Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

УМЕНЬШЕНИЕ ОШИБКИ ОТ ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

А. Л. Лурье

(Москва)

Результаты измерений фиксируются всегда в каких-то конечных долях единицы измерения. Между тем измеряемая величина может обычно принимать непрерывный ряд значений. Ошибки, вызываемые этой причиной, называем ошибками от округления. При отсутствии случайных ошибок неточность измерений, вызываемая округлением, не может быть уменьшена увеличением числа наблюдений и равна разности между действительным значением измеряемой величины и ближайшим целым числом наиболее мелких подразделений масштаба измерительного прибора. Если же имеют место ошибки, вызываемые случайными причинами, то ошибка от округления может принимать при каждом измерении различные значения, т. е. сама становится случайной величиной.

В этой работе показывается, что в этом случае, уменьшая точность отдельных измерений (в смысле определенном ниже) и увеличивая их число, можно добиться точности, значительно большей той, которая соответствует наиболее мелкому делению шкалы (предполагая, разумеется, что систематические ошибки исключены).

1. Обозначим через δ разность между истинным значением измеряемой величины и ближайшим снизу целым числом наиболее мелких подразделений шкалы измерительного прибора. Деление шкалы, соответствующее этому целому числу, примем за начальную (нулевую) точку отсчета результатов измерений. Истинное значение измеряемой величины будет в этом случае выражаться числом δ. По определению $0 \leqslant \delta < 1$. Предполагаем, что $\sqrt{\delta}\ \frac{1}{2} \leqslant$; при $\delta > \frac{1}{2}$ можно рассматривать отклонение истинного значения измеряемой величины от ближайшего целого числа сверху и точку, соответствующую этому ближайшему сверху целому числу, принять за нулевую.

За результат измерения K принимается каждый раз целое число, наиболее близкое к действительному положению указателя шкалы измерительного прибора. Вызываемые случайными причинами отклонения указателя шкалы измерительного прибора от положения, точно соответствующего истинному значению измеряемой величины (точка δ), обозначим ξ. Разность между целым числом, принимаемым за результат измерений K и действительным положением указателя шкалы (ошибку округления), обозначим η. Очевидно, что $|\eta| < \frac{1}{2}$. Результативная ошибка измерения $\Delta = K - \delta$ является алгебраической суммой случайного отклонения ξ и ошибки округления η.

Пусть $f(x, h)$—дифференциальный закон распределения случайного отклонения ξ, зависящий от параметра h. Нетрудно убедиться, что вероятность любого значения результата измерения $P(K = k)$, где k — какое-то целое число, равна вероятности неравенства $k - \frac{1}{2} - \delta < \xi < k + \frac{1}{2} - \delta$, а следовательно, математическое ожидание результата измерения $E(K)$ будет

$$E(K) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} k \int\limits_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k+\frac{1}{2}-\delta} f(x, h)\, dx \qquad (1.1)$$

2. *Теорема 1°. Если $E(\xi)$ существует при всяком $h \neq 0$, причем*

$$f(x, h) = f(-x, h) \tag{2.1}$$

$$f(x_2, h) \leqslant f(x_1, h) \quad \text{для} \quad |x_2| > |x_1| \tag{2.2}$$

$$\int_0^{l_0} f(x, h)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \tag{2.3}$$

где l_0 — некоторое действительное число, неравное нулю, то $E(\Delta) \to 0$ при $h \to 0$. В частности, если случайные отклонения ξ подчинены закону Гаусса со стандартом σ, то $E(\Delta) \to 0$ при $\sigma \to \infty$.

Доказательство. Согласно (1.1) имеем

$$E(\Delta) = E(K) - \delta = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} k \int_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k+\frac{1}{2}-\delta} f(x, h)\,dx - \delta \tag{2.4}$$

Ряд (2.4) абсолютно сходится, так как $E(\xi)$ по условию теоремы существует. Пользуясь условием (2.1), соотношение (2.4) можно привести к виду

$$E(\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} k \left(\int_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k+\frac{1}{2}-\delta} f(x, h)\,dx - \int_{k-\frac{1}{2}+\delta}^{k+\frac{1}{2}+\delta} f(x, h)\,dx \right) - \delta =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k-\frac{1}{2}+\delta} f(x, h)\,dx - \delta = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\int_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k-\frac{1}{2}+\delta} f(x, h)\,dx - 2\delta \int_{k-1}^{k} f(x, h)\,dx \right) \tag{2.5}$$

