Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С. Г. Михлин

(Ленинград)

Целью настоящей статьи является построение сингулярных векторов смещений, обобщающих на случай неоднородной упругой среды известные сингулярные векторы Вольтерра [1]. Мы устанавливаем далее простейшие свойства построенных векторов, которые мы называем фундаментальными решениями уравнений теории упругости для неоднородных сред. С помощью этих решений получаем формулу, обобщающую известную формулу Стокса на случай неоднородной среды. Если даны начальные смещения и скорости точек безграничной среды, то эта формула дает интегро-дифференциальное уравнение для смещений.

§ 1. Основные уравнения. Коноиды характеристик. Как обычно, будем обозначать через $\mathbf{X}(X, Y, Z)$ вектор объемных сил, действующих на упругую среду, через $\mathbf{u}(u, v, w)$ вектор упругих смещений и через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ составляющие упругих напряжений. Эти величины удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

и уравнениям закона Гука

$$\sigma_x = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем стоящие в скобках рядом с уравнениями буквы x, y, z и u, v, w указывают, что два других уравнения получаются одновременно циклической перестановкой этих букв. Далее, ρ — плотность среды, а λ и μ — коэффициенты Ляме. Мы будем считать среду неоднородной, так что величины ρ, λ и μ будут функциями координат (но не времени). Мы примем, что эти функции непрерывны и имеют достаточное число непрерывных производных.

Исключая напряжения из уравнений (1.1) и (1.2), мы получим уравнения теории упругости в смещениях. Эти уравнения после простых преобра-

---

[1] См., например, работу Е. Нарышкиной [1] или [2].

зований можно представить в виде одного векторного уравнения

$$\operatorname{grad}[(\lambda+2\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}]-\operatorname{rot}[\mu\operatorname{rot}\mathbf{u}]+\mathbf{H}(\mathbf{u})+\mathbf{X}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

Дифференциальный оператор первого порядка $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ определяется формулой

$$\mathbf{H}(\mathbf{u})=-2\operatorname{div}\mathbf{u}\operatorname{grad}\mu+2\operatorname{grad}\mu\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \tag{1.4}$$

где для краткости через $d\mathbf{u}/d\mathbf{r}$ обозначен тензор

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}=\begin{vmatrix}\partial u/\partial x & \partial v/\partial x & \partial w/\partial x\\ \partial u/\partial y & \partial v/\partial y & \partial w/\partial y\\ \partial u/\partial z & \partial v/\partial z & \partial w/\partial z\end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Дифференциальные уравнения характеристических поверхностей имеют тот же вид, что и в случае однородной среды: если $\Phi=\mathrm{const}$ уравнений такой поверхности, то

$$|\operatorname{grad}\Phi|^2=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{grad}|\Phi|^2=\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2 \tag{1.6}$$

где

$$a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \qquad b^2=\frac{\mu}{\rho} \tag{1.7}$$

Величины a и b мы будем, как обычно, называть соответственно скоростями продольной и поперечной волн.

Уравнения (1.6) совершенно аналогичны, и нам достаточно рассмотреть одно из них, например первое. Это уравнение не меняется при замене t на $t-t_0$, где $t_0=\mathrm{const}$. Отсюда нетрудно усмотреть, что уравнению характеристической поверхности можно придать вид

$$t=t_0-\tau_a(x, y, z) \tag{1.8}$$

Функцию τ_a мы будем считать далее неотрицательной, так что $t\leqslant t_0$. В рассматриваемом уравнении (1.6) можно положить теперь

$$\Phi=t+\tau_a(x, y, z)$$

Это приводит нас к уравнению, которому удовлетворяет функция $\tau_a(x, y, z)$, а именно

$$|\operatorname{grad}\tau_a|^2=\frac{1}{a^2} \tag{1.9}$$

Это уравнение хорошо изучено; мы приведем здесь без доказательства основные результаты. Подробное изложение относящихся сюда вопросов можно найти у С. Л. Соболева [3].

