

**БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ОЧЕРЧЕННЫХ
 ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ**

В. Э. Власов

(Москва)

I. Основные уравнения. Функция напряжений. Уравнения равновесия тонкой безмоментной оболочки, очерченной по произвольно заданной поверхности, в линиях кривизны α и β будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial BT_1}{\partial \alpha} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial AS_2}{\partial \beta} + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + ABp_\alpha = 0, \quad T_1/R_1 + T_2/R_2 + p_\gamma = 0 \\ \frac{\partial AT_2}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial BS_1}{\partial \alpha} + S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + ABp_\beta = 0, \quad S_1 = S_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь α, β —координаты точки поверхности, $R_1 = R_1(\alpha, \beta)$ и $R_2 = R_2(\alpha, \beta)$ —главные радиусы кривизны α и β линий, $A = A(\alpha, \beta)$ и $B = B(\alpha, \beta)$ —коэффициенты первой квадратичной формы

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \quad (1.2)$$

Далее $p_\alpha = p_\alpha(\alpha, \beta)$, $p_\beta = p_\beta(\alpha, \beta)$, $p_\gamma = p_\gamma(\alpha, \beta)$ —заданные функции, представляющие собой компоненты внешней поверхности; нагрузки p_α, p_β направлены вдоль α - и β -линий, а p_γ —по внешней нормали.

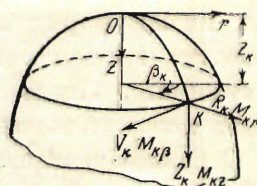
Искомыми функциями в уравнениях (1.1) являются внутренние усилия оболочки: нормальные T_1, T_2 и сдвигающие S_1 и S_2 ($S_1 = S_2 = S$), возникающие на линиях двух взаимно перпендикулярных сечений $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$. Усилия T_1, S_1 относятся к нормальному сечению, проведенному вдоль β -линии. Усилия T_2, S_2 относятся к нормальному сечению, проведенному вдоль α -линии.

Если оболочка очерчена по поверхности вращения (фиг. 1) и уравнение меридиана этой поверхности задано в форме $r = r(z)$, где r —расстояние до какой-либо точки меридиана от оси вращения Oz , то для коэффициентов A и B квадратичной формы (1.2) и радиусов кривизны R_1 и R_2 мы будем иметь формулы (штрихи означают производные по z)

$$A = (1 + r'^2)^{1/2}, \quad B = r, \quad R_1 = -\frac{(1 + r'^2)^{3/2}}{r''}, \quad R_2 = r(1 + r'^2)^{3/2} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) для оболочки вращения в случае однородной задачи ($p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = 0$) принимают вид

$$\frac{\partial rT_1}{\partial z} - r'T_2 + (1 + r'^2)^{1/2} \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad (1 + r')^{1/2} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial rS}{\partial z} + r'S = 0, \quad \frac{rr''}{1 + r'^2} T_1 = T_2 \quad (1.4)$$



Фиг. 1

В этих уравнениях через β обозначена угловая координата.

Выразим T_1 , T_2 и S через две функции $P = P(z, \beta)$, $Q = Q(z, \beta)$ по формулам

$$T_1 = \frac{(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}}{r} Q, \quad T_2 = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}} Q, \quad S = \frac{1}{r^2} P \quad (1.5)$$

При этом уравнение (1.4) приводится к системе уравнений

$$r^2 \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \frac{1}{rr''} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

Систему (1.4) можно привести и к одному уравнению, выразив T_1 , T_2 , S через функцию напряжений $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ следующими формулами (A_0 и B_0 — произвольные постоянные)

$$T_1 = \frac{(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}}{r} \left(A_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right), \quad T_2 = \frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}} \left(A_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right), \quad S = \frac{B_0}{r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.7)$$

При этом φ должна удовлетворять уравнению

$$r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2r' \frac{\partial \varphi}{\partial z} - r'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0 \quad (1.8)$$

К уравнению (1.8) в каждом частном случае должны быть присоединены граничные условия, заданные в соответствии с требованиями безмоментной теории на краях, ограничивающих данную оболочку (по одному статическому условию в каждой точке края).

