Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI. 1947

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Настоящая работа имеет целью качественное исследование напряженного состояния оболочек со срединной поверхностью нулевой гауссовой кривизны и формулировку вытекающих отсюда приближенных методов расчета; при этом исследуются асимптотические свойства напряженного состояния, т. е. свойства, которые проявляются при сколь угодно малых значениях $h^* = h / \lambda$ (h — толщина оболочки, λ — некоторый линейный размер, характеризующий ее срединную поверхность).

Основанием для специального рассмотрения оболочек нулевой гауссовой кривизны является их широкое применение на практике и то, что они не всегда допускают выделение безмоментного напряженного состояния и могут иметь края, совпадающие с асимптотическими линиями, так что к ним неприменимы общие результаты, изложенные в статьях [1,2].

Терминология, примененная в этих статьях, сохранена и здесь; изменено только обозначение для величины h^*, которая в цитированных статьях обозначалась через $\bar{h}$.

§ 1. Будем считать, что оболочка отнесена к линиям кривизны α, β, причем нулевую кривизну имеют α-линии. Подбором параметра α первую квадратичную форму поверхности можно привести к виду

$$ds^2 = d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

Параметр β выбираем так, чтобы величина B имела размерность длины. Как известно из теории поверхностей:

(a) для цилиндра

$$B = B(\beta), \qquad R = R(\beta) \tag{1.1}$$

(b) для конуса

$$B = \alpha B^*(\beta), \qquad R = \alpha R^*(\beta) \tag{1.2}$$

(c) для развертывающейся поверхности, отличной от цилиндра и конуса:

$$B = \alpha B^{(1)}(\beta) + B^{(2)}(\beta), \qquad R = \alpha R^{(1)}(\beta) + R^{(2)}(\beta) \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем R обозначает радиус кривизны β-линий.

Кроме того, в дальнейшем будем пользоваться тем, что для любой развертывающейся поверхности выражение B / R зависит только от параметра β.

§ 2. Воспользуемся исходными соотношениями в обозначениях Лява [3], в которых для удобства последующего изложения введем условные коэффициенты j_1, j_2, j_3, j_4 (пока их следует считать равными единице):

уравнения равновесия

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)-\frac{1}{B}\frac{\partial S_2}{\partial\beta}-\frac{j_2}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2S_1)+\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(S_1+S_2\right)-\frac{N_2}{R}=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{T_2}{R}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}N_1+\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial\beta}=0 \tag{2.3}$$

$$j_4\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1)+j_4\frac{1}{B}\frac{\partial H_2}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2-N_1=0 \tag{2.4}$$

$$j_3\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2H_1)-\frac{1}{B}\frac{\partial G_2}{\partial\beta}+N_2=0 \tag{2.5}$$

$$S_1+S_2+j_1\frac{H_2}{R}=0 \tag{2.6}$$

уравнения неразрывности деформаций

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varkappa_2)-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\tau-j_1\frac{\omega}{2R}\right)-j_2\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varkappa_1=0 \tag{2.7}$$

$$-\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B^2\tau)+\frac{1}{B}\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\beta}-\frac{\gamma_1}{R}=0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\varkappa_1}{R}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_2-\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\beta}=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{j_4}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\varepsilon_2)-j_4\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\omega}{2}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\gamma_2=0 \tag{2.10}$$

$$j_3\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^2\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta}+\gamma_1=0 \tag{2.11}$$

соотношения упругости

$$2Eh\varepsilon_1=T_1-j_2\sigma T_2,\qquad 2Eh\frac{\omega}{2}=S_1-\sigma S_2,\qquad 2Eh\varepsilon_2=j_2T_2-\sigma T_1 \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} G_1&=-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}2Eh(j_2\varkappa_1+\sigma\varkappa_2), & H_1&=+\frac{h^2}{3(1+\sigma)}2Eh\tau \\ G_2&=-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}2Eh(\varkappa_2+j_2\sigma\varkappa_1), & H_2&=-\frac{h^2}{3(1+\sigma)}2Eh\tau \end{aligned} \tag{2.13}$$

Заметим, что соотношение $H_1=-H_2$, вытекающее из (2.13), использовано при выводе уравнения (2.5).

Уравнения неразрывности (2.7)—(2.11) с помощью формального введения переменных γ_1 и γ_2 здесь приведены к виду, аналогичному виду уравнений равновесия.

Соотношения (2.1)—(2.13) представляют собой систему 18 уравнений с 18 неизвестными, исследование которой составляет основную цель этой работы. Уравнения (2.1)—(2.13) есть частный случай (при $A=1$, $R_1=\infty$, $R_2=R$) уравнений упругого равновесия произвольной оболочки, вывод которых проводится у Лява [3] и в нашей работе [4].

§ 3. Покажем, что при $j_1 = j_2 = 0$ решение системы (2.1)—(2.13) приводится к интегрированию двух уравнений с двумя неизвестными функциями.