a) Рассмотрим задачу о минимуме интеграла

$$\int\limits_{MM_0}\frac{ds}{a} \tag{1.10}$$

где $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$—две точки пространства, MM_0—соединяющая их кривая и ds—элемент дуги этой кривой. Пусть MM_0 будет экстремаль интеграла (1.10). Тогда величина этого интеграла, которую мы обозначим через $\tau_a(M, M_0)$, удовлетворяет уравнению (1.9).

b) функция $\tau_a(M, M_0)$ симметрична, так что

$$\tau_a(M, M_0) = \tau_a(M_0, M) \tag{1.11}$$

c) Обозначим через r расстояние между точками M и M_0. Тогда

$$\tau_a(M, M_0) = r\,\Phi(M, M_0) \qquad \left(\Phi(M_0, M_0) = \frac{1}{a(M_0)}\right) \tag{1.12}$$

где Φ — достаточно гладкая функция.

d) Из (1.12) следует, что при $r \to 0$

$$\tau_a(M_0, M_0) = \frac{r}{a(M_0)} + O(r^2) \tag{1.13}$$

$$\operatorname{grad} \tau_a(M_0, M_0) = \frac{1}{a(M_0)} \operatorname{grad} r + O(r) \tag{1.14}$$

$$\Delta \tau_a(M, M_0) = \frac{2}{a(M_0)\,r} + O(1)$$

e) Уравнение (1.15)

$$t = t_0 - \tau_a(M, M_0) \tag{1.16}$$

определяет в четырехмерном пространстве $xyzt$ характеристическую поверхность уравнений теории упругости. Эта поверхность имеет коническую точку (x_0, y_0, z_0, t_0). Мы будем называть поверхность (1.16) коноидом продольных волн. Аналогично мы будем называть коноидом поперечных волн поверхность $t = t_0 - \tau_b(M, M_0)$.

§ 2. Продольное фундаментальное решение. В цитированном мемуаре [3] С. Л. Соболев ввел функцию двух точек $\sigma_a(M, M_0)$, обладающую следующими свойствами:

a) Во всей рассматриваемой области пространства xyz, за исключением точки M_0, функция σ_a непрерывна и достаточное число раз дифференцируема.

b) Произведение $\sigma_a(M, M_0)\,\tau_a(M, M_0)$ везде непрерывно и достаточное число раз дифференцируемо, причем

$$\lim_{r\to 0} \sigma_a(M, M_0)\,\tau_a(M, M_0) = \frac{1}{a(M_0)} \tag{2.1}$$

c) Функция σ_a удовлетворяет уравнению

$$2 \operatorname{grad} \sigma_a \cdot \operatorname{grad} \tau_a + \sigma_a \Delta \tau_a = 0 \tag{2.2}$$

d) Функция σ_a симметрична, так что

$$\sigma_a(M, M_0) = \sigma_a(M_0, M) \tag{2.3}$$

e) Имеет место оценка

$$\Delta \sigma_a = O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.4}$$

Свойства «a», «b» и «e» легко вытекают из установленной в работе [3] формулы

$$\sigma_a(M, M_0) = \frac{1}{r}\left[1 + r^2 \varphi(M, M_0)\right] \tag{2.5}$$

где $\varphi(M, M_0)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов.

Введем в рассмотрение вектор, определяемый внутри коноида продольных волн формулой

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = [(t_0 - t)^2 - \tau_a(M, M_0)] \operatorname{grad} \sigma_a(M, M_0) \tag{2.6}$$

Этот вектор, очевидно, равен нулю на поверхности коноида продольных волн и равен бесконечности на его оси.

Будем рассматривать $\mathbf{u}_1^{(0)}$ как вектор упругих смещений и оценим соответствующий ему вектор объемных сил $\mathbf{X}_1^{(0)}$. Докажем, что

$$\mathbf{X}_1^{(0)} = (t_0 - t)^2 \, O\left(\frac{1}{r^3}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.7}$$

