Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

КРЫЛО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Л. А. Галин

(Москва)

В настоящей работе дается решение задачи об обтекании сверхзвуковым потоком газа слабоизогнутого крыла прямоугольной формы в плане, уравнение поверхности которого представляет произвольную функцию от x и y. Одновременно с этим указано, каким образом можно получить решения для крыльев, которые в плане являются трапецевидными. В первой части работы рассмотрена задача об обтекании неподвижного крыла, во второй — дано решение задачи о крыле, которое совершает гармонические колебание.

I. Обтекание сверхзвуковым потоком газа неподвижного крыла

§ 1. Граничные условия задачи. Скорости в потоке газа, обтекающем слабоизогнутое крыло, определяются на основании потенциала скоростей

$$v_x^{(0)} = u + \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, \qquad v_y^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}, \qquad v_z^{(0)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} \tag{1.1}$$

Пользуясь обычной линеаризацией, находим, что потенциал скоростей $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ должен удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_0^2} - (M^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $M = u / a$ — число Маха, где u — скорость движения газа на бесконечности, и a — скорость звука на бесконечности.

Пусть поверхность крыла определяется уравнением $z_0 = \zeta(x_0, y_0)$. Так как крыло предполагается слабоизогнутым, то в дальнейшем условия сносятся на плоскость $z_0 = 0$.

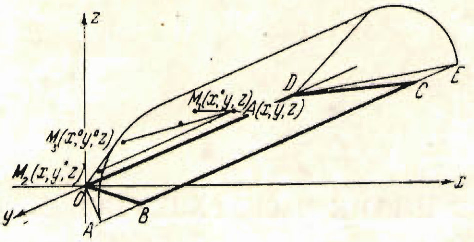
В таком случае для определения потенциала скоростей имеем при $z_0 = 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = -u\frac{\partial\zeta(x_0, y_0)}{\partial x_0} \quad \text{на крыле;} \qquad \varphi = 0 \quad \text{вне крыла} \tag{1.3}$$

Второе условие имеет место в точках, расположенных перед крылом (по направлению потока) (фиг. 1). В точках плоскости $z_0 = 0$, расположенных за крылом, оно должно быть заменено условием $\partial\varphi / \partial x_0 = 0$.

Давление, действующее на крыло, определяется следующим образом:

$$p = p^+ - p^- = 2\rho u\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Введем новые координаты

$$x = x_0 / \mu, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \tag{1.5}$$

где

$$\mu = \sqrt{M^2 - 1} \tag{1.6}$$

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ в таком случае будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{1.7}$$

Введем обозначение $\partial \zeta(x_0, y_0) / \partial x_0 = f(x_0, y_0)$. В таком случае на основании (1.3) для определения потенциала скоростей получим условия при $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -uf(\mu x, y) \quad \text{на крыле}, \qquad \varphi = 0 \quad \text{вне крыла} \tag{1.8}$$

Давление, действующее на крыло, на основании (1.4) и (1.5) будет

$$p = p^+ - p^- = 2\frac{\rho u}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{1.9}$$

§ 2. Построение функций, удовлетворяющих волновому уравнению. Пусть $\varphi^{(0)}(x, y, z)$—некоторая функция, удовлетворяющая волновому уравнению (1.7), которая в верхнем полупространстве (при $z > 0$) может быть представлена в виде волнового потенциала простого слоя [1]

$$\varphi^{(0)}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} \tag{2.1}$$

Здесь плотность слоя $f(x, y)$ распределена на некоторой конечной области Г в плоскости $z = 0$; интеграция ведется в области S, представляющей ту часть области Г, которая находится внутри конуса Маха с вершиной в точке $x = \zeta$, $y = \eta$. Потенциал скоростей в верхнем полупространстве, очевидно, можно представить в этой форме. Тогда легко показать, что

$$\varphi^{(1)}(x, y, z) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi^{(0)}(\xi, y, z)\, d\xi \tag{2.2}$$

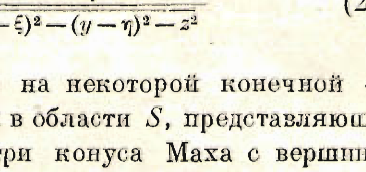
также будет удовлетворять волновому уравнению.