Но

$$\left| \int_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k-\frac{1}{2}+\delta} f(x, h)\,dx - 2\delta \int_{k-1}^{k} f(x, h)\,dx \right| < 2\delta\,[f(k-1, h) - f(k, h)]$$

Следовательно,

$$|E(\Delta)| < \left| \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} f(x, h)\,dx - 2\delta \int_0^1 f(x, h)\,dx \right| +$$

$$+ 2\delta \sum_{k=2}^{k=\infty} [f(k-1, h) - f(k, h)] < \int_0^1 f(x, h)\,dx + 2\delta f(1, h) \tag{2.6}$$

Из (2.2) и (2.3) нетрудно вывести, что для любого $l \neq 0$

$$\int_0^l f(x, h)\,dx \to 0, \qquad f(l, h) \to 0 \qquad \text{при} \quad h \to 0 \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) непосредственно следует справедливость теоремы 1.

Теорема 2. Пусть n — число независимых измерений со случайными ошибками ξ_k, ошибками округления η_k и результативными ошибками $\Delta_k = \xi_k + \eta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $\overline{\Delta}_n$ — средняя арифметическая ошибка n измерений. Если ξ_k подчинены одному и тому же дифференциальному закону распределения $f(x, h)$, причем соблюдены условия теоремы 1, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число h_0, что для $|h| < h_0$ будет $P(|\overline{\Delta}_n| < \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$. В частности, в случае подчинения ξ_k закону Гаусса со стандартом σ, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число σ_0, что для $\sigma > \sigma_0$ будет $P(|\overline{\Delta}_n| < \varepsilon) \to 1$ при $n \to \infty$.

Справедливость теоремы *2* вытекает из теоремы *1* и из применимости к $\overline{\Delta}_n$ закона больших чисел: последнее следует [1] из существования $E(\overline{\Delta}_n)$.

Таким образом, уменьшая точность отдельного измерения, т. е. уменьшая абсолютную величину параметра h (в случае Гаусса увеличивая σ) и увеличивая число измерений, можно достигнут сколь угодно большой точности при любой величине наиболее мелкого деления шкалы прибора.

Практическое использование полученного результата зависит от того числа измерений n, которое необходимо для достижения желательного приближения к единице интересующей нас вероятности.

3. Особый интерес представляет исследование случая подчинения ξ закону Гаусса. Покажем, что при этом условии

$$|E(\Delta)| < \frac{1}{32\sigma^2 \sqrt{2\pi e}} \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$A_k = \int\limits_{k-\frac{1}{2}-\delta}^{k-\frac{1}{2}} f(x)\,dx - 2\delta \int\limits_{k-1}^{k-\frac{1}{2}} f(x)\,dx, \quad B_k = \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}+\delta} f(x)\,dx - 2\delta \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k} f(x)\,dx \quad (k=1,2,\ldots)$$

Формула (2.5) примет вид

$$E(\Delta) = \sum_{1}^{\infty} (A_k + B_k) \tag{3.2}$$

Исходя из свойств первой и второй производной функции

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-x^2}{2\sigma^2}$$

нетрудно показать справедливость соотношений

$$A_k < 0, \qquad B_k > 0 \tag{3.3}$$

$$|A_k| < B_k, \qquad B_{k-1} < |A_k|, \qquad \text{если} \quad k \leqslant \sigma \tag{3.4}$$

$$B_k < |A_k|, \qquad |A_{k+1}| < B_k, \qquad \text{если} \quad k-1 \geqslant \sigma \tag{3.5}$$

Пусть k_0—целое число, удовлетворяющее условию $k_0 - 1 \leqslant \sigma < k_0$. Из (3.3) и (3.4) и из (3.3) и (3.5) соответственно имеем

$$\sum_{1}^{k_0-1} (A_k + B_k) - B_{k_0-1} < 0, \qquad \sum_{k_0+1}^{\infty} (A_k + B_k) < 0 \tag{3.6}$$