Из уравнения (1.3) следует

$$\mathbf{X}_1 = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left[(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}_1^{(0)}\right] + \operatorname{rot} \left[\mu \operatorname{rot} \mathbf{u}_1^{(0)}\right] - \mathbf{H}\left(\mathbf{u}_1^{(0)}\right) \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.8) выражение для вектора $\mathbf{u}_1^{(0)}$, легко убедимся, что слагаемое, зависящее от времени, имеет вид $(t_0 - t)^2 \mathbf{S}_1(M, M_0)$, где $\mathbf{S}_1(M, M_0) = O(r^{-3})$ и не зависит от времени. Остается изучить члены, не содержащие времени. Каждое слагаемое в (2.8) рассмотрим отдельно. Имеем

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 2\rho \operatorname{grad} \sigma_a \tag{2.9}$$

Далее

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1^{(0)} = \left[(t_0 - t)^2 - \tau_a^2\right] \triangle \sigma_a - 2\tau_a \operatorname{grad} \tau_a \cdot \operatorname{grad} \sigma_a$$

Слагаемое, не зависящее от времени, в $\operatorname{div} \mathbf{u}_1^{(0)}$ равно

$$A = -\tau_a (\tau_a \triangle \sigma_a + 2 \operatorname{grad} \tau_a \cdot \operatorname{grad} \sigma_a) = \tau_a \left[\sigma_a \triangle \tau_a - \triangle (\sigma_a \tau_a)\right]$$

Последнее вытекает из соотношения

$$\triangle (\sigma_a \tau_a) = \sigma_a \triangle \tau_a + \tau_a \triangle \sigma_a + 2 \operatorname{grad} \tau_a \cdot \operatorname{grad} \sigma_a$$

Но функция $\sigma_a \tau_a$ — достаточно гладкая, и второе слагаемое в A имеет оценку $O(r)$; первое же слагаемое, как это следует из (1.15) и из (2.5), равно

$$\frac{2\sigma_a}{a^2(M_0)} + O(1) = \frac{2\rho\sigma_a}{\lambda + 2\mu} + O(1) \tag{2.10}$$

Таким образом,

$$A = \frac{2\rho\sigma_a}{\lambda + 2\mu} + O(1) \tag{2.11}$$

Умножив это на $\lambda + 2\mu$ и взяв grad полученного выражения, найдем, что второе слагаемое (2.8) дает не зависящий от времени член вида

$$-2\rho \operatorname{grad} \sigma_a + O(r^{-1}) \tag{2.12}$$

Из (2.9) и (2.12) следует, что первые два слагаемые в (2.9) дают независящий от времени член с оценкой $O(r^{-1})$.

Рассмотрим третье слагаемое в (2.8). Имеем

$$\operatorname{rot} \left[\mu \operatorname{rot} \mathbf{u}_1^{(0)}\right] = \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}_1^{(0)} + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} u_1^{(0)} \tag{2.13}$$

Прежде всего заметим, что $\operatorname{rot} \mathbf{u}_1^{(0)} = O(r^{-1})$. Чтобы убедиться в этом, вычислим, например,

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{u}_1^{(0)} = \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial z} = -2\tau_a \left(\frac{\partial \tau_a}{\partial y} \frac{\partial \sigma_a}{\partial z} - \frac{\partial \tau_a}{\partial z} \frac{\partial \sigma_a}{\partial y}\right) = O(r^{-1})$$

Таким образом, второе слагаемое в (2.13) имеет оценку $O(r^{-1})$. Далее, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}_1^{(0)} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_1^{(0)} - \triangle\,\mathbf{u}_1^{(0)}$, и нетрудно видеть, что не зависящий от времени член в $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_1^{(0)}$ равен

$$\frac{2}{a^2(M_0)}\operatorname{grad}\sigma_a + O(r^{-1}) \tag{2.14}$$

Остается рассмотреть $\triangle\,\mathbf{u}_1^{(0)}$. Имеем

$$\triangle\,u_1^{(0)} = (t_0 - t)^2 \triangle \frac{\partial\sigma_a}{\partial x} - \triangle\left(\tau_a^2 \frac{\partial\sigma_a}{\partial x}\right)$$

Выделяем член, не зависящий от времени:

$$-\triangle\left(\tau_a^2\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}\right) = -\left\{\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}\triangle(\tau_a^2) + \tau_a^2\triangle\frac{\partial\sigma_a}{\partial x} + 2\operatorname{grad}(\tau_a^2)\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}\right\}$$