Так как $\varphi^{(0)}(x, y, z)$ согласно определению будет равна нулю вне области, ограниченной огибающей конусов Маха, вершины которых расположены на контуре области Г, то интегрирование в (2.2) ведется по некоторому конечному отрезку (фиг. 1) между точками $M_1(x^*, y, z)$ и $A(x, y, z)$. Поэтому

$$\varphi^{(1)}(x, y, z) = \int\limits_{M_1(x^*, y, z)}^{A(x, y, z)} \varphi^{(0)}(\xi, y, z)\, d\xi \tag{2.3}$$

Все сказанное выше будет справедливо также в случае, когда интегрирование ведется по y; в результате получим функцию (фиг. 1)

$$\varphi^{(2)}(x, y, z) = \int\limits_{M_2(x, y^*, z)}^{A(x, y, z)} \varphi^{(0)}(x, \eta, z)\, d\eta \tag{2.4}$$



Фиг. 2

Кроме того, можно интегрировать по произвольному направлению, параллельному плоскости $z=0$, причем это приводит к функции (фиг. 1)

$$\varphi^{(3)}(x, y, z) = \varphi^{(3)}(u, v, z) = \int\limits_{M_3(u^*, v^*, z)}^{A(u, v, z)} \varphi^{(0)}(u, v, z)\, du \tag{2.5}$$

где $u = y\cos\alpha + x\sin\alpha$, $v = x\cos\alpha - y\sin\alpha$.

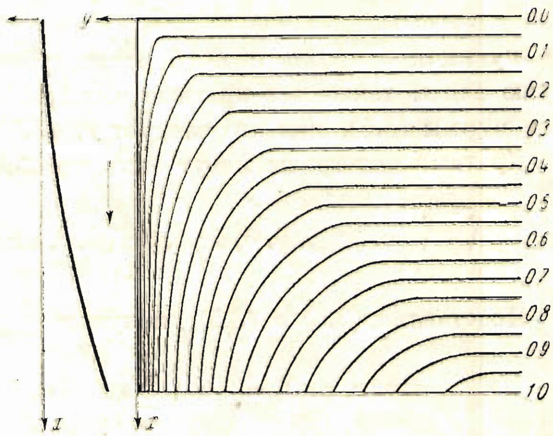
При этом каждая из функций (2.3), (2.4) и (2.5) будет удовлетворять волновому уравнению (1.7) и будет равна нулю вне огибающей конусов Маха, вершины которых находятся на контуре области Г. Вследствие этого каждая из указанных функций может в свою очередь быть представлена в виде волнового потенциала простого слоя (2.1) в случае, когда плотность слоя распределена в конечной области Г. Таким образом, операцию интегрирования, посредством которой на основании функции $\varphi^{(0)}(x, y, z)$ получаются новые функции, удовлетворяющие волновому уравнению, можно повторить n раз.

Установим каким граничным условиям в области Г будут удовлетворять построенные функции. Если, например, при $z=0$

$$\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial z} = f(x, y) \quad \text{на Г} \tag{2.6}$$

то для $\varphi^{(1)}(x, y, z)$, определенной по (2.2), имеет место при $z=0$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z} = \int\limits_0^x f(\xi, y)\, d\xi \quad \text{на Г}$$



Фиг. 3.

Если с помощью n операций интегрирования построить функцию

$$\varphi^{(n)}(x, y, z) = \int\limits_{M(x^*, y, z)}^{A(x, y, z)} \cdots \int\limits_{M(x_{n-1}^*, y, z)}^{A(x_{n-1}, y, z)} \varphi^{(0)}(x_{n-1}, y, z)\, dx_{n-1} \ldots dx \tag{2.7}$$

то на основании (2.6) получим при $z=0$

$$\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial z} = \int\limits_0^x \cdots \int\limits_0^{x_{n-2}} \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_{n-1}, y, z)\, dx_{n-1}\, dx_{n-2} \ldots dx \quad \text{на Г} \tag{2.8}$$

Аналогично можно установить граничные условия для функций, полученных на основании $\varphi^{(0)}(x, y, z)$, интегрированием по другому направлению.