В самом деле, при $j_1 = j_2 = 0$ соотношения (2.1), (2.12), (2.10), (2.11), (2.9), (2.6) дают восемь уравнений с девятью неизвестными T_1, S_1, S_2, ε_1, ε_2, ω, γ_1, γ_2, $\varkappa_1$; поэтому последние можно выразить через произвольную функцию t так, что все перечисленные соотношения будут тождественно удовлетворяться:

$$T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial\beta}, \qquad S_1 = -S_2 = -\frac{\partial t}{\partial\alpha} \tag{3.1}$$

$$2Eh\varepsilon_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial\beta}, \quad 2Eh\varepsilon_2 = -\frac{\sigma}{B}\frac{\partial t}{\partial\beta}, \quad 2Eh\frac{\omega}{2} = -(1+\sigma)\frac{\partial t}{\partial\alpha} \tag{3.2}$$

$$2Eh\gamma_1 = j_3\frac{1+\sigma}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial\beta}, \qquad 2Eh\gamma_2 = \frac{1}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} - \frac{j_4}{B}\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} 2Eh\varkappa_1 = -\frac{R}{B}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial t}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial t}{\partial\beta} + \\ &+ \left(j_4\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} + j_3(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Точно так же оставшиеся неизвестные $\varkappa_2$, τ, G_1, G_2, H_1, H_2, N_1, N_2, T_2 можно выразить через другую произвольную функцию m так, что будут тождественно удовлетворяться соотношения (2.7), (2.13), (2.4), (2.5), (2.3):

$$2Eh\varkappa_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial\beta}, \qquad 2Eh\tau = \frac{\partial m}{\partial\alpha} \tag{3.5}$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{\sigma}{B}\frac{\partial m}{\partial\beta}, \quad H_1 = -H_2 = \frac{h^2}{3(1+\sigma)}\frac{\partial m}{\partial\alpha}, \quad G_2 = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial\beta} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial m}{\partial\beta} - \frac{j_4}{B}\frac{\partial^2 m}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right) \\ N_2 &= -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial\beta} + j_3\frac{1-\sigma}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha}\right] \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{R}{B}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial m}{\partial\beta} - \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial m}{\partial\beta} + \\ &+ \left(j_4\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial^2 m}{\partial\alpha\,\partial\beta} + (1-\sigma)\,j_3\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Вставляя в (2.2) и (2.8) эти выражения, получим систему уравнений для t и m:

$$\frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} - \lambda^2\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}N(m, \sigma) = 0, \qquad \frac{\lambda^3}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} + \lambda^3 N(t, -\sigma) = 0 \tag{3.9}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} N(F, \sigma) = &\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta} + \frac{1}{BR}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F}{\partial\beta} + \\ &+ \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\left(j_4\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta} + j_3(1-\sigma)\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{R}\right]\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial F}{\partial\alpha} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Множители λ^2 и λ^3 введены для того, чтобы все члены этих уравнений имели размерность величины t.

При выводе системы (3.9) мы существенным образом опирались на возможность считать:

$j_1=0$, что эквивалентно предположению

$$S_1 \gg \frac{H_2}{R}, \qquad \tau \gg \frac{\omega}{2R} \tag{3.11}$$

$j_2=0$, что эквивалентно предположению

$$T_1 \gg T_2, \qquad \varkappa_2 \gg \varkappa_1 \tag{3.12}$$

Поэтому допустимо пользоваться только такими интегралами системы уравнений (3.9), которые не находятся в противоречии с соотношениями (3.11) и (3.12).

§ 4. Рассмотрим асимптотические свойства (т. е. свойства, проявляющиеся при $h^* \to 0$) интегралов системы (3.9).

Будем называть величину P соизмеримой с h^{*p}, т. е. $P \approx h^{*p}$, если P / h^{*p} при убывании h^* стремится к конечному пределу; если при этом $\partial P / \partial\gamma \approx h^{*p-s}$, то мы говорим, что P при дифференцировании по γ возрастает или убывает в h^{*-s} раз в зависимости от того, положительно или отрицательно s (если $s=0$, то будем говорить, что P существенно не меняет своей величины при дифференцировании); соотношение $P \gg Q$ обозначает, что если $P \approx h^{*p}$ и $Q \approx h^{*q}$, то $p<q$.

Примем, что если P увеличивается при дифференцировании по γ в h^{*-s} раз, то во столько же раз увеличивается при дифференцировании по γ и любая производная (по γ или по другой переменной) от P. Другими словами, будем считать, что P выражается формулой

$$P = A \exp h^{*-s} B$$

где A, B — функции, которые вместе со всеми своими частными производными, встречающимися в наших рассуждениях, стремятся к конечному пределу при $h^* \to 0$.

Наоборот, если P при дифференцировании по γ уменьшается, то это, конечно, не значит, что будут уменьшаться при дифференцировании по γ и ее частные производные.