Используя указанные выше оценки для σ_a и τ_a, легко найти, что

$$\begin{aligned} -\triangle\left(\tau_a^2\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}\right) &= \frac{2}{a^2(M_0)}\frac{\partial\sigma_a}{\partial x} + O(r^{-1}) \\ -\triangle(\tau_a^2\operatorname{grad}\sigma_a) &= \frac{2}{a^2(M_0)}\operatorname{grad}\sigma_a + O(r^{-1}) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) следует, что третье слагаемое в (2.8) имеет оценку $O(r^{-1})$. Четвертое слагаемое в (2.8) имеет вид (2.7). Это получается непосредственным дифференцированием. Оценка (2.7) доказана.

Введем еще один вектор смещений, определяемый внутри коноида продольных волн формулой

$$\mathbf{u}_1^{(1)} = [(t_0 - t)^2 - \tau_a^2]\,\mathbf{s}_1(M_1, M_0) \tag{2.16}$$

где вектор $\mathbf{s}_1$ определяется так, что $\mathbf{s}_1 = O(r^{-1})$.

Зависящий от времени член в векторе объемных сил, соответствующих смещению $\mathbf{u}_1^{(1)}$, совпадает с $(t_0 - t)^2\,\mathbf{S}_1$. Очевидно, что для этого вектор $\mathbf{s}_1$ должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{grad}[(\lambda + 2\mu)\operatorname{div}\mathbf{s}_1] - \operatorname{rot}[\mu\operatorname{rot}\mathbf{s}_1] + H(\mathbf{s}_1) - \rho\mathbf{s}_1 + \mathbf{S}_1 = 0 \tag{2.17}$$

и что слагаемое, не зависящее от времени, в указанном векторе объемных сил имеет оценку $O(r^{-1})$.

Продольным фундаментальным решением динамических уравнений теории упругости условимся называть вектор

$$u_1 = u_1^{(0)} - u_1^{(1)} = [(t_0 - t)^2 - \tau_a^2](\operatorname{grad}\sigma_a - \mathbf{s}_1) \tag{2.18}$$

Продольное фундаментальное решение обращается в нуль на поверхности коноида продольных волн и в бесконечность на его оси: при r, близком к нулю, оно отличается от продольного фундаментального решения Вольтерра

$$\left[(t_0 - t)^2 - \frac{r^2}{a^2}\right]\operatorname{grad}(r^{-1})$$

на величину порядка $O(r^{-1})$. Соответствующий ему вектор объемных сил, который обозначим через $\mathbf{X}_1$, не зависит от времени и имеет оценку $O(r^{-1})$.

Обозначим через $\sigma_x^1, \ldots, \tau_{xy}^1, \ldots, \tau_{yz}^1$ составляющие напряжений, отвечающие вектору смещений $\mathbf{u}_1$. Докажем, что поверхности коноида продольных волн остаются ограниченными величины

$$D_x = \sigma_x^1 \cos(\nu^* x) + \tau_{xy}^1 \cos(\nu^* y) + \tau_{xz}^1 \cos(\nu^* z) - \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \cos(\nu^* t) \qquad \begin{pmatrix} x\ y\ z \\ u\ v\ w \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

где ν^* — внешняя нормаль к коноиду.

Внутренность коноида определяется неравенством $t + \tau_a - t_0 < 0$. Отсюда следует, что направляющие косинусы нормали ν^* суть

$$\cos(\nu^* x) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \tau_a}{\partial x}, \qquad \cos(\nu^* y) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \tau_a}{\partial y}, \qquad \cos(\nu^* z) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \tau_a}{\partial z}, \qquad \cos(\nu^* t) = \frac{1}{\Delta}$$

где

$$\Delta = \left[\left(\frac{\partial \tau_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau_a}{\partial z}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Докажем ограниченность величины

$$d_x = \sigma_x^1 \frac{\partial \tau_a}{\partial x} + \tau_{xy}^1 \frac{\partial \tau_a}{\partial y} + \tau_{xz}^1 \frac{\partial \tau_a}{\partial z} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} \tag{2.20}$$

