Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. Уравнение движения регулируемого объекта берется в форме

$$\ddot{\zeta}+2n\dot{\zeta}+\zeta=\mu \tag{1.1}$$

где ζ — регулируемый параметр, μ — параметр, характеризующий положение регулирующего органа. Имеются измерители величины регулирующего параметра ζ и скорости изменения ее $\dot{\zeta}$; показания измерителей суммируются и передаются пусковому устройству, положение которого характеризуется параметром:

$$\sigma=\zeta+\lambda\dot{\zeta} \tag{1.2}$$

Пусковое устройство включает регулирующий орган; схема включения такова, что при различных знаках величин σ и $\dot{\sigma}$ регулирующий орган не работает; если знаки σ и $\dot{\sigma}$ одинаковы и, например, положительны, то регулирующий орган работает с полной производительностью в одну сторону; если же эти знаки отрицательны, то регулирующий орган работает также с полной производительностью, но в другую сторону; уравнение движения регулирующего органа может поэтому быть представлено в форме

$$\dot{\mu}=-\tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}\sigma+\operatorname{sgn}\dot{\sigma}) \tag{1.3}$$

где символом $\operatorname{sgn} x$ обозначена функция от x, равная 1 при $x>0$, -1 при $x<0$ и нулю при $x=0$.

Система уравнений (1.1)—(1.3) преобразуется к канонической форме, указанной в нашей работе [1]; вводятся переменные

$$x_1=\zeta+\rho_1\dot{\zeta}-\mu, \qquad x_2=\zeta+\rho_2\dot{\zeta}-\mu, \qquad x_3=-\mu \tag{1.4}$$

причем через ρ_1 и ρ_2 обозначены корни уравнения

$$\rho^2-2n\rho+1=0 \tag{1.5}$$

При $n>1$ эти корни вещественны и положительны; при $n<1$ они будут мнимые и сопряженные с положительной вещественной частью (полагаем, что $n>0$); в этом случае x_1 и x_2 суть комплексные сопряженные величины.

[1] В ранее опубликованной работе (1) был дан метод построения функции Ляпунова, разрешающей вопрос об устойчивости движения некоторого класса регулируемых систем. Настоящая заметка, дающая еще один пример применения этого метода, представляет естественное продолжение указанной работы. (Доложено в семинарии Института механики Академии Наук СССР 31 мая 1947 г.).

Из (1.4) находим

$$\dot{\zeta} = \frac{x_1 - x_2}{\rho_1 - \rho_2}, \qquad \zeta = \frac{\rho_2 x_1 - \rho_1 x_2}{\rho_1 - \rho_2} - x_3, \qquad \mu = -x_3 \tag{1.6}$$

и по (1.2)

$$\sigma = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} [\lambda (x_1 - x_2) - \rho_2 (x_1 - x_3) + \rho_1 (x_2 - x_3)] \tag{1.7}$$

Дифференциальные уравнения движения в переменных x_1, x_2, σ будут

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho_1 x_1 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}\sigma + \operatorname{sgn}\dot{\sigma}) \\ \dot{x}_2 &= -\rho_2 x_2 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}\sigma + \operatorname{sgn}\dot{\sigma}) \end{aligned} \qquad \dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \tag{1.8}$$

где введены обозначения

$$\beta_1 = \frac{1 - \lambda\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}, \qquad \beta_2 = \frac{1 - \lambda\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \tag{1.9}$$

2. Обратимся к исследованию устойчивости движения, определяемого системой дифференциальных уравнений (1.8). Для этого при вещественных ρ_1, ρ_2 введем в рассмотрение функцию

$$V = \frac{1}{2} A (x_1^2 + x_2^3) + \frac{a_1^2}{2\rho_1} x_1^2 + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} x_1 x_2 + \frac{a_2^2}{2\rho_2} x_2^2 + |\sigma| \tag{2.1}$$

а при ρ_1, ρ_2 — комплексных и сопряженных функцию

$$V = A x_1 x_2 + \frac{a_1^2}{2\rho_1} x_1^2 + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} x_1 x_2 + \frac{a_2^2}{2\rho_2} x_2^2 + |\sigma| \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) величина A — положительная постоянная; a_1, a_2 в (2.1) — произвольные вещественные числа, а в (2.2) — комплексные сопряженные. В том и другом случае, как показано в [1], квадратичная форма

$$\frac{a_1^2}{2\rho_1} x_1^2 + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} x_1 x_2 + \frac{a_2^2}{2\rho_2} x_2^2$$