2. Оболочки вращения, очерченные по поверхностям, меридианы которых имеют форму алгебраических кривых. Пусть уравнение меридиана оболочки вращения имеет вид $r = \lambda z^\mu$, здесь λ и μ — произвольно заданные постоянные. Легко показать, что гауссова кривизна таких поверхностей будет положительной при $0 < \mu < 1$ и отрицательной при $\mu < 0$ или $\mu > 1$.

Основное уравнение (1.8) при уравнении меридиана $r = \lambda z^\mu$ после замены независимой переменной z по формуле $z = e^\alpha$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + (2\mu - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mu(1 - \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0 \quad (2.1)$$

Мы приходим таким образом к уравнению с постоянными коэффициентами: оно будет эллиптического типа в случае оболочки положительной гауссовой кривизны и гиперболического типа в случае оболочки отрицательной гауссовой кривизны. Интегрирование уравнения (2.1) может быть проделано, например, методом разложения в тригонометрические ряды по переменной β .

3. Оболочки, очерченные по поверхностям второго порядка положительной гауссовой кривизны. Приложение теории функций комплексного переменного. Рассмотрим теперь оболочки вращения, очерченные по поверхности второго порядка. Пусть уравнение меридиана этой поверхности будет

$$r^2 = Az^2 + Bz \quad (3.1)$$

Начало отсчета координаты z , направленной по оси вращения, мы выбираем в верхнем полюсе оболочки. Ось Oz направляем сверху вниз (фиг. 2). В нашей работе [1] было показано, что уравнения (1.6) в случае (3.1) после

замены независимой переменной z через переменную α по формуле

$$\alpha = \log V|A| \frac{z}{\sqrt{Az^2 + Bz}} \quad (3.2)$$

для оболочек положительной гауссовой кривизны (эллиптической, сферической, параболической и гиперболической, очерченной по поверхности двухполостного гиперboloида) приводятся к уравнениям Коши-Римана

$$\frac{\partial \lambda P}{\partial \beta} + \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} - \frac{\partial \lambda P}{\partial \alpha} = 0 \quad \left(\lambda^2 = \frac{4}{B^2} \right) \quad (3.3)$$

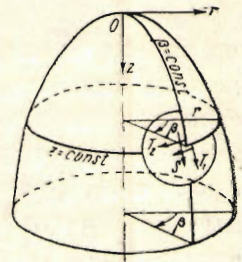
Здесь λ — константа, а B имеет значение, ясное из соотношения (3.1).

Таким образом, расчет оболочек вращения, очерченных по поверхности второго порядка положительной гауссовой кривизны и не нагруженных определенной поверхностной нагрузкой, приводится к определению одной аналитической функции $F = \lambda P + iQ$, действительная часть которой λP согласно формулам (1.5) пропорциональна сдвигающим силам S , а мнимая часть Q пропорциональна нормальным силам T_1 и T_2 . Для оболочек положительной гауссовой кривизны, очерченных по произвольным поверхностям второго порядка, безмоментная теория, как показано нами в работе^[2], приводится также к уравнениям Коши-Римана.

В дальнейшем вместо независимой переменной z удобнее ввести в рассмотрение новую переменную

$$\rho = e^\alpha = V|A| \frac{z}{\sqrt{Az^2 + Bz}} \quad (3.4)$$

Здесь A и B имеют то же значение, что и в (3.1). Угловую координату β мы оставляем без изменения. При таком преобразовании независимой переменной z все точки поверхности второго порядка отображаются на плоскость стереографической проекции. Вершина поверхности (точка $z=0$) переходит в точку $\rho=0$ горизонтальной плоскости, совпадающую с точкой пересечения этой плоскости с осью вращения Oz . Меридианы $\beta = \text{const}$ отображаются в полупрямые $\beta = \text{const}$, выходящие из точки $\rho=0$. Параллели $z = \text{const}$ переходят в окружности $\rho = \text{const}$.



Фиг. 2

4. Эллиптические и сферические оболочки под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной в произвольной точке и имеющей произвольно заданное направление. Расчет куполов. Рассмотрим более подробно эллиптическую оболочку (фиг. 2). Пусть a и b будут полуоси эллипса, из которых b лежит на оси вращения Oz . Уравнение (3.1), выражение (3.3) для λ и формула (3.4) для ρ соответственно принимают вид

$$r^2 = -\frac{a^2}{b^2} z^2 + \frac{2a^2}{b} z, \quad \lambda = \frac{2}{B} = \frac{b}{a^2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{z}{2b-z}} \quad (4.1)$$

Верхний полюс $z=0$ переходит в точку $\rho=0$, нижний $z=2b$ переходит в точку $\rho = \infty$ плоскости переменных $\rho\beta$. Средняя параллель $z=b$ переходит в окружность единичного радиуса $\rho=1$.