и двух, ей аналогичных. Заметим, что при вычислении производных от $\mathbf{u}_1^1$, входящих в (2.20), достаточно дифференцировать только первый множитель в (2.18), так как этот множитель обращается в нуль на поверхности коноида продольных волн. Далее, члены, зависящие от $\mathbf{s}_1^1$, дают в (2.20) ограниченную величину. Имея это в виду, найдем в результате вычислений

$$d_x = \tau\left\{\lambda\sigma\tau\triangle\frac{\partial\tau}{\partial x} - 2\mu\left[\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2\mu\frac{\partial\tau}{\partial x}\,\mathrm{grad}\,\sigma\cdot\sigma\,\mathrm{grad}\,\tau + \right.$$
$$\left. + 2\rho\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right\} + O(1) = \rho\tau(a^2 - b^2)\left(\sigma\triangle\tau\frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{2}{a^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + O(1) \tag{2.21}$$

Здесь индекс a у σ и τ опущен, чтобы упростить запись. Докажем теперь, что выражение в скобках есть $O(\tau^{-1})$. Отсюда будет следовать, что $D_x^1 = O(1)$. Имеем

$$\sigma = \frac{1}{a(M_0)\tau} + O(1), \qquad \triangle\tau = \frac{2}{a^2(M_0)\tau} + O(1)$$

Отсюда

$$\sigma\triangle\tau = \frac{2}{a^2(M_0)\tau^2} + O(\tau^{-1}), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = -\frac{1}{a(M_0)\tau^2}\frac{\partial\tau}{\partial x} + O(\tau^{-1})$$

Подставив это (2.21), найдем, что скобка равна $O(r^{-1})$, а d_x и D_x^1 ограничены. Аналогично найдем, что D_y и D_z ограничены. Полезно еще заметить, что D_x^1, D_y^1, D_z^1 не зависят от t и от t_0

§ 3. Поперечные фундаментальные решения. Мы не будем приводить вычислений, очень сходных с предшествующими, и укажем только результат. Введем три вектора $\mathbf{u}_i^{(0)}$ $(i = 2, 3, 4)$, определяемые внутри коноида поперечных волн соотношением

$$\begin{pmatrix} u_2^{(0)} & v_2^{(0)} & w_2^{(0)} \\ u_3^{(0)} & v_2^{(0)} & w_3^{(0)} \\ u_4^{(0)} & v_4^{(0)} & w_4^{(0)} \end{pmatrix} = [(t_0 - t)^2 - \tau_b^2]\begin{pmatrix} \partial/\partial y & -\partial/\partial x & 0 \\ -\partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/zz & -\partial/\partial y \end{pmatrix}\sigma_b \tag{3.4}$$

Будем рассматривать $\mathbf{u}_1^{(0)}$ как вектор упругих смещений.

Соответствующий вектор объемных сил $\mathbf{X}_i^{(0)}$ имеет вид

$$\mathbf{X}_i^{(0)} = (t_0 - t)^2\, \mathbf{S}_i + O(r^{-1}) \tag{3.2}$$

причем $\mathbf{S}_i = O(r^{-3})$. Введем далее векторы $\mathbf{u}_i^{(1)} = [(t_0 - t)^2 - \tau_b^2]\, \mathbf{s}_i (M, M_0)$ такие, что $\mathbf{s}_i(M_0, M) = O(r^{-1})$ при малых r и s_i удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{grad}[(\lambda + 2\mu)\operatorname{div}\mathbf{s}_i] - \operatorname{rot}[\mu \operatorname{rot}\mathbf{s}_i] - 2\rho\mathbf{s}_i + \mathbf{S}_i = 0 \qquad (i = 2,\ 3,\ 4) \tag{3.3}$$

Поперечные сингулярные решения $\mathbf{u}_i$ $(i = 2, 3, 4)$ мы определим внутри коноида поперечных волн равенством $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{(0)} - \mathbf{u}_i^{(1)}$.