при $\rho_1 \neq \rho_2$ будет знакоопределенной положительной функцией переменных x_1, x_2; поэтому V будет знакоопределенной функцией переменных x_1, x_2, σ. Составим ее производную по времени в силу уравнений движения (1.8). Получаем для случая (2.1)

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \tag{2.3}$$

$$= -A(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) \operatorname{sgn}\sigma +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}\sigma + \operatorname{sgn}\dot{\sigma}) \left[x_1 \left(A + \frac{a_1^2}{\rho_1} + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) + x_2 \left(A + \frac{a_2^2}{\rho_2} + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \right]$$

В случае (2.2) вместо первого слагаемого имели бы $-A(\rho_1 + \rho_2) x_1 x_2$ и остальные слагаемые сохранили бы свой вид. Подчиним теперь выбор постоянных a_1, a_2, A условиям

$$\frac{a_1^2}{\rho_1} + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} + A + \beta_1 = 0, \qquad \frac{a_2^2}{\rho_2} + \frac{2a_1 a_2}{\rho_1 + \rho_2} + A + \beta_2 = 0 \tag{2.4}$$

Тогда выражению (2.3) можно будет придать форму

$$\dot{V} = -[A(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}\dot{\sigma} - \operatorname{sgn}\sigma)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)] \tag{2.5}$$

с соответствующим видоизменением первого слагаемого в случае комплексных ρ_1, ρ_2. Поэтому в том случае, когда σ и $\dot\sigma$ имеют одинаковые знаки:

$$\dot V = -[A(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2] \tag{2.6}$$

Если же знаки σ и $\dot\sigma$ различны, то, имея в виду последнее уравнение (1.8), получим

$$\dot V = -[A(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 + |\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2|] \tag{2.7}$$

Остается рассмотреть случай $\sigma = 0$ и случай $\dot\sigma = 0$; в первом случае

$$\dot V = -[A(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2) + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 + \tfrac{1}{2}|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2|] \tag{2.9}$$

и во втором вследствие последнего уравнения (1.8) снова получаем (2.6).

Итак, допустив, что система двух квадратных уравнений (2.4) при положительном A имеет вещественные решения относительно a_1, a_2 при вещественных ρ_1 и ρ_2 или комплексные и сопряженные решения относительно тех же неизвестных a_1, a_2 при комплексных, сопряженных ρ_1 и ρ_2, мы построили знакоопределенную положительную функцию V аргументов x_1, x_2, σ, производная которой $\dot V$, составленная в силу дифференциальных уравнений движения, оказалась знакопостоянной отрицательной. При этом допущении рассматриваемое движение устойчиво относительно переменных x_1, x_2, σ, а значит и относительно исходных величин ζ, $\dot\zeta$, μ.

3. Систему квадратных уравнений (2.4) можно переписать в виде

$$\left(\frac{a_1}{\rho_1} + \frac{a_2}{\rho_2}\right)^2 + A\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2} = -\left(\frac{\beta_1}{\rho_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2}\right), \quad \rho_1\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^2 - \rho_2\left(\frac{a_2}{\rho_2}\right)^2 = -\beta_1 + \beta_2 \tag{3.1}$$

Воспользовавшись (1.5) и (1.9), получим

$$\left(\frac{a_1}{\rho_1} + \frac{a_2}{\rho_2}\right)^2 = 1 - 2nA, \qquad \rho_1\left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^2 - \rho_2\left(\frac{a_2}{\rho_2}\right)^2 = \frac{2(\lambda n - 1)}{\rho_1 - \rho_2} \tag{3.2}$$