Система (3.9) содержит:

(a) интегралы, существенно не изменяющие своей величины при дифференцировании;

(b) интегралы, увеличивающиеся при дифференцировании по β и уменьшающиеся или остающиеся неизменными при дифференцировании по α;

(c) интегралы, увеличивающиеся при дифференцировании по α;

(d) интегралы, уменьшающиеся при дифференцировании как по α, так и по β.

Пусть $\lambda m \approx h^{*p} t$, тогда для интегралов вида (a) с помощью формул (3.1) — (3.8) можно получить оценки

$$T_1 \approx \frac{1}{\lambda}\, t, \quad T_2 \approx \frac{1}{\lambda}\, h^{*2+p} t, \quad 2Eh\varkappa_2 = \frac{1}{\lambda^2}\, h^{*p} t, \quad 2Eh\,\varkappa_1 \approx \frac{1}{\lambda^2}\, t$$

$$S_1 \approx \frac{1}{\lambda}\, t, \quad \frac{H_2}{R} \approx \frac{1}{\lambda}\, h^{*2+p} t, \quad 2Eh\tau = \frac{1}{\lambda^2}\, h^{*p} t, \quad 2Eh\,\frac{\omega}{2R} \approx \frac{1}{\lambda^2}\, t$$

Отсюда ясно, что соотношения (3.11), (3.12) будут выполняться только в том случае, если $-2 < p < 0$. Далее имеем

$$\frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} \approx t, \qquad \frac{\lambda^3}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} \approx h^{*p}t$$
$$\lambda^2\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}N(m,\sigma) \approx h^{*2+p}t, \qquad \lambda^3 N(t,-\sigma) \approx t \tag{4.1}$$

При достаточно малом h^* в каждом из уравнений (3.9) достаточно удерживать только те члены, которые стремятся к самой низкой степени h^*. Принимая во внимание неравенство $-2 < p < 0$, можно утверждать, что интегралы вида (a), если только они вообще существуют, асимптотически приближаются к решениям уравнений

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} = 0 \tag{4.2}$$

Заметим, что произвольные функции от переменной β в общих интегралах уравнений (4.2) нельзя выбирать так, чтобы они увеличивались при дифференцировании по β.

Легко установить, что если t и m будут удовлетворять системе

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} = 0, \qquad m = 0 \tag{4.3}$$

то, вычисляя T_1, T_2, S_1 и S_2 при помощи формул (3.1), (3.8), мы получим тангенциальные усилия безмоментной теории, а если t и m будут удовлетворять системе уравнений

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} = 0, \qquad t = 0 \tag{4.4}$$

то, вычисляя $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ по (3.4), (3.5), мы получим деформацию оболочки, не сопровождающуюся растяжениями и сдвигами срединной поверхности.

Таким образом, можно утверждать, что система (4.2) определяет напряженное состояние, составленное из суммы безмоментного и моментного напряженных состояний, общее определение которых было дано в работе[1].

К вопросу об условиях, при которых существуются интегралы типа (a), мы вернемся ниже.

Под интегралами вида (b) мы будем подразумевать такие решения уравнений (3.9), которые увеличиваются при дифференцировании по β при любом выборе произволов интегрирования; поэтому определяющая их система уравнений должна содержать в явном виде h^* даже после того, как мы сохраним только члены, которые стремятся к наименьшим степеням h^*. Пусть t и m при дифференцировании по β увеличиваются в h^{*-r} раз и, кроме того,

$$\frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} \approx h^{*2\theta}t, \qquad \frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} \approx h^{*2\nu}m \tag{4.5}$$

Здесь r, θ и ν — неотрицательные числа. Для того чтобы в системе уравнений (3.9) при $h^* \to 0$ сохранился в явном виде параметр h^*, необходимо

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} \approx \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}N(m,\sigma), \qquad \frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} \approx N(t,-\sigma)$$

В соответствии со сделанными выше предположениями это приводит к равенствам $p = -1 - \nu + \theta$ и $\theta + \nu + 4r = 1$. Чтобы сократить число параметров, в дальнейшем будем предполагать, что $\nu = \theta = \rho > 0$, хотя разбор более общего случая не представляет принципиальных затруднений. Тогда

$$p = -1, \qquad 2\rho + 4r = 1 \tag{4.6}$$

Покажем теперь, что интегралы вида (b) не противоречат соотношениям (3.11) и (3.12). Для этого достаточно воспользоваться формулами (3.1)—(3.8), из которых следует

$$S_1 \approx h^* \frac{H_2}{R}, \qquad \tau \approx h^* \frac{\omega}{R} \tag{4.7}$$

$$T_2 \approx h^{*1-2r} T_1, \qquad \varkappa_1 \approx h^{*1-2r} \varkappa_2 \tag{4.8}$$

Таким образом, соотношение (3.11) всегда выполняется и, полагая $j_1 = 0$, мы отбрасываем члены, которые стремятся к h^* по сравнению с членами, стремящимися к единице.