Так же, как и в предшествующем параграфе, легко видеть, что $\mathbf{u}$ обращаются в нуль на поверхности соответствующего коноида и в бесконечности на его оси; вектор $\mathbf{X}_i$ объемных сил, отвечающий смещению $\mathbf{u}_i$, не зависит от времени и имеет оценку $O(r^{-1})$. Наконец, величины

$$D_x^i = \sigma_x^i \cos(\nu^* x) + \tau_{xy}^i \cos(\nu^* y) + \tau_{xz}^i \cos(\nu^* z) - \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \cos(\nu^* t) \qquad \begin{pmatrix} x\,y\,z \\ u\,v\,w \end{pmatrix}$$

на поверхности коноида поперечных волн ограничены и не зависят от t и t_0.

§ 4. Обобщенная формула Стокса. Пусть D — некоторая конечная область четырехмерного пространства $xyzt$, ограниченная поверхностью Γ, а ν^* — внешняя нормаль к Γ. Пусть, далее, векторы упругих смещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ непрерывны в $D + \Gamma$ вместе со своими производными до второго порядка включительно[1]. Обозначим через $\sigma_x, \ldots, \tau_{xy}, \ldots, \tau_{yz}$ и $\sigma_x', \ldots, \tau_{xy}', \ldots, \tau_{yz}'$ составляющие напряжений, отвечающие векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$, и через $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ — соответствующие векторы объемных сил. Имеет место формула, которую мы называем формулой Грина-Вольтерра:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Gamma} \Big\{ \Big(& u'\sigma_x + v'\tau_{xy} + w'\tau_{xz} - u\sigma_x' - v\tau_{xy}' - w\tau_{xz}' \Big) \cos\nu^* x) + \\ &+ \Big(u'\tau_{xy} + v'\sigma_y + w'\tau_{yz} - u\tau_{xy}' - v\sigma_y' - w\tau_{yz}' \Big) \cos(\nu^* y) + \\ &+ \Big(u'\tau_{xz} + v'\tau_{yz} + w'\sigma_z - u\tau_{xz}' - v\tau_{yz}' - w\sigma_z' \Big) \cos(\nu^* z) - \\ &- \rho \Big(u' \frac{\partial u}{\partial t} + v' \frac{\partial v}{\partial t} + w' \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial u'}{\partial t} - v \frac{\partial v'}{\partial t} - w \frac{\partial w'}{\partial t} \Big) \cos(\nu^* t) \Big\}\, d\Gamma = \\ = \iiiint\limits_{D} \Big(& u X' + v Y' + w Z' - u'X - v'Y - w'Z \Big)\, dx\, dy\, dz\, dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

Формула (4.1) дана Е. А. Нарышкиной [1] для случая однородной среды, однако она остается верной и тогда, когда среда неоднородная. Убедиться в этом легко — достаточно тройной интеграл преобразовать в четырехкратный по формуле Гаусса и затем упростить подинтегральное выражение, пользуясь уравнениями (1.1) и (1.2).

Применим формулу Грина-Вольтерра к векторам $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению (1.3), а $\mathbf{u}_1$ — продольное фундаментальное решение. В качестве области D выберем четырехмерный объем D_ε, ограниченный

[1] Это требование можно значительно ослабить.

частью $\gamma_{1\varepsilon}$ коноида $t=t_0-\tau_a(M, M_0)$, частью $\Gamma_{1\varepsilon}$ некоторой фиксированной гиперповерхности Γ и частью G_1 гиперцилиндра $r=\varepsilon$. В полученной формуле перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Пределы поверхностей $\gamma_{1\varepsilon}$ и $\Gamma_{1\varepsilon}$ обозначим через γ_1 и Γ_1, предел $D_{1\varepsilon}$ — через D_1. Применяя обычный прием [1], получим

$$4\pi\int_{t''}^{t_0}\operatorname{div}\mathbf{u}\,(t_0-t)^2\,dt= \tag{4.2}$$

$$=\iiint_{\gamma_1}\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{D}_1\,d\gamma+\iiint_{\Gamma_1}N_1\,d\Gamma+\iiiint_{D_1}(uX_1+vY_1wZ_1-u_1X-v_1Y-w_1Z)\,dx\,dy\,dz\,dt$$

Здесь через D_4 обозначен вектор с составляющими D_x^1, D_y^1, D_z^1, через N_1 — подинтегральная функция в тройном интеграле в (4.1), в которой u' заменено на u_1. Наконец, t' — значение t на поверхности Γ_1, соответствующее координатам x_0, y_0, z_0.