§ 3. Крыло, изогнутое в направлении потока. Рассмотрим в качестве примера крыло прямоугольной формы в плане (фиг. 2). Потенциал скоростей в этом случае согласно (1.8) должен удовлетворять условиям при $z=0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -uf(\mu x) \text{ на } OBDE, \qquad \varphi = 0 \quad \text{на } OAB \tag{3.1}$$

Мы исходим из функции $\varphi_0(x, y, z)$, удовлетворяющей условиям при $z=0$:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = 1 \quad \text{на } OBDE, \qquad \varphi_0 = 0 \quad \text{на } OAB \tag{3.2}$$

Выражение для функции $\varphi_0(x, y, z)$ содержится в работе А. Буземана[2]. Значение ее производной по x при $z=0$

$$\left[\frac{\partial\varphi_0(x, y, z)}{\partial x}\right]_{z=0} = \begin{cases} \pi^{-1}\arccos(1-2y/x) & \text{для } x>y \\ 1 & \text{для } x<y \end{cases} \tag{3.3}$$

Пусть функция $f(\mu x)$, где $\mu=\sqrt{M^2-1}$, может быть разложена в ряд

$$f(\mu x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\mu x)^n \tag{3.4}$$

Тогда из (2.6), (2.7) и (2.8) следует, что условиям (3,1) будет удовлетворять потенциал $\varphi(x, y, z)$, значение которого при $z=0$ будет: (3.5)

$$\varphi(x, y, 0)=u\left[A_0\varphi_0(x, y, 0)+\sum_{n=0}^{\infty} n!\,A_n\int_0^x\ldots\int_0^{x_{n-2}}\int_0^{x_{n-1}}\varphi_0(x_{n-1}, y, 0)\,dx_{n-1}\,dx_{n-2}\ldots dx\right]$$

Функция φ в области OAB равна нулю, так как здесь $\varphi_0=0$, и поэтому нулю равны также все кратные интегралы. Каждое из слагаемых под знаком суммы (3.5), как это следует из (3.2), (2.7) и (2.8), равно $A_n(\mu x)^n$.

Кратные интегралы могут быть преобразованы по формуле (3.6)

$$\int_0^x\ldots\int_0^{x_{n-2}}\int_0^{x_{n-1}}\varphi_0(x_{n-1}, y, 0)\,dx_{n-1}\,dx_{n-2}\ldots dx=\frac{1}{n!}\int_0^x[\mu(x-\xi)]^n\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi, \eta, z)}{\partial\xi}\right]_{z=0}d\xi$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получим

$$\varphi(x, y, 0)=-u\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}A_n[\mu(x-\xi)]^n\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi, y, z)}{\partial\xi}\right]_{z=0}d\xi$$

или на основании (3.4)

$$\varphi(x, y, 0)=-u\int_0^x f[\mu(x-\xi)]\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi, y, z)}{\partial\xi}\right]_{z=0}d\xi \tag{3.7}$$

Давление, действующее на крыло, согласно (1.9) будет

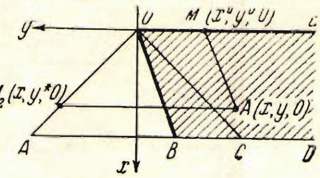
$$p=-2\rho u^2\,\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(\mu(x-\xi))\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi, y, z)}{\partial\xi}\right]_{z=0}d\xi \tag{3.8}$$

На основании (3.8) могут быть получены выражения для подъемной силы крыла P и момента M_y относительно передней кромки крыла. Пусть h — размер крыла в направлении оси x и l — размер в направлении оси y. Тогда

$$P=\int_0^l\int_0^{h/\mu}p(x, y)\,dx\,dy=2\rho u^2\int_0^{h/\mu}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\xi}f(\xi-\xi_1)\left\{\int_0^l\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi_1, \eta, z)}{\partial\xi_1}\right]_{z=0}d\eta\right\}d\xi_1\,d\xi$$

Интеграл по η имеет весьма простое выражение:

$$\int_0^l\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi_1, \eta, z)}{\partial\xi_1}\right]_{z=0}d\eta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi_1}\arccos\left(1-2\frac{\eta}{\xi_1}\right)d\eta+\int_{\xi_1}^{l-\xi_1}d\eta=l-\xi_1 \tag{3.9}$$



Фиг. 4.