Как отмечалось выше, ρ—неотрицательное число, откуда в силу (4.6) получим $r \leqslant {}^1/_4$; поэтому предположение $j_2 = 0$ в самом невыгодном случае эквивалентно отбрасыванию членов, стремящихся к $h^{*1/2}$ по сравнению с членами, стремящимися к 1. Относительная величина отбрасываемых членов будет уменьшаться с возрастанием ρ и увеличиваться с уменьшением ρ.

Интегралы вида (c) и (d) здесь не рассматриваются[1]. Отметим только без доказательства, что для вычисления первых из них система (3.9) непригодна, а для вычисления вторых она может быть использована и дает бо́льшую точность, чем в применении к интегралам вида (b). Косвенное подтверждение этого вытекает из того обстоятельства, что интегралы вида (c) можно рассматривать как предельный случай интегралов вида (b), когда в последних ρ становится меньше нуля, и, наоборот, интегралы вида (b), в силу равенств (4.6) переходят в интегралы вида (d) при $\rho > 2$.

§ 5. Если ограничиться задачей разыскания интегралов вида (b) и (d), то можно внести в систему (3.9) дальнейшие упрощения, отбрасывая члены, сохранение которых теряет смысл в связи уже с допущенными погрешностями.

Прежде всего замечаем, что можно положить $j_3 = 0$. Это следует из того, что в уравнениях (3.9) члены, имеющие коэффициенты j_3, в силу свойств интегралов типа (b), будут в h^{*-1+2r} раз меньше, чем первые слагаемые левых частей уравнений (3.9).

Обращаясь к вопросу о том, при каких обстоятельствах будет законно предположение $j_4 = 0$, следует выделить случаи, когда мы имеем дело с цилиндрической оболочкой. Так как при этом

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} B^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

то коэффициенты при j_3 и j_4 в каждом из уравнений (3.9) будут соизмеримы друг с другом так, что j_4 можно считать равными нулю с тем же основанием, что и j_3.

[1] Интегралы вида (c) соответствуют краевым эффектам, возникающим вблизи неасимптотических границ оболочки. Вопросу о вычислении такого рода интегралов для оболочки произвольного очертания посвящена статья [2], результаты которой применимы и к оболочкам нулевой гауссовой кривизны.

При $\partial B/\partial\alpha \neq 0$, т. е. для нецилиндрической оболочки, положив $j_4=0$, мы можем допустить значительную погрешность. Это случится при разыскании таких интегралов, для которых ρ будет большим положительным числом и наряду с этим будут иметь место соотношения

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial\alpha}\approx h^{*\rho_1}t, \qquad \lambda\frac{\partial m}{\partial\alpha}\approx h^{*\rho_1}m \tag{5.1}$$

где ρ_4 мало. Наоборот, в случаях, когда $\rho_1 \gg \rho$, можно не только считать $j_4=0$, но и отбросить в операторе N член

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\left(j_4\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{5.2}$$

Таким образом, оператор N принимает вид:

а) для цилиндрической оболочки $(\partial B/\partial\alpha=0)$

$$N(F)=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta}+\frac{1}{BR}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta} \tag{5.3}$$

в) для нецилиндрической оболочки $(\partial B/\partial\alpha\neq 0)$

$$N(F)=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta}+\frac{1}{BR}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial F}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial F}{\partial\beta} \tag{5.4}$$

(при $j_3=0$ оператор N уже не содержит параметра σ и нет нужды выписывать его как аргумент).

Следует помнить, что для нецилиндрической оболочки формула (5.4) основана на предположении, что имеют место оценочные соотношения (5.1) при $\rho_1 \gg \rho$, поэтому всегда необходимо доказывать, что t и m, полученные при помощи (5.4), удовлетворяют этим соотношениям.

§ 6. Полная система уравнений оболочек со срединной поверхностью нулевой гауссовой кривизны удовлетворяется, когда искомые неизвестные заданы формулами (3.1)—(3.8), а t и m являются интегралами системы (3.9) независимо от того, равны j_3 и j_4 нулю или единице. Следовательно, можно сказать, что, положив $j_3=0$ в (3.9), мы получим точное решение системы уравнений (2.1)—(2.13), в которой положено $j_1=j_2=j_3=j_4=0$. Последнее, очевидно, эквивалентно отбрасыванию в исходных уравнениях членов, имеющих в коэффициентах множители j_1, j_2, j_3, j_4, причем нетрудно убедиться, что в случае цилиндрической оболочки отбрасываются как раз те члены, которыми пренебрегает и В. З. Власов [4].

Эти результаты здесь получены без каких бы то ни было гипотез, основанных на интуиции или экспериментальных данных. Мы только требуем, чтобы напряженное состояние рассматриваемой оболочки можно было получить по формулам (3.1)—(3.8) при помощи интегралов вида (b). Можно показать, что для некоторого широкого класса граничных условий это действительно имеет место. Таким образом, для определенного вида задач гипотезы В. З. Власова можно считать обоснованными, если их сформулировать так:

1) в уравнениях равновесия роль моментов H_1, H_2 и G_1 и поперечных условий N_1 пренебрежимо мала;

2) в уравнениях неразрывности деформации роль ω, ε_2 и γ_2 пренебрежимо мала.