Аналогично, используя поперечные фундаментальные решения, будем иметь

$$4\pi\int_{t'}^{t_0}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t_0-t)^2\,dt=$$

$$=\iiint_{\gamma_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}_2\,d\gamma+\iiint_{\Gamma_2}N_2\,d\Gamma+\iiiint_{D_2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{X}_2-\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{X})\,dx\,dy\,dz\,dt \tag{4.3}$$

$$4\pi\int_{t'}^{t_0}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)(t_0-t)^2\,dt=$$

$$=\iiint_{\gamma_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}_3\,d\gamma+\iiint_{\Gamma_2}N_3\,d\Gamma+\iiiint_{D_2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{X}_3-\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{X})\,dx\,dy\,dz\,dt \tag{4.4}$$

$$4\pi\int_{t'}^{t_0}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)(t_0-t)^2\,dt=$$

$$=\iiint_{\gamma_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}_4\,d\gamma+\iiint_{\Gamma_2}N_4\,d\Gamma+\iiiint_{D_2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{X}_4-\mathbf{u}_4\cdot\mathbf{X})\,dx\,dy\,dz\,dt \tag{4.5}$$

Здесь D_2 — объем, ограниченный частью γ_2 коноида поперечных волн и частью Γ_2 поверхности Γ, далее, $\mathbf{D}_i$ — вектор с составляющими D_x^i, D_y^i, D_z^i, наконец, N_i — подинтегральная функция в тройном интеграле в (4.1), где $\mathbf{u}'$ заменено на $\mathbf{u}_i$.

Правую часть в (4.2) обозначим через A, а правые части в (4.3), (4.4) и (4.5) через B_z, B_y, B_x. Вектор с составляющими B_x, B_y, B_z обозначим через $\mathbf{B}$. Последние равенства можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned}&4\pi\int_{t'}^{t_0}(t_0-t)^2(\lambda+2\mu)\operatorname{div}\mathbf{u}\,dt=A\\&-4\pi\int_{t'}^{t_0}(t_0-t^2)\mu\operatorname{rot}\mathbf{u}\,dt=\mathbf{B}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Равенства (4.6) продифференцируем по t_0. Имеем

$$8\pi \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t)(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dt = \frac{\partial A}{\partial t_0} \tag{4.7}$$

$$-8\pi \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) \mu \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dt = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0} \tag{4.8}$$

Возьмем grad обеих частей (4.7), rot обеих частей (4.8) и сложим. Используя уравнение (1.2), получим

$$8\pi\rho \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dt = \operatorname{grad} \frac{\partial A}{\partial t_0} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0} - 8\pi \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) \mathbf{H}(\mathbf{u}) \, dt - 8\pi \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) \mathbf{X} \, dt$$

Интеграл слева возьмем по частям. Мы получим тогда

$$\mathbf{u}(M_0, t_0) = [\mathbf{u}]_\Gamma + \left[(t_0 - t') \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]_\Gamma + \frac{1}{8\pi\rho} \left\{ \operatorname{grad} \frac{\partial A}{\partial t_0} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0} \right\} -$$

$$- \frac{1}{\rho} \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) \mathbf{H}(\mathbf{u}) \, dt - \frac{1}{\rho} \int_{t'}^{t_0} (t_0 - t) X \, dt \tag{4.9}$$

Формула (1.9) обобщает известную формулу Стокса на случай неоднородной среды.