На основании этого подъемная сила

$$P = 2u^2\rho \int_0^{h/\mu} f\left(\mu\left(\frac{h}{\mu} - x\right)\right)(l - x)\,dx \qquad (3.10)$$

Момент сил, действующих на крыло относительно его передней кромки, равен

$$M_y = \int_0^l \int_0^{h/\mu} p(x, y)\,x\,dx\,dy = \qquad (3.11)$$

$$= 2u^2\rho\left\{\frac{h}{\mu}\int_0^{h/\mu} f\left(\mu\left(\frac{h}{\mu} - \xi\right)\right)(l - \xi)\,d\xi - \int_0^{h/\mu} dx \int_0^x f(\mu(x - \xi))(l - \xi)\,d\xi\right\}$$

На основании полученных результатов было исследовано обтекание крыла прямоугольной формы в плане, изогнутого по дуге параболы и расположенного так, что касательная к поверхности крыла у передней кромки совпадала с направлением потока. На фиг. 3 показано распределение давления на крыле в случае $M = 2$. Приведем еще выражение для потенциала скоростей в любой точке пространства. Оно имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = -u \int_{M(x^*, y, z)}^{A(x, y, z)} f(\mu(x - \xi))\frac{\partial\varphi_0(\xi, y, z)}{\partial\xi}\,d\xi \qquad (3.12)$$

При $z = 0$ это выражение переходит в (3.7).

Аналогичным путем можно найти решение задачи о крыле, которое в плане является трапецией (фиг. 4).

Дадим для этого случая выражение потенциала скоростей при $z = 0$

$$\varphi(x, y, 0) = \int_{y_1 \operatorname{tg}\alpha}^{x_1} f(\mu\cos\alpha\,(x_1 - \xi_1))\frac{\partial\varphi_0^*(\xi, y, 0)}{\partial\xi_1}\,d\xi_1 \qquad (3.13)$$

При этом $y_1 = y\cos\alpha + x\sin\alpha$, $x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ Здесь α — угол между боковой стороной трапеции и осью x. Функция $\varphi_0^*(x, y, z)$ определяется из условия, аналогичного (3.2), в котором $\partial\varphi_0^* / \partial z = 1$ в области $OBDE$.

§ 4. Крыло, изогнутое в направлении, перпендикулярном потоку.

Рассмотрим вначале крыло прямоугольной формы в плане. Будем исходить из функции $\varphi_0(x, y, z)$, определенной согласно (3.2). При этом вдоль отрезка прямой, параллельной оси y, находящегося в треугольнике OAB:

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = g\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (4.1)$$

Это следует из того обстоятельства, что в этой области функция $\varphi_0(x, y, z)$ соответствует коническому течению и поэтому $\partial\varphi_0 / \partial z$ должна иметь постоянную величину вдоль каждого луча, выходящего из точки O.

Интегрируя $\varphi_0(x, y, z)$ по направлению, параллельному оси y, имеем

$$\varphi^{(1)}(x, y, z) = \int_{M_2(x, y^*, 0)}^{A(x, y, z)} \varphi_0(x, \eta, z)\,d\eta \qquad (4.2)$$

При этом $\varphi^{(0)}(x, y, 0) = 0$ в треугольнике OAB, так как здесь $\varphi_0(x, y, 0) = 0$.

Определим величину $\partial\varphi^{(1)}/\partial z$ при $z=0$ в прямоугольнике $OBED$:

$$\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}(x,y,z)}{\partial z}\right)_{z=0}=\int\limits_x^0\left[\frac{\partial\varphi_0(x,\eta,z)}{\partial z}\right]_{z=0}d\eta+\int\limits_0^y d\eta$$

На основании (4,1) получим

$$\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}(x,y,z)}{\partial z}\right)_{z=0}=\int\limits_x^0 g\left(\frac{\eta}{x}\right)d\eta+y=c_0x+y \tag{4.3}$$

Здесь введено обозначение

$$c_0=\int\limits_1^0 g(\tau)\,d\tau=\frac{1}{x}\int\limits_x^0\left[\frac{\partial\varphi_0(x,\eta,z)}{\partial z}\right]_{x=0}d\eta \tag{4.4}$$

На основании построенной таким образом функции, пользуясь (2.7) и (2.8), нетрудно найти потенциал скоростей для закрученного крыла, т. е. для такого крыла, уравнение поверхности которого будет $\zeta(x,y)=Ay$.