Формулы (1.5) в переменных ρ и β принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1+\rho^2}{4ab\rho^2} \sqrt{4(b^2-a^2)\rho^2 \pm a^2(1+\rho^2)^2} Q \\ T_2 &= -\frac{a}{4b\rho^2} \frac{(1+\rho^2)^2}{\sqrt{4(b^2-a^2)\rho^2 \pm a^2(1+\rho^2)^2}} Q \\ S &= \pm \frac{(1+\rho^2)^2}{4a^2\lambda\rho^2} \lambda P \end{aligned} \quad (4.2)$$

Предположим, что оболочка, очерченная по поверхности полного эллипсоида вращения, в точке $\rho = \infty$ (нижний полюс $z = 2b$) закреплена в пространстве как жесткое тело и неподвижно. Пусть в какой-либо точке K оболочки с координатами $z = z_k$, $\beta = \beta_k$ (на плоскости стереографической проекции в точке $\rho_k = \sqrt{z_k/(2b-z_k)}$, β_k) приложены заданные сосредоточенная нагрузка N_k и сосредоточенный момент M_k . Будем считать, что эта нагрузка уравнивается силами, приложенными в нижнем полюсе оболочки $z = 2b$ ($\rho = \infty$) и представляющими собой реакции введенных нами в этом полюсе связей (трех линейных и трех угловых). Искомая аналитическая функция

$$F(\zeta) = \lambda P(\rho, \beta) + iQ(\rho, \beta) \quad (4.3)$$

на плоскости независимого комплексного переменного $\zeta = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$ должна быть подобрана так, чтобы эта функция была регулярной всюду, за исключением точки (ρ_k, β_k) приложения заданной нагрузки N_k , M_k и точки $\rho = \infty$ приложения уравнивающих эту нагрузку опорных реакций. Кроме того, функция $F(\zeta)$ должна быть подобрана так, чтобы определяемые по формулам (4.2) внутренние силы оболочки во всех точках ее, за исключением двух названных ρ_k, β_k и $\rho = \infty$, имели ограниченные значения.

Поставленным условиям будет удовлетворять функция следующего вида:

$$F(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} (C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + C_4 \zeta^4) \quad (4.4)$$

Здесь C_2, C_3, C_4 — комплексные постоянные,

$$\zeta_k = \rho_k(\cos\beta_k + i\sin\beta_k)$$

комплексная координата точки приложения силы N_k или момента M_k .

А. Л. Гольденвейзер в работе [3] для сферической оболочки выбирает функции $F(\zeta)$ в несколько ином виде.

Проведем на оболочке вокруг точки ζ_k приложения заданной сосредоточенной нагрузки какую-нибудь замкнутую линию Γ . На часть оболочки, заключенную внутри контура Γ , будут действовать силы нормальные и сдвигающие, приложенные в точках контура Γ и заменяющие собой действие отброшенной части оболочки, находящейся вне контура Γ , и заданные сила и момент, приложенные в точке (ρ_k, β_k) и представленные в общем случае шестью компонентами. Выражая контурные силы, относящиеся к точкам линии Γ , при помощи общих формул (4.2), через основные сопряженные гармонические функции λP и Q , мы можем после некоторых математических преобразований условия равновесия части оболочки, находящейся

внутри контура Γ , представить в виде трех комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta - Z_k + i \frac{b}{a^2} (r_k V_k + M_{kz}) &= 0 \\ \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \mp \int_{\Gamma} F(\zeta) d\zeta - \frac{2b}{a} (R_k + iV_k) &= 0 \\ \int_{\Gamma} F(\zeta) d\zeta + \frac{1}{a} [z_k R_k - r_k Z_k + M_{k\theta} + i(z_k V_k - M_{kr})] &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

В этих уравнениях r_k — радиальная координата точки K , связанная с переменной z_k уравнением (4.1) $r_k = (2bz_k - z_k^2)^{1/2} a/b$, и в рассматриваемом случае эллиптической оболочки во втором уравнении надлежит взять верхний знак.