Однако для того, чтобы утверждать, что сами величины H_1, H_2, G_1, N_1, ω, ε_2, γ_2 малы, нужно ввести некоторые дополнительные предположения, ограничивающие область применимости метода.

На наш взгляд это нерационально, так как для достижения полученных Власовым результатов достаточно двух сформулированных гипотез.

Гипотезы В. З. Власова целиком нельзя распространять на любую оболочку со срединной поверхностью нулевой гауссовой кривизны. Для нецилиндрических оболочек неверными становятся предположения о том, что можно отбросить N_1 в уравнениях равновесия и γ_2 в уравнениях неразрывности деформаций (конечно, при этом предполагается, что оболочка существенно отличается от цилиндрической).

§ 7. Покажем теперь, что если оператор N брать в упрощенном виде, т. е. по формулам (5.3) или (5.4), то система (3.9) допускает для цилиндрических и конических оболочек интегрирование при помощи метода разделения переменных. В самом деле, пусть

$$t = \tau(\alpha)\, p(\beta), \qquad m = \mu(\alpha)\, q(\beta) \tag{7.1}$$

тогда при $\partial B / \partial\alpha = 0$ (цилиндрическая оболочка) уравнения (3.9) обращаются в систему:

$$\lambda^2 \frac{d^2\tau}{d\alpha^2} p - \lambda^2 \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)} \mu N(q) = 0$$
$$\lambda^3 \frac{d^2\mu}{d\alpha^2} q + \lambda^2 \tau N(p) = 0 \tag{7.2}$$

Так как $N(p)$ и $N(q)$ не зависят от α, то из (7.2) следует: либо

$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} + \varkappa^2\mu = 0, \qquad \frac{d^2\mu}{d\alpha^2} - \varkappa^2\tau = 0 \tag{7.3}$$

$$N(q) + \frac{3(1-\sigma^2)\varkappa^2}{h^2} p = 0, \qquad N(p) + \varkappa^2 q = 0 \tag{7.4}$$

либо

$$\frac{d^2\tau}{d\alpha^2} + \frac{h^2k^2}{3(1-\sigma^2)}\mu = 0, \qquad \frac{d^2\mu}{d\alpha^2} + k^2\tau = 0 \tag{7.5}$$

$$N(q) + k^2 p = 0, \qquad N(p) - k^2 q = 0 \tag{7.6}$$

Для конической оболочки B и R выражаются формулами (1.2) и, следовательно, подстановка (7.1) в уравнения (3.9) дает

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}\alpha^2\frac{d\tau}{d\alpha} p - \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{\mu}{\alpha^3} N^*(q) = 0$$
$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}\alpha^3\frac{d\mu}{d\alpha} q + \frac{\tau}{\alpha^3} N^*(p) = 0 \tag{7.7}$$

где

$$N^*(F) = \left[\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R^*}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{B^*R^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R^*}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\right] F$$

Так как $N^*(p)$ и $N^*(q)$ не зависят от α, то уравнения (7.7) эквивалентны одной из двух систем:

$$\frac{d}{d\alpha}\alpha^2\frac{d\tau}{d\alpha}+\varkappa^2\frac{\mu}{\alpha}=0, \qquad \frac{d}{d\alpha}\alpha^2\frac{d\mu}{d\alpha}-\varkappa^2\frac{\tau}{\alpha}=0 \tag{7.8}$$

$$N^*(q)+\frac{3(1-\sigma^2)\varkappa^2}{h^2}p=0, \qquad N^*(p)+\varkappa^2 q=0 \tag{7.9}$$

или

$$\frac{d}{d\alpha}\alpha^2\frac{d\tau}{d\alpha}+\frac{h^2k^2}{3(1-\sigma^2)}\frac{\mu}{\alpha}=0, \qquad \frac{d}{d\alpha}\alpha^2\frac{d\mu}{d\alpha}+k^2\frac{\tau}{\alpha}=0 \tag{7.10}$$

$$N^*(q)+k^2p=0, \qquad N^*(p)-k^2q=0 \tag{7.11}$$

Таким образом, общий интеграл системы (3.9) можно искать для цилиндрической оболочки в виде разложений по собственным функциям системы (7.3) или (7.6), а для конической оболочки — в виде разложений по собственным функциям системы (7.8) или (7. 11).

Уравнения (7.3), как легко видеть, определяют фундаментальные функции колеблющейся балки.

Система (7.8) приводится к уравнению Бесселя. Чтобы показать это, помножим первое уравнение этой системы на $i=\sqrt{-1}$ и сложим со вторым. Тогда, введя обозначение $U=\mu+i\tau$, получим уравнение, которое после замены переменных по формулам $\alpha=x^{-2}$, $U=xV$ приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dV}{dx}+\left(4ik-\frac{1}{x^2}\right)V=0$$

Определение собственных функций систем (7.6) и (7.11) значительно сложнее, и вид их будет зависеть от геометрической конфигурации поперечного сечения оболочки.