Для потенциала скоростей будем иметь при $z=0$

$$\varphi(x,y,0)=-uA\left\{\int\limits_x^y\varphi_0(x,\eta,0)\,d\eta-c_0\int\limits_0^x\varphi_0(\xi,y,z)\,d\xi\right\} \tag{4.5}$$

Построим потенциал скоростей для крыла, уравнение поверхности которого является полиномом от x и y. Пусть $\partial\zeta/\partial x=P_n{}^*(x,y)$, где $P_n{}^*(x,y)$ — полином степени n. Введем операторы M и L, определенные так

$$M(\varphi_0)=\int\limits_{M_1(x^*,y,0)}^{A(x,y,0)}\varphi_0(\xi,\eta,0)\,d\xi,\qquad L(\varphi_0)=\int\limits_{M_1(x,y^*,0)}^{A(x,y,0)}\varphi_0(x,\eta,0)\,d\eta \tag{4.6}$$

Будем обозначать k-кратное интегрирование по направлению, параллельному оси x, через M^k и m-кратное интегрирование по направлению, параллельному оси y, через L^m. В таком случае может быть образована функция $\varphi(x,y,z)$, которая является результатом применения к функции $\varphi_0(x,y,z)$ некоторого полиномиального оператора

$$\varphi(x,y,z)=P_n(M,L;\varphi_0(x,y,z))\qquad\left(P_n(M,L)=\sum_{k,m=0}^{n}A_{km}M^kL^m\right)$$

Нетрудно показать, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,y,z)\right]_{z=0}=\left[\frac{\partial}{\partial z}P_n(L,M;\varphi_0(x,y,z)\right]_{z=0}=P_n{}^\circ(x,y)$$

Это следует из одного свойства конических течений, использованного, в частности, в предыдущем примере, на основании которого после k-кратного интегрирования исходной функции будет получена функция, представляющая полином от x и y степени k.

Но полином $P_n{}^\circ(x,y)$, а следовательно, и полином $P_n(L,M)$ содержат столько же постоянных, как и полином $P_n{}^*(x,y)$. Поэтому всегда можно подобрать эти постоянные так, чтобы $P_n{}^\circ(x,y)=u\,P_n{}^*(x,y)$ и, таким образом, было удовлетворено граничное условие задачи. Для постоянных, входящих в $P_n(M,L)$, получаем при этом систему линейных уравнений.

II. Обтекание сверхзвуковым потоком колеблющегося крыла

§ 5. Граничные условия задачи. Если крыло совершает установившиеся гармонические колебания, то уравнение поверхности крыла будет [3]

$$z(x_0, y_0, t) = \zeta_0(x_0, y_0) + \zeta_1(x_0, y_0)\cos\omega t + \zeta_2(x_0, y_0)\sin\omega t \tag{5.1}$$

Полагая $\zeta(x_0, y_0) = \zeta_1(x_0, y_0) + i\zeta_2(x_0, y_0)$, будем иметь

$$z(x_0, y_0, t) = \zeta_0(x_0, y_0) + \operatorname{Re}\{(x_0, y_0)\, e^{-i\omega t}\} \tag{5.2}$$

С другой стороны, потенциал скоростей можно представить в виде

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \varphi(x_0, y_0, z_0) + \varphi_1(x_0, y_0, z_0)\cos\omega t + \varphi_2(x_0, y_0, z_0)\sin\omega t =$$
$$= \varphi^*(x_0, y_0, z_0) + \operatorname{Re}\{\Phi_0(x_0, y_0, z_0)\, e^{-i(\omega t - \beta x_0)}\} \tag{5.3}$$

причем

$$\Phi_0(x_0, y_0, z_0) = \varphi_1(x_0, y_0, z_0) + i\varphi_2(x_0, y_0, z_0) \tag{5.4}$$

Для определения функции $\varphi^*(x_0, y_0, z_0)$ служат условия вида (1.3). Способ нахождения этой функции указан в предыдущем параграфе.