Величины R_k, V_k, Z_k представляют собой проекции вектора заданной силы N_k на направления соответственно радиальное Γ , перпендикулярное к оси вращения Oz , тангенциальное v , совпадающее с положительной касательной к параллели $z = z_k$, и z , параллельное оси Oz (фиг. 2). Величины $M_{kr}, M_{k\theta}, M_{kz}$ в формулах (4.5) обозначают проекции на оси r, v, z вектора момента M_k , приложенного в точке K .

Моменты $M_{kr}, M_{k\theta}, M_{kz}$ считаются положительными, если каждый из них при взгляде с положительной части соответствующей оси подвижной системы координат действует по часовой стрелке.

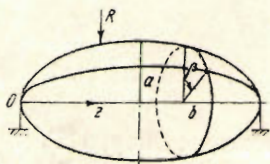
Если точка (ρ_k, β_k) приложения нагрузки находится вне контура Γ , то все интегралы, входящие в формулы (4.5), обращаются в нуль. Выбранная нами функция $F(\zeta)$ будет регулярной всюду, за исключением только двух точек, являющихся точками приложения сосредоточенных нагрузок, заданных (точка $\zeta = \zeta_k$) и реактивных (точка $\zeta = \infty$).

Мы не будем здесь приводить формул, которыми решается общая задача о расчете эллиптической оболочки при действии любой силы и любого момента, приложенных в произвольной точке, и ограничимся случаем, когда внешняя нагрузка состоит из одной только сосредоточенной силы N_k , заданной компонентами R_k, V_k, Z_k . Тогда для λP_k и Q_k получим формулы:

$$\begin{aligned} \lambda P_k = & \frac{\rho^2}{2\pi [\rho^2 - 2\rho\rho_k \cos(\beta - \beta_k) + \rho_k^2]^3} \left\{ \frac{2bR_k}{a(1+\rho_k^2)} [\rho^5 + 7\rho^3\rho_k^2 + 6\rho\rho_k^4] \sin(\beta - \beta_k) - \right. \\ & - (3\rho^4\rho_k + 9\rho^2\rho_k^3 + 2\rho_k^5) \sin 2(\beta - \beta_k) + (3\rho^3\rho_k^2 + 3\rho\rho_k^4) \sin 3(\beta - \beta_k) - \\ & - \rho^2\rho_k^3 \sin 4(\beta - \beta_k) \left. \right\} + \frac{2bV_k}{a(1+\rho_k^2)} [2\rho^4\rho_k + 3\rho^2\rho_k^3 - (\rho^5 + 7\rho^3\rho_k^2 + 3\rho\rho_k^4) \cos(\beta - \beta_k) + \\ & + (3\rho^4\rho_k + 6\rho^2\rho_k^3 + \rho_k^5) \cos 2(\beta - \beta_k) - \\ & - (2\rho\rho_k^4 + 3\rho^3\rho_k^2) \cos 3(\beta - \beta_k) + \rho^2\rho_k^3 \cos 4(\beta - \beta_k) \left. \right\} + \\ & + \frac{Z_k}{1+\rho_k^2} \left\{ (-2\rho^2\rho_k - 3\rho\rho_k^3 + 12\rho^3\rho_k^3 + 9\rho\rho_k^5 + 2\rho^5\rho_k) \sin(\beta - \beta_k) + \right. \\ & + (3\rho^2\rho_k^2 + \rho_k^4 - 15\rho^2\rho_k^4 - 6\rho^4\rho_k^2 - 3\rho_k^6) \sin 2(\beta - \beta_k) + \\ & \left. + (-\rho\rho_k^3 + 5\rho\rho_k^5 + 6\rho^3\rho_k^5) \sin 3(\beta - \beta_k) - 2\rho^2\rho_k^4 \sin 4(\beta - \beta_k) \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_k = \frac{\rho^2}{2\pi [\rho^2 - 2\rho\rho_k \cos(\beta - \beta_k) + \rho_k^2]^3} \left\{ \frac{2bR_k}{a(1 + \rho_k^2)} [6\rho^2\rho_k^3 + 3\rho^4\rho_k - \right. \\
 - (11\rho^3\rho_k^2 + 6\rho\rho_k^4 + \rho^5) \cos(\beta - \beta_k) + (2\rho_k^5 + 9\rho^2\rho_k^3 + 3\rho^4\rho_k) \cos 2(\beta - \beta_k) - \\
 - (3\rho\rho_k^4 + 3\rho^3\rho_k^2) \cos 3(\beta - \beta_k) + \rho^2\rho_k^2 \cos^4(\beta - \beta_k)] + \frac{2bV_k}{a(1 + \rho_k^2)} [- (5\rho^2\rho_k^2 + \\
 + 3\rho\rho_k^4 + \rho^5) \sin(\beta - \beta_k) + (3\rho^4\rho_k + 6\rho^2\rho_k^3 + \rho_k^5) \sin 2(\beta - \beta_k) - (3\rho^2\rho_k^2 + \\
 + 2\rho\rho_k^4) \sin 3(\beta - \beta_k) + \rho^2\rho_k^2 \sin 4(\beta - \beta_k)] + \frac{Z_k}{1 + \rho_k^2} [- 3\rho^2\rho_k^2 - \rho^4 + 9\rho^2\rho_k^4 + 5\rho^4\rho_k^2 + \\
 + (3\rho\rho_k^3 + 4\rho^3\rho_k - 9\rho\rho_k^5 - 18\rho^3\rho_k^3 - 2\rho^5\rho_k) \cos(\beta - \beta_k) + \\
 + (-\rho_k^4 - 3\rho^2\rho_k^2 + 3\rho_k^6 + 15\rho^2\rho_k^4 + 6\rho^4\rho_k^2) \cos 2(\beta - \beta_k) + \\
 \left. + (\rho\rho_k^3 - 5\rho\rho_k^5 - 6\rho^3\rho_k^3) \cos 3(\beta - \beta_k) + 2\rho^2\rho_k^4 \cos 4(\beta - \beta_k)] \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