§ 8. Вернемся к интегралам вида (a) и рассмотрим вопрос о том, при каких обстоятельствах существуют интегралы системы (4.3) асимптотически приближающиеся к интегралам уравнений (3.9). В соответствии с § 4 это эквивалентно выяснению вопроса о том, когда оболочки нулевой гауссовой кривизны допускают выделение безмоментного напряженного состояния.

Будем пользоваться методом последовательных приближений и начнем с конических оболочек. В этом случае согласно (1.2) общий интеграл первого из уравнений (4.3) можно представить в виде

$$t_0=\frac{p(\beta)}{\alpha}+q(\beta)$$

где p, q — произвольные функции от β. Примем $t=t_0$ и $m=0$ за исходные приближенные решения системы (3.9), в которой вновь считаем $j_2=j_4=1$.

Введем обозначение

$$M_a(F)=\left[\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R^*}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{B^*R^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{a}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R^*}{B^*}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]F$$

После несложных выкладок найдем

$$N(t_0-\sigma)=\frac{1}{\alpha^4}M_4(p)+\frac{1}{\alpha^3}M_1(q)$$

Из второго уравнения (3.9) путем двукратного интегрирования находим

$$m_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2} M_4(p) + \frac{1+\ln\alpha}{\alpha} M_1(q)$$

Вставляя этот результат в (3.9), получим

$$t_1 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\left\{-\frac{1}{12}\frac{M_9[M_4(p)]}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{M_0[M_1(q)]}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{\ln\alpha}{\alpha^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{\alpha^2}\right) M_4[M_1(q)]\right\}$$

Мы видим, что t_0 будет в α^2/h^2 раз больше, чем t_1, если

$$M_a[M_b(p)] \approx p, \qquad M_a[M_b(q)] \approx q \tag{8.1}$$

Не рассматривая со всей строгостью вопросов сходимости процесса последовательных приближений, примем, что, заменяя $t = t_0 + t_1 + \ldots$ через $t = t_0$, мы совершаем погрешность порядка t_1/t_0.

Тогда можно утверждать, что коническая оболочка допускает выделение безмоментного напряженного состояния, если выполняются соотношения (8.1) и наименьшее значение α в достаточное число раз больше, чем h (т. е. все точки оболочки достаточно удалены от вершины конуса).

Требования (8.1) эквивалентны условию, которое уже ставилось выше, чтобы произвольные функции $p(\beta)$ и $q(\beta)$ не увеличивались при дифференцировании по β.

Не останавливаясь на доказательстве, укажем, что такой же результат получится и для оболочек, описанных по развертывающимся поверхностям, отличным от цилиндра и конуса: различие будет лишь в том, что если периметр линии сжатия срединной поверхности не слишком мал по сравнению с толщиной оболочки, то отпадает ограничение, накладываемое на наименьшее значение α.

Иная картина получается для цилиндрической оболочки.

Так как в этом случае B не зависит от β, то общий интеграл первого из уравнений (4.3) имеет вид

$$t_0 = \alpha f(\beta) + \varphi(\beta) \tag{8.2}$$

где f и φ — произвольные функции.

Пусть, как и для конической оболочки, $t = t_0$ и $m = 0$ — исходное приближение для решения системы (3.9). Тогда, введя обозначение

$$L(F) = \left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{BR}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right] F \tag{8.3}$$

получим

$$N(t_0, -\sigma) = \alpha L(f) + L(\varphi)$$

Второе из уравнений (3.9) дает

$$m_1 = \frac{\alpha^3}{3!} L(f) + \frac{\alpha^2}{2!} L(\varphi)$$

Отсюда получаем следующее приближение для t в виде

$$t_1 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}\left\{\frac{\alpha^5}{5!} L[L(f)] + \frac{\alpha^4}{4!} L[L(\varphi)]\right\} \tag{8.4}$$

Чтобы t_1 было мало по сравнению с t_0, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{h^2 l^4}{5!\,3\,(1-\sigma^2)\,R^6} \ll \left| \frac{f}{L\,[L\,(f)]\,R^6} \right|$$

$$\frac{h^2 l^4}{4!\,3\,(1-\sigma^2)\,R^6} \ll \left| \frac{\varphi}{L\,[L\,(\varphi)]\,R^6} \right| \tag{8.5}$$

где l—разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может иметь α в нашей области.

Соотношения (8.5) дают условия выделимости безмоментного состояния в цилиндрической оболочке; выполнение или невыполнение его будет зависеть при заданном h/R как от l (эту величину можно называть длиной оболочки), так и от выбора произвольных функций интегрирования f и φ, т. е. от закона распределения тангенциальных усилий по поперечному сечению оболочки.