Введем новые переменные x_1, y_1 и z_1 по формулам

$$x_1 = x_0, \qquad y_1 = y_0\,\mu, \qquad z_1 = z_0\,\mu \tag{5.5}$$

В таком случае для определения функции $\Phi^*(x_1, y_1, z) = \Phi_0(x_0, y_0, z_0)$ имеем граничные условия [3, 4] на крыле при $z_1 = 0$:

$$\frac{\partial\Phi^*}{\partial z_1} = \frac{u}{\mu} e^{-i\beta x_1} \left\{ \left(\frac{\partial\zeta_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} + i\frac{\partial\zeta_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} \right) - i\frac{\omega}{u}\Big(\zeta_1(x_1, y_1) + i\zeta_2(x_1, y_1)\Big) \right\} \tag{5.6}$$

вне крыла перед передней кромкой $\Phi^* = 0$.

Кроме того, $\Phi^*(x_1, y_1, z_1) = \Phi^*(x_1, y_1, -z_1)$; при этом функция $\Phi^*(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяет уравнению (см. работу Е. А. Красильщиковой [4])

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1^2} - \lambda^2\Phi^* = 0 \tag{5.7}$$

Здесь

$$\beta = \frac{u\,\omega}{u^2 - a^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{a^2\omega^2}{(u^2 - a^2)^2} \tag{5.8}$$

Введем переменные x, y и z по формулам

$$x = \lambda x_1, \qquad y = \lambda y_1 \qquad z = \lambda z_1 \tag{5.9}$$

Функция $\Phi(x, y, z) = \Phi^*(x_1, y_1, z_1)$ будет удовлетворять граничным условиям на крыле при $z = 0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\lambda u}{\mu} e^{-i\beta x_1} \left[\frac{\partial\zeta_1(x_1, y_1)}{\partial x_1} + i\frac{\partial\zeta_2(x_1, y_1)}{\partial x_1} - i\frac{\omega}{u}\Big(\zeta_1(x_1, y_1) + i\zeta_2(x_1, y_1)\Big) \right] \tag{5.10}$$

вне крыла, перед передней кромкой $\Phi = 0$.

Уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi(x, y, z)$, будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \Phi = 0 \tag{5.11}$$

Мы будем здесь рассматривать крыло прямоугольной формы в плане, изогнутое в направлении потока, т. е. в направлении оси x.

Функция $\Phi(x, y, z)$ непрерывна во всем пространстве. Что касается функции $\partial\Phi / \partial z$, то она может иметь разрыв на поверхности конуса Маха.

Введем функцию $\Psi(x, y, z)$, удовлетворяющую (5.11), определенную так

$$\Psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(\xi, y, z)\, d\xi \tag{5.12}$$

В таком случае $\partial\Psi / \partial z$ будет непрерывна во всем пространстве, в том числе и на конусе Маха.

Для определения $\Psi(x, y, z)$ имеем граничные условия при $z=0$:

на $OBDE$, причем $0 < x < l_1 = \lambda l$,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \lambda \int_0^{x/\lambda} \frac{u}{\mu} e^{-\beta\xi_1} \left[\frac{\partial\zeta_1(\xi_1)}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial\zeta_2(\xi_1)}{\partial\xi_1} - i\frac{\omega}{u}\Big(\zeta_1(\xi_1) + i\zeta_2(\xi_1)\Big)\right] d\xi_1 \tag{5.13}$$

на OAB

$$\Psi = 0$$

Функция, входящая в граничное условие, может быть разложена в интервале $0 < x < l_1$ в ряд, содержащий только синусы (5.14)

$$\lambda \int_0^{x/\lambda} \frac{u}{\mu} e^{-\beta\xi_1} \left[\frac{\partial\zeta_1(\xi_1)}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial\zeta_2(\xi_1)}{\partial\xi_1} - i\frac{\omega}{u}\big(\zeta_1(\xi_1) + i\,\zeta_2(\xi_1)\big)\right] d\xi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{\lambda l}$$

Здесь a_n — некоторые, вообще говоря, комплексные коэффициенты.

