. т. II. Вып. 4.