На основе данного здесь решения при использовании формул (4.6) и (4.2) как функций влияния могут быть получены также в замкнутой аналитической форме решения для ряда новых задач по расчету эллиптической оболочки на произвольно заданную нагрузку, состоящую из сосредоточенных сил N_k , приложенных в различных произвольно заданных точках (ρ_k, β_k) ($k=1, 2, \dots, n$). Окончательные решения в этом случае получаются путем суммирования приведенных выше решений для единичной нагрузки



Фиг. 3

$$\lambda P = \sum_{k=1}^n \lambda P_k, \quad Q = \sum_{k=1}^n Q_k \quad (4.8)$$

Особыми точками, в которых внутренние силы принимают бесконечно большие значения, будут являться точки $\rho_1, \beta_1; \rho_2, \beta_2; \dots; \rho_n, \beta_n$ приложения внешних сосредоточенных сил N_1, N_2, \dots, N_n и точка $\rho = \infty$, соответствующая нижнему полюсу оболочки и играющая роль опорной (неподвижной) точки. Если внешняя нагрузка, состоящая в общем случае из n сосредоточенных сил N_1, \dots, N_n , представляет собою систему внешних сил, статически эквивалентную нулю, то реакции в точке нижнего полюса $\rho = \infty$ ($z = 2b$) будут равны нулю. В этом случае нижний полюс $\rho = \infty$ будет представлять собой обыкновенную точку, в которой, как и в любой ненагруженной точке оболочки, внутренние силы принимают конечные значения.

В качестве примеров рассмотрим некоторые задачи по расчету эллиптических оболочек, получающиеся из изложенного решения как частные случаи.

а) Тонкостенная однопролетная балка формы замкнутой эллиптической оболочки под действием сосредоточенной нагрузки R , проходящей через ось вращения Oz и направленной перпендикулярно к этой оси (фиг. 3). В этом случае по включению реакции $[(2b - z)/2b] R$ левой опоры $z = 0$ в число внешних сил мы будем иметь

$$\begin{aligned}
 \lambda P &= \frac{bR}{\pi a(1 + \rho_1^2)} \frac{\rho\rho_1^2(\rho_1^2 - \rho^2) \sin \beta}{(\rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos \beta + \rho_1^2)^2} \\
 Q &= \frac{bR}{\pi a(1 + \rho_1^2)} \frac{\rho_1^3\rho^2(\rho_1^2 + \rho^2)(3 + \cos 2\beta) - \rho_1^2\rho(\rho_1^4 + 6\rho_1^2\rho^2 + \rho^4) \cos \beta}{(\rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos \beta + \rho_1^2)^2} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Для внутренних сил получаем такие формулы:

$$T_1 = R \frac{(1 + \rho^2) \sqrt{a^2 (1 - \rho^2)^2 + 4b^2 \rho^2} \rho_1^3 \rho^2 (\rho_1^2 + \rho^2) (3 + \cos 2\beta) - \rho_1^2 \rho (\rho_1^4 + 6\rho_1^2 \rho^2 + \rho^4) \cos \beta}{4\pi a^2 \rho^2 (1 + \rho_1^2)} \frac{\rho_1^2 \rho (\rho_1^2 - \rho^2) \sin \beta}{(\rho^2 - 2\rho_1 \rho \cos \beta + \rho_1^2)^2} \quad (4.10)$$

$$T_2 = \frac{-R (1 + \rho^2)^3}{4\pi \rho^2 (1 + \rho_1^2) \sqrt{a^2 (1 - \rho^2)^2 + 4b^2 \rho^2}} \frac{\rho_1^3 \rho^2 (\rho_1^2 + \rho^2) (3 + \cos 2\beta) - \rho_1^2 \rho (\rho_1^4 + 6\rho_1^2 \rho^2 + \rho^4) \cos \beta}{(\rho^2 - 2\rho_1 \rho \cos \beta + \rho_1^2)^2}$$

В этих формулах, как и в формулах (4.9), ρ_1 обозначает собой координату на нулевом меридиане $\beta = 0$ точки приложения силы R , при этом

$$\rho_1 = \sqrt{z_1 / (2b - z_1)}$$

Угловая координата β отсчитывается от меридиана, проходящего через точку приложения силы. Угол β считается положительным, если этот угол при взгляде на параллель $z = \text{const}$ из точки $z = 0$ откладывается по часовой стрелке.

Полагая в формулах (4.10) $\rho_1 = 1$, получим формулы для случая, когда сосредоточенная сила приложена в средней точке верхнего (нулевого) меридиана. При $\rho_1 = 1, \rho = 1, \beta = \pi$ получаем простые формулы:

$$T_1 = \frac{Rb}{8\pi a^2}, \quad S = 0, \quad T_2 = -\frac{R}{8\pi b} \quad (4.11)$$

Этими формулами определяются внутренние силы в средней точке $\rho = 1 (z = b)$ нижнего меридиана $\beta = \pi$ от вертикальной нагрузки R , приложенной в средней точке $\rho = 1 (z = b)$ верхнего меридиана $\beta = 0$.

в) *Эллиптический купол, имеющий в плане форму окружности и свободно подпертый на горизонтальной плоскости* (фиг. 4).

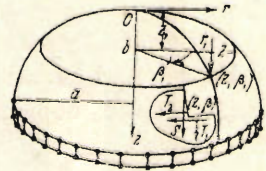
Пусть в точке (z_1, β_1) действует на купол вертикальная сосредоточенная сила Z , направленная параллельно оси Oz сверху вниз.

Предполагая, что купол по плоскости параллели $z = b$ наибольшего радиуса $r = a$ закреплен от одних только вертикальных перемещений и имеет, следовательно, свободную подвижность в направлениях сдвигающих сил, мы должны комплексную функцию $F(\zeta)$ определить так, чтобы действительная часть этой функции λP во всех точках параллели $z = b$ (или на плоскости стереографической проекции в точках окружности радиуса $\rho = 1$) обращалась в нуль.

Кроме того, функция $F(\zeta)$ в точке $\rho_1 = \sqrt{z_1 / (2b - z_1)}$ должна иметь полюс третьего порядка, соответствующий приложенной в этой точке силе Z .

При этих условиях для искомых функций λP и Q на основании общих формул (4.6), (4.7) и (4.8) по применению метода инверсии (условия о симметрии относительно окружности $\rho = 1$) получаем формулы

$$\lambda P = Z (\lambda P_1 - \lambda P_2), \quad Q = Z (Q_1 - Q_2) \quad (4.12)$$