В случае вещественных ρ_1 и ρ_2 положим

$$\frac{a_1}{\rho_1} = x + y, \qquad \frac{a_2}{\rho_2} = x - y \tag{3.3}$$

а в случае комплексных, сопряженных ρ_1 и ρ_2:

$$\frac{a_1}{\rho_1} = x - iy, \qquad \frac{a_2}{\rho_2} = x + iy \tag{3.4}$$

В первом случае система уравнений (3.2) приводится к виду

$$x^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}nA, \qquad (nx + \sqrt{n^2-1}\,y)^2 = \tfrac{1}{2}(\lambda n - 1) + x^2 \tag{3.5}$$

во втором случае $\sqrt{n^2-1}$ заменится на $\sqrt{1-n^2}$. Итак, получаем

$$(nx + \sqrt{|n^2-1|}\,y)^2 = \tfrac{1}{2}\lambda n - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}nA$$

и, следовательно, x и y будут вещественны при условии

$$\lambda n > \tfrac{1}{2} \tag{3.6}$$

Итак, при этом условии, накладываемом на параметры λ, n, входящие в систему дифференциальных уравнений (1.1) — (1.3), движение этой системы будет устойчивым при любых начальных отклонениях ζ_0, $\dot\zeta_0$, μ_0.

4. Остается рассмотреть вопрос, будет ли рассматриваемое движение также асимптотически устойчивым. При x_1 и x_2, не обращающихся одновременно в нуль, $\dot{V} < 0$ и замкнутые поверхности $V = \text{const}$ пересекаются интегральной кривой $\{x_1(t), x_2(t), \sigma(t)\}$ извне внутрь. Рассмотрим, однако, интегральную кривую, которая соответствует начальным условиям

$$\zeta(t_0) = \zeta_0, \qquad \dot{\zeta}(t_0) = 0, \qquad \mu(t_0) = \zeta_0 \tag{4.1}$$

По (1.4), (1.7) получим

$$x_1(t_0) = 0, \qquad x_2(t_0) = 0, \qquad \sigma(t_0) = \zeta_0 \tag{4.2}$$

и пусть, например, $\zeta_0 > 0$. Получаем при $t = t_0$

$$\operatorname{sgn}\sigma = 1, \qquad \operatorname{sgn}\dot{\sigma} = 0 \tag{4.3}$$

и при значениях t, мало отличающихся от t_0, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -\rho_1 x_1 + \frac{1}{3}, \qquad \dot{x}_2 = -\rho_2 x_2 + \frac{1}{2}$$

решение которой, соответствующее начальным условиям (4.2), будет

$$x_1 = \frac{1}{2\rho_1}\left[1 - e^{-\rho_1(t-t_0)}\right] \approx \frac{1}{2}(t - t_0), \qquad x_2 = \frac{1}{2\rho_2}\left[1 - e^{-\rho_2(t-t_0)}\right] \approx \frac{1}{2}(t - t_0)$$

Поэтому последнее уравнение (1.8) будет

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}(t - t_0)(\beta_1 + \beta_2) = -\frac{1}{2}\lambda(t - t_0)$$

т. е. $\dot{\sigma}$ сразу же примет отрицательное значение; при $t > t_0$ получим

$$\operatorname{sgn}\sigma + \operatorname{sgn}\dot{\sigma} = 0$$

и значит x_1 и x_2 останутся равными нулю. Поскольку ζ_0 можно взять произвольным, следует сказать, что в пространстве переменных x_1, x_2, σ ось σ является осью равновесных состояний (покоя). Регулируемый параметр при отсутствии начальной скорости ($\dot{\zeta} = 0$) будет сохранять неизменное значение. В этом смысле здесь асимптотической устойчивости нет. Устойчивость (неасимптотическая) имеется при условии (3.6).

Поступила в редакцию
7 VI 1947

Институт механики Академии Наук СССР
Ленинградский политехнический институт

A. I. LOURYE.—INVESTIGATION OF THE STABILITY OF MOTION OF A DYNAMIC SYSTEM

The motion of the dynamic system is described by differential equations (1.1)—(1.3). In terms of the canonic variables x_1, x_2, σ suggested by the author in an earlier work [1], the positive function $V > 0$ is set up through (2.1) or (2.2). The derivative of this function, yielded by the equation of motion is negative $V < 0$, if condition (3.6) is observed. The motion is stable, but not asymptotically stable, as any state $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\sigma \neq 0$ may, in a certain sence, be considered as a state of rest.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1943. Т. IX. Стр. 353.