Предположим, что $E(\Delta) > 0$. Принимая во внимание (3.2) и (3.6), получим $E(\Delta) < B_{k_0-1} + A_{k_0} + B_{k_0}$. Но из свойств $f'(x)$ и $f''(x)$ следует, что не могут одновременно иметь место неравенства $|A_{k_0}| < B_{k_0-1}$ и $|A_{k_0}| < B_{k_0}$. Поэтому $E(\Delta)$ меньше наибольшей из величин B_{k_0-1} и B_{k_0}. Отсюда вытекает справедливость (3.1), так как можно показать, что

$$B_k < \frac{1}{32 f'(\sigma)} = \frac{1}{32\sigma^2\sqrt{2\pi e}} \qquad \text{при любом } k \tag{3.7}$$

Для случая, когда $E(\Delta) < 0$, доказательство проводится аналогично.

Найдем оценку стандарта случайной величины Δ. Так как $\Delta = \xi + \eta$, то стандарт распределения σ' величины Δ удовлетворяет неравенству $\sigma' \leqslant \sigma + \sigma''$, где σ''—стандарт распределения ошибки округления η. Но $\sigma'' < \frac{1}{2}$, поскольку $|\eta| < \frac{1}{2}$. Следовательно, $\sigma' < \frac{1}{2} + \sigma$.

При достаточно больших n закон Гаусса является приближенным законом распределения $\bar{\Delta}_n$: поскольку $\sigma' < \frac{1}{2} + \sigma$ можно, используя неравенство (3.1), получить оценку вероятностей возможных значений $\bar{\Delta}_n$

$$P\left(|\bar{\Delta}_n| < \frac{1}{32\sigma^2\sqrt{2\pi e}} + \frac{t}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\right) > \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \exp\frac{-t^2}{2}\,dt \qquad (3.10)$$

О возможном практическом использовании полученных результатов следует заметить: обычно стандарт случайных ошибок σ оказывается равным не менее чем нескольким наиболее мелким подразделениям шкалы измерительного прибора. Между тем из формулы (3.1) следует, что $E(\Delta) < 0.0304$ уже при $\sigma = 0.5$, $E(\Delta) < 0.0076$ при $\sigma = 1$ и т. д. Поэтому весьма редко может встретиться случай, когда встанет вопрос об искусственном увеличении σ ради уменьшения ошибки округления.

В то же время из сказанного вытекает, что практически ошибка округления не является препятствием для достижения точности измерений, превосходящей наиболее мелкое деление шкалы измерительного прибора. Это обстоятельство может быть использовано в тех случаях, когда применение более совершенного (с более дробной шкалой) измерительного прибора невозможно или связано с большими затруднениями, чем многократное повторение измерений. При этом может оказаться желательным не увеличение, а уменьшение σ. При уменьшении σ до 2—0.5 делений измерительной шкалы $E(\Delta)$ достаточно мало и в то же время количество необходимых измерений хотя и велико, но все же остается практически осуществимым (порядка нескольких тысяч).

Поступило в редакцию
5 I 1946

A. L. LOURYE. — DECREASE OF THE ERROR IN DROPPING FRACTIONS BY INCREASING THE NUMBER OF MEASUREMENTS

In the absence of accidental errors, the error η occasioned by dropping fractions is equal to the difference between the real value and the nearest whole number of the smallest division of the measuring scale. Should there be an accidental error ζ in the measurement, the error occasioned by dropping fractions will be an accidental magnitude as well. If the accidental errors are governed by the Gauss law with standard deviation σ, the mathematical expectation of the error occasioned by dropping fractions $E(\eta)$ and consequently the mathematical expectation of the resultant error $E(\Delta) = E(\xi + \eta)$ will tend to zero as $\sigma \to \infty$. The general case for the above is expressed by theorem 1. From this theorem and the law of great numbers, it is found that if the precision of any one measurement decreases (in the Gauss case, σ increases), by repeating the measurement a precision may be attained higher in any degree than the smallest division on the scale (theorem 2). If the accidental errors are governed by the Gauss law, $E(\Delta)$ satisfies the inequality (3.1), as is proved in § 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khintchine A. Sur la loi des grands nombres. Comptes rendus, 1919. Vol. 188.