В таком случае на основании (5.14) граничные условия для определения функции $\Psi(x, y, z)$ могут быть записаны следующим образом при $z=0$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l\lambda} \quad \text{на } OBDE, \qquad \Psi = 0 \quad \text{на } OAB \tag{5.15}$$

§ 6. Представление функции, удовлетворяющей уравнению затухающих волн, через функцию, удовлетворяющую волновому уравнению. Будем называть уравнение (5.11), как это иногда принято, уравнением затухающих волн. Покажем, что функцию $\Psi(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \Psi = 0 \tag{6.1}$$

можно выразить через функцию $\Psi^*(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0 \tag{6.2}$$

Пусть функция $\Psi(x, y, z)$ в части пространства между плоскостями $x=0$ и $x=l_1$ может быть разложена в ряд

$$\Psi^*(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \Xi_n(y, z) \sin a_n x \tag{6.3}$$

Для того чтобы полученная функция удовлетворяла уравнению (6.2), нужно, чтобы каждая из функций $\Xi_n(y, z)$ удовлетворяла уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_n^2\right)\Xi_n(y, z) = 0 \tag{6.4}$$

Тогда легко показать, что уравнению (6.1) удовлетворяет функция

$$\Psi(x, y, z) = \sum A_n'\, \Xi_n(y, z) \sin\left(x\sqrt{a_n^2+1}\right) \tag{6.5}$$

Функцию $\Psi(x, y, z)$ можно построить, если воспользоваться тождеством [5]

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} \sin x\left(\sqrt{\beta^2+1}\right) = \sin\beta x - \int_0^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\right) \sin\beta\xi \, d\xi \qquad (6.6)$$

На основании (6.6) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin a_n x\, \Xi_n(y,z) - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi} J_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin a_n x\, \Xi(y,z)\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n A_n}{\sqrt{a_n^2+1}} \sin\left(x\sqrt{a_n^2+1}\right) \Xi_n(y, z) \qquad (6.7)$$

Правая часть этого равенства имеет форму, аналогичную (6.5), и поэтому удовлетворяет уравнению (6.1). Окончательно получаем представление

$$\Psi(x, y, z) = \Psi^*(x, y, z) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\right) \Psi^*(\xi, y, z)\, d\xi \qquad (6.8)$$

Аналогичные выражения иным путем получены Л. Магнарадзе [6].

§ 7. Колеблющееся крыло прямоугольной формы в плане. Ищем функцию $\Psi(x, y, z)$ в виде (6.8). При этом для того, чтобы удовлетворить условиям на OAB, будем полагать $\Psi^*(x, y, z) = 0$ на OAB. Используя условие (5.15) для $[\partial\Psi^*/\partial z]_{z=0}$, получим интегральное уравнение

$$\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial z}\right]_{z=0} - \int_0^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0\left(\sqrt{x^2-\xi^2}\right)\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial z}\right]_{z=0} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\lambda l} \qquad (7.1)$$

Пользуясь (6.6), легко построить $[\partial\Psi^*/\partial z]_{z=0}$ на $OBDE$. Будем иметь

$$\left[\frac{\partial\Psi^*}{\partial z}\right]_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{\lambda l} \frac{1}{\nu_n} \sin\nu_n x \qquad \left(\nu_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\lambda l}\right)^2 - 1}\right) \qquad (7.2)$$

Функцию Ψ^*, удовлетворяющую волновому уравнению, можно построить при $z = 0$ по ее производной $\partial\Psi^*/\partial z$ на $OBDE$ по формуле (3.7):

$$\Psi^*(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n \frac{n\pi}{\lambda l} \frac{1}{\nu_n} \sin\left[\nu_n(x-\xi)\right] \frac{\partial\varphi_0(\varsigma, y, 0)}{\partial\xi} d\xi \qquad (7.3)$$

Здесь

$$\left[\frac{\partial\varphi_0(\xi, y, z)}{\partial\xi}\right]_{z=0} = \begin{cases} \pi^{-1}\arccos(1-2y/x) & \text{для } \xi > y \\ 1 & \text{для } \xi < y \end{cases} \qquad (7.4)$$