Существуют и такие интегралы вида (а), т. е. безмоментные и моментные напряженные состояния, которые с достаточной точностью удовлетворяют и полной системе уравнений теории оболочек при любых l. К таким интегралам принадлежат, в частности, t и m, определенные формулами вида (8.2), если f и φ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L(f) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \beta} L(\varphi) = 0$$

Легко показать, что усилия безмоментного состояния или моменты моментного состояния будут распределяться при этом по закону секториальных площадей.

§ 9. Все вышеприведенные рассуждения основывались на предположении о том, что h^*—сколь угодно малая величина. Пользуясь этим, мы, например, при оценке различных величин, определенных формулами (3.1)—(3.8), учитывали только число дифференцирований по β или по α и не принимали во внимание значения коэффициентов, зависящих от B и R. Однако может случиться, что при этом удовлетворительная точность получится только при столь малых h^*, что это утеряет всякий практический интерес. Поэтому необходимо относительно контура поперечного сечения оболочки сделать следующие предположения.

1. Величины R и B в каждом поперечном сечении не имеют значительных относительных отклонений от некоторых средних значений $R^{(0)}$ и $B^{(0)}$.

2. Контур поперечного сечения не имеет участков с резко меняющейся кривизной, и можно поэтому считать, что дифференцирование по β существенно не меняет величин B и R.

3. Когда речь идет о нецилиндрических оболочках, будем считать, что R и B в рассматриваемой области не имеют значительных относительных изменений при изменении параметра α. Другими словами, следует исключить из рассмотрения оболочки с резко выраженной коничностью, т. е. оболочки, в которых геометрические размеры наибольших поперечных сечений во много раз превышают геометрические размеры наименьших поперечных сечений оболочки.

Кроме того, пользуясь тем, что $B^{(0)}$ зависит от выбора безразмерного параметра β, будем считать, что последний подобран так, что $B^{(0)} = R^{(0)}$.

Легко проверить, что при таких предположениях, выбрав $\lambda = B^{(0)} = R^{(0)}$ (для нецилиндрических оболочек под $R^{(0)}$ можно подразумевать типичный радиус кривизны среднего поперечного сечения), мы не внесем большой погрешности, если не будем учитывать значения коэффициентов при оценках усилий, моментов и деформаций по формулам (3.1)—(3.8).

§ 10. В заключение, не останавливаясь на доказательствах, укажем, какими интегралами нужно пользоваться для расчета различного вида оболочек нулевой гауссовой кривизны.

(A) Оболочки, края которых нигде не совпадают с асимптотическими линиями срединной поверхности и нигде не касаются их. Здесь нужно различать два случая:

(A_1) Оболочки с выделимыми безмоментным и моментным напряженными состояниями (цилиндрические оболочки должны для этого удовлетворять условиям (8.5), в конических оболочках все точки должны быть достаточно удалены от вершины конуса).

(A_2) Оболочки с невыделимым безмоментным и моментным напряженными состояниями.

В случае (A_1) расчет оболочки можно проводить так, как это было описано в работе [2]. Напряженное состояние складывается из безмоментного и моментного напряженных состояний и краевых эффектов вдоль каждого из краев оболочки. Безмоментное и моментное напряженные состояния находятся без всякого труда. Для этого надо проинтегрировать системы (4.4) и (4.3), что даст соответственно

$$t = F_1(\beta)\int\frac{d\alpha}{B^2} + \Phi_1(\beta), \quad m = 0; \qquad t = 0, \quad m = F_2(\beta)\int\frac{d\alpha}{B^2} + \Phi_2(\beta)$$

и подставить эти выражения в формулы (3.1)—(3.8).

Вопрос об определении краевого эффекта разобран в работе [2]. Если граничные условия таковы, что вдоль краев оболочки не будет иметь место интенсивное изменение усилий и перемещений, то искомые величины краевого эффекта выражаются простыми формулами через две произвольные функции от параметра, меняющегося вдоль края. Таким образом, наложение граничных условий не вызывает принципиальных затруднений.

В случае (A_2) напряженное состояние оболочки составится как сумма краевых эффектов вдоль краев и напряженного состояния, даваемого интегралом вида (b) системы уравнений (3.9).

Если при этом нас интересуют только напряжения в зонах, достаточно удаленных от краев, то краевые эффекты можно не вводить в рассмотрение и ограничиться только напряженным состоянием, обусловленным интегралом вида (b). В частности, когда края задаются уравнениями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ и речь идет о расчете цилиндрической или конической оболочек, решение системы (3.9) можно вести путем разложения по собственным функциям уравнений (7.3) или (7.8), удовлетворяя при этом нужным граничным условиям в каждом члене разложения в отдельности. Таких граничных условий можно поставить только по два на каждом крае; это объясняется тем, что мы отбросили произволы краевых эффектов. Поэтому только что описанный подход применим только тогда, когда среди каждой четверки граничных условий, которые надо ставить на каждом из краев, можно выделить два таких условия, что если они окажутся и неудовлетворенными, то это вызовет погрешности только вблизи $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$. В противном случае краевые эффекты отбрасывать нельзя и от метода разложения по собственным функциям систем (7.3) или (7.8) надо отказаться.