Фиг. 4

Здесь

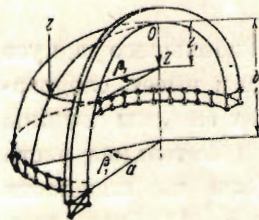
$$\begin{aligned} \lambda P_1 &= \frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho_1^2)[\rho^2-2\rho\rho_1\cos(\beta-\beta_1)+\rho_1^2]^3} [(1-2\rho^3\rho_1-3\rho\rho_1^3+12\rho^3\rho_1^3+ \\ &+ 9\rho\rho_1^5+2\rho^5\rho_1)\sin(\beta-\beta_1)+(3\rho^2\rho_1^2+\rho_1^4-15\rho^2\rho_1^4-6\rho^4\rho_1^2-3\rho_1^6)\sin 2(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (-\rho\rho_1^3+5\rho\rho_1^5+6\rho^3\rho_1^3)\sin 3(\beta-\beta_1)-2\rho^2\rho_1^4\sin 4(\beta-\beta_1)] \\ \lambda P_2 &= \frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho_1^2)[\rho_1^2\rho-2\rho_1\rho\cos(\beta-\beta_1)+1]^3} [(-2\rho^3\rho_1^7-3\rho\rho_1^5+12\rho^3\rho_1^5+ \\ &+ 9\rho\rho_1^3+2\rho^5\rho_1^7)\sin(\beta-\beta_1)+(3\rho^2\rho_1^6+\rho_1^4-15\rho^2\rho_1^4-6\rho^4\rho_1^6-3\rho_1^2)\sin 2(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (-\rho\rho_1^5+5\rho\rho_1^3+6\rho^3\rho_1^5)\sin 3(\beta-\beta_1)-2\rho^2\rho_1^4\sin(\beta-\beta_1)] \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho_1^2)[\rho^2-2\rho\rho_1\cos(\beta-\beta_1)+\rho_1^2]^3} [-3\rho^2\rho_1^2-\rho^4+9\rho^2\rho_1^4+ \\ &+ 5\rho^4\rho_1^2+(3\rho\rho_1^3+4\rho^3\rho_1-9\rho\rho_1^5-18\rho^3\rho_1^3-2\rho^5\rho_1)\cos(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (-\rho_1^4-3\rho^2\rho_1^2+3\rho_1^6+15\rho^2\rho_1^4+6\rho^4\rho_1^2)\cos 2(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (\rho\rho_1^3-5\rho\rho_1^5-6\rho^3\rho_1^3)\cos 3(\beta-\beta_1)+2\rho^2\rho_1^4\cos 4(\beta-\beta_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\rho^2}{2\pi(1+\rho_1^2)[\rho_1^2\rho-2\rho_1\rho\cos(\beta-\beta_1)+1]^3} [-3\rho^2\rho_1^6-\rho^4\rho_1^8+ \\ &+ 9\rho^2\rho_1^4+5\rho^4\rho_1^6+(3\rho\rho_1^5-18\rho^3\rho_1^5-2\rho^5\rho_1^7)\cos(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (-\rho_1^4-3\rho^2\rho_1^6+3\rho_1^2+15\rho^2\rho_1^4+6\rho^4\rho_1^6)\cos 2(\beta-\beta_1)+ \\ &+ (\rho\rho_1^5-5\rho\rho_1^3-6\rho^3\rho_1^5)\cos 3(\beta-\beta_1)+2\rho^2\rho_1^4\cos 4(\beta-\beta_1)] \end{aligned}$$

Из формул (4.12) и (4.13) следует, что функция λP на окружности тождественно обращается в нуль, что соответствует условию отсутствия на опорной параллели $z=b$ сдвигающих сил S . Функция же Q при $\rho=1$ отлична от нуля. Этой функцией вместе со второй формулой (4.2) при $\rho=1$ определяются опорные вертикальные реакции в любой точке β опорной линии $z=b$.

с) *Часть эллиптического купола, ограниченная двумя взаимно перпендикулярными центральными плоскостями* (фиг. 5). Купол представляет собой



Фиг. 5

часть эллипсоида вращения, ограниченную плоскостями: вертикальной, проходящей через ось вращения Oz , и горизонтальной, проходящей через центр эллипса и пересекающейся с поверхностью эллипсоида по параллели наибольшего радиуса $r=a$. Мы будем считать, как это обычно в строительных сооружениях и бывает, что эллиптический купол на горизонтальной опорной линии $z=b$ закреплен от одних только вертикальных перемещений (купол свободно опирается на горизонтальную плоскость $z=b$), а на вертикальной опорной линии все точки купола закреплены от перемещений только в плоскости этой линии и могут свободно перемещаться в направлении, перпендикулярном к этой плоскости.