На основании (6.8) и (7.3) определяется функция $\Psi(x, y, z)$, а через эту функцию согласно (5.3) и (5.12) находится составляющая потенциала скоростей $\varphi^0(x, y, z, t)$, обусловленная колебаниями крыла. Эта составляющая

$$\varphi^{(0)}(x_0, y_0, z_0, t), = \mathrm{Re}\left\{\Phi_0(x_0, y_0, z_0)\, e^{-i\omega t + i\beta x_0}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\Phi(x, y, z)\, e^{-i\omega t + i\beta x/\lambda}\right\}$$

Функция $\Phi(x, y, z)$ определяется согласно (5.12):

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Psi(x, y, z)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\lambda l} \frac{1}{\nu_n} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^x \sin\left[\nu_n(x-\xi)\right] \frac{\partial\varphi_0(\xi, y, 0)}{\partial\xi} d\xi - \right.$$

$$-\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\partial}{\partial\xi} J_0(\sqrt{x^2-\xi^2}) \int_0^\xi \sin\left[\nu_n(\xi-\xi_1)\right]\frac{\partial\varphi_0(\xi_1, y_1, 0)}{\partial\xi_1}\,d\xi\,d\xi_1\Big\} \tag{7.5}$$

Давление, действующее на крыло, определяется следующим образом [3,7].

$$p(x, y) = \mathrm{Re}\left\{-\rho u\left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0} + i\frac{\omega a^2}{u(u^2-a^2)}\Phi_0\right]e^{-i\omega t+i\beta x}\right\} \tag{7.6}$$

Обозначим размер крыла в направлении оси x через h, а размер крыла в направлении оси y через l. В таком случае подъемная сила крыла

$$P = \int_0^l \int_0^h p(x_0, y_0)\,dx_0\,dy_0 \qquad \text{или} \qquad P = \int_0^{\lambda\mu}\left\{\int_0^{\lambda h} p(x, y)\,dx\right\}dy \tag{7.7}$$

Если $p(x, y)$ выразить через $\Phi_0(x_0, y_0, z_0)$ и в формуле (7.7) произвести интегрирование по y, то окончательное выражение для подъемной силы значительно упростится, так как результат интегрирования по y выражения $[\partial\varphi_0/\partial\xi]_{z=0}$, входящего в $\Phi_0(x_0, y_0, z_0)$, является весьма простым (3.9).

Поступила в редакцию
30 III 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

L. A. GALIN.—A WING RECTANGULAR IN PLANE IN A SUPERSONIC FLOW

Part one takes up the problem of flow past an immovable wing; part two concerns a wing oscillating harmonically. For the case of the immovable wing, the velocity potential satisfies equation (1.7) and boundary conditions (1.8). If the wing is bent in the direction of the flow, the equation for the boundary conditions has the form (3.1). In this case, the velocity potential is determined by formulae (3.2), (3.3) and (3.7); lift force and moment with respect to the forward edge are given respectively by formulae (3.10) and (3.11). In case of a twisted wing, the equation for whose surface is given by $z = Ay$, the velocity potential is determined by (4.3), (4.4) and (4.5).

When the wing oscillates harmonically, the component velocity potential corresponding to the oscillatory motion is a function $\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x_0, y_0, z_0)$ (5.4), satisfying the boundary conditions (5.10) and equation (5.11). Through (5.12) $\Psi(x, y, z)$ is introduced, satisfying equation (5.11) and boundary conditions (5.13). Expression (6.8) is then found, giving the function satisfying equation (6.1) by means of the function of which equation (6.2) is satisfied. For the problem of oscillation of a wing rectangular in plane and bent in the direction of the flow the lift force component arising from wing oscillations is given by expressions (7.6) and (7.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 3.
2. Busemann A. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung. 1943. H. 3.
3. Кочин Н. Е. ПММ. 1942. Т. VI.
4. Красильщикова Е. А. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 1.
5. Эфрос А. А. и Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. 1936.
6. Магнарадзе Л. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. 1944. Т. V. № 3.
7. Паничкин И. А. ПММ. Т. 1947. Т. XI. Вып. 1