B. Оболочки, которые имеют края, совпадающие с асимптотическими линиями или касающиеся их.

Напряженное состояние такой оболочки, вообще говоря, составляется так же, как и для оболочки A_2. Однако в данном случае интеграл вида (b) может перейти в интеграл вида (c). Покажем это на примере цилиндрической оболочки, края которой задаются уравнениями $\alpha = 0$, $\alpha = l$, $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$. Будем искать решение уравнений (3.9) в виде

$$t = \sin\frac{\pi\alpha}{l}\,p(\beta), \qquad m = \sin\frac{\pi\alpha}{l}\,q(\beta)$$

Это соответствует расчету оболочки, свободно опертой на жесткие диафрагмы вдоль криволинейных краев $\alpha = 0$ и $\alpha = l$, в то время как прямолинейные края $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ некоторым образом загружены силами или моментами, изменяющимися по закону $\sin(\pi\alpha / l)$ или $\cos(\pi\alpha / l)$.

Легко видеть, что

$$\frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial t}{\partial\alpha} = -\frac{\lambda^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi\alpha}{l}\,p(\beta), \qquad \frac{\lambda^2}{B^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}B^2\frac{\partial m}{\partial\alpha} = -\frac{\lambda^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi\alpha}{l}\,q(\beta)$$

Сопоставляя это с соотношениями (4.5), мы увидим, что θ и ν будут в данном случае равны друг другу и их величина зависит от отношения λ к l, или, что то же самое, от отношения среднего радиуса кривизны к длине оболочки. При достаточно большом l числа θ и ν будут положительны, при достаточно малом l числа θ и ν могут стать равными нулю или сделаться отрицательными, а это и значит, что интеграл вида (b) перейдет в интеграл вида (c) и тогда применение системы уравнений (3.9) станет незаконным. Таким образом, область применимости уравнений (3.9) ограничена требованием, чтобы l было больше некоторой величины, которая зависит как от геометрических размеров оболочки, так и от граничных условий.

Представляет интерес и противоположный случай, когда l беспредельно увеличивается по сравнению с λ, так что мы переходим от оболочки к тонкостенному стержню. При этом будут беспредельно увеличиваться $\theta = \nu = \rho$. В силу уравнений (4.6) одновременно будет уменьшаться r; следовательно, мы перейдем (при $r < 0$) к интегралам типа (d).

Таким образом, можно установить связь излагаемых здесь результатов с развитой В. З. Власовым теорией расчета тонкостенных стержней, рассматриваемых как оболочки [6], на чем мы не будем здесь останавливаться, так как это требует дополнительных исследований.

Поступила в редакцию
11 VII 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

A. L. GOLDENWEISER.—APPROXIMATE CALCULATION OF THIN SHELLS OF ZERO GAUSS CURVATURE

A development of the author's previous work [1], the present paper is an analysis of properties of the stressed state of shells of zero Gauss curvature in case of a sufficiently small ratio $h^* = h/\lambda$ (where h is the thickness, λ is the characteristic linear dimension of the middle surface).

The system of equation (3.9) is set up, to the integration of which the solution of the problem of this shells of zero Gauss curvature may in many cases be reduced. In equations (3.9), the differential operator N is expressed by (5.3) and (5.4), the first concerning cylindrical shells, the second, conical and more general shapes of shells of zero Gauss curvature. The values t and m are functions of stress, in terms of which forces, moments and deformations are computed by formulae (3.1)—(3.8).

The system of equations (3.9) may be integrated by separating of variables for cylindrical and conical shells; this leads to the expansion of the results into a series of oscillating functions of a beam in the case of cylindrical shells, and of Bessel functions in the case of conical shells. This therefore comprises a proof and a generalization of the method suggested by V. Z. Vlasov for the calculation of cylindrical shells. The applicability of this approximate method requires, in the case of cylindrical shells, that they should be of sufficient length, and for conical shells, that the generatrix angle should not be too large.

The author goes on to the applicability of the method he developed in previous papers [1, 2] to the calculation of shells of zero Gauss curvature. This method consists of dividing the entire stressed state into momentless stressed state, stressed state arising due to moment and boundary effect. In addition to the general requirement that the boundary contours should not be tangential to the asymptotic lines of the middle surface, it is essential that cylindrical shells should not be too long, and that all the points of the conical shells should be at a sufficient distance from the vertex.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ. 1945. Т. XI. Вып. 6.
2. Гольденвейзер А. Л. Некоторые приемы интегрирования уравнений теории тонких оболочек. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1936.
4. Гольденвейзер А. Л. Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Лява. Сб. «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939.
5. Власов В. З. Строительная механика оболочек. Госстройиздат. 1936.
6. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат. 1940.