Допустим теперь, что Γ есть гиперповерхность $t = 0$, т. е. пространство xyz, и что начальное возмущение имеет место только в некоторой конечной области этого пространства. Тогда и в любой момент времени $\mathbf{u}$ отлично от нуля лишь в конечной области пространства xyz. В этом случае легко выразить $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ через A и $\mathbf{B}$. Имеем

$$\int_0^{t_0} (t_0 - t) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dt = \frac{\rho}{8\pi a^2} \frac{\partial A}{\partial t_0}$$

$$-\int_0^{t_0} (t_0 - t) \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dt = \frac{\rho}{8\pi b^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0}$$

Отсюда

$$\int_0^{t_0} (t_0 - t) \triangle \mathbf{u} \, dt = \frac{1}{8\pi} \left\{ \operatorname{grad} \left(\frac{\rho}{a^2} \frac{\partial A}{\partial t_0} \right) + \operatorname{rot} \left(\frac{\rho}{b^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0} \right) \right\} \tag{4.10}$$

На бесконечности, в силу сделанных предположений $\mathbf{u} = 0$. Поэтому

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi} \iiint_\infty \frac{\Delta \mathbf{u}}{r} \, dx \, dy \, dz$$

и

$$\int_0^{t_0} (t_0 - t) \mathbf{u} \, dt = -\frac{1}{4\pi} \iiint_\infty \frac{dx \, dy \, dz}{r} \int_0^{t_0} (t_0 - t) \triangle \mathbf{u} \, dt =$$

$$= -\frac{1}{32\pi^2} \iiint_\infty \left\{ \operatorname{grad} \left(\frac{\rho}{a^2} \frac{\partial B}{\partial t_0} \right) + \operatorname{rot} \left(\frac{\rho}{b^2} \frac{\partial A}{\partial t_0} \right) \right\} \frac{dx \, dy \, dz}{r}$$

От обеих частей последнего равенства возьмем оператор **H**. Имеем

$$\int_0^{t_0}(t_0-t)\,\mathbf{H}(\mathbf{u})\,dt = -\frac{1}{32\pi^2}\iiint_\infty \mathbf{H}\left\{\frac{1}{r}\operatorname{grad}\left(\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial A}{\partial t_0}\right)+\frac{1}{r}\operatorname{rot}\left(\frac{\rho}{b^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_0}\right)\right\}dx\,dy\,dz \tag{4.11}$$

Формула (4.9) принимает следующий вид:

$$\mathbf{u}(M_0,t_0)=\mathbf{u}(M_0,0)+t_0\frac{\partial\mathbf{u}(M_0,0)}{\partial t_0}+\frac{1}{8\pi\rho}\left\{\operatorname{grad}\frac{\partial A}{\partial t_0}+\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t_0}\right\}+$$

$$+\frac{1}{32\pi^2\rho}\iiint_\infty \mathbf{H}\left\{\frac{1}{r}\operatorname{grad}\left(\frac{\rho}{a^2}\frac{\partial A}{\partial t_0}\right)+\frac{1}{r}\operatorname{rot}\left(\frac{\rho}{b^2}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t_0}\right)\right\}dx\,dy\,dz+\frac{1}{\rho}\int_0^{t_0}(t_0-t)\,\mathbf{X}\,dt \tag{4.12}$$

Если даны значения **u** и $\partial\mathbf{u}/\partial t$ при $t=0$, то равенство (4.12) есть интегро-дифференциальное уравнение относительно **u**.

Поступила в редакцию
7 II 1946

S. G. MICHLIN.—FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE DYNAMIC EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR NON-HOMOGENEOUS MEDIA

The author gives vectors of elastic displacements extending the well-known Volterra vectors to the case of non-homogeneous media. Similar to Volterra's, the present vectors vanish in the proper manner on the surface of a conoid of longitudinal, as well as of transverse, waves. A formula is given extending the classic Stokes formula to the case of non-homogeneous media. The problem of the oscillation of the initially disturbed domain of space is reduced to an integro-differential equation, with the help of the generalized Stokes formula.

ЛИТЕРАТУРА

1. Naryskina E. Sur les vibrations d'un démiespace aux conditions initiales arbitraires. Труды Сейсмологического института АН СССР. 1934. № 45.
2. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики (гл. XII). ГТТИ, 1937.
3. С. Л. Соболев. Волновое уравнение для неоднородной среды. Труды Сейсмологического института. АН СССР. 1930. № 6.