Условиям для определения функций будут служить обращение в нуль действительной части λP этой функции, пропорциональной сдвигающим силам, во

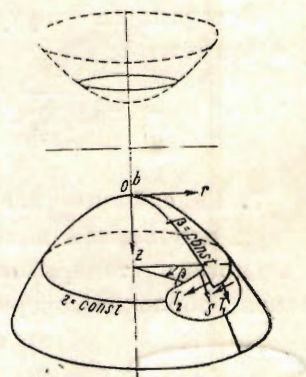
всех точках полуокружности $\rho = 1$, и мнимой части Q , пропорциональной нормальным силам T_2 , во всех точках другой части контура, представляющего собой на плоскости переменных ρ, β диаметр полукруга единичного радиуса.

Решение этой смешанной в смысле граничных условий задачи легко получается путем некоторого обобщения предыдущей задачи. Для этого достаточно эллиптический купол загрузить двумя равными по величине и противоположно направленными вертикальными силами, приложенными в двух симметрично расположенных относительно меридиана $\beta = 0$ точках (ρ_1, β) и $(\rho_1, -\beta)$ и в соответствии с принципом независимости действия сил применить формулы (4.12) и (4.13). Внутренние силы T_1, T_2, S по определению функций λP и Q вычисляются по общим формулам (4.2).

5. Гиперболическая оболочка положительной гауссовой кривизны. Для гиперболической оболочки положительной гауссовой кривизны, очерченной по поверхности одной нижней половины двухполостного гиперboloида вращения (фиг. 6), уравнение меридиана (3.1) и выражения (3.3), (3.4) для λ и ρ соответственно будут

$$r = \frac{a^2}{b^2}(z^2 + 2bz) \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad \rho = \sqrt{\frac{z}{2b+z}} \quad (5.1)$$

Вся нижняя половина гиперboloида при замене по третьей формуле (5.1) координаты z новой переменной ρ и сохранении угловой координаты β отображается на круг единичного радиуса. Центру этого круга соответствует вершина гиперboloида $r = 0$. Окружности $\rho = 1$ соответствует бесконечно удаленная параллель $z = \infty$, радиус которой r будет равен также бесконечности. Искомая аналитическая функция $F(\zeta)$ для рассматриваемой здесь гиперболической оболочки



Фиг. 6.

положительной гауссовой кривизны при действии на оболочку сосредоточенной нагрузки (в общем случае силы и моменты), приложенной в какой-либо точке (ρ_k, β_k) , определяется также формулой (4.4). Входящие в эту формулу три комплексные константы определяются, как и в случае эллиптической оболочки, из шести условий равновесия. Эти шесть статических условий представляются в форме трех комплексных уравнений (3.5), а формулы (1.5) для усилий в переменных ρ и β принимают вид (4.2), причем в рассматриваемом случае гиперболической оболочки в двойных знаках надлежит принять нижние.

6. Параболическая оболочка. Для оболочек параболических уравнение меридиана и выражения для λ и ρ соответственно будут

$$r^2 = 2pz, \quad \lambda = \frac{1}{p}, \quad \rho = \sqrt{\frac{z}{p}} \quad (6.1)$$

Поверхность параболоида вращения в переменных ρ и β отображается на всю плоскость, перпендикулярную к оси вращения Oz .

Функция $F(\zeta)$ для случая сосредоточенной нагрузки, приложенной в какой-нибудь точке (ρ_k, β_k) и состоящей в общем случае из трех сил

R_k, V_k, Z_k и трех моментов M_{kr}, M_{kv}, M_{kz} , будет иметь прежний вид (4.4). Константы C_2, C_3, C_4 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta - Z_k + \frac{i}{\rho} (V_k r_k + M_{kz}) &= 0 \\ \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta - \sqrt{2} (R_k + iV_k) &= 0 \\ \int_{\Gamma} F(\zeta) d\zeta + \frac{\sqrt{2}}{\rho} [R_k z_k - Z_k r_k + M_{kv} - i(V_k z_k - M_{kr})] &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

выражающих в комплексной форме все шесть условий равновесия части оболочки, ограниченной произвольно выбранной на поверхности замкнутой линией Γ .

Формулы для внутренних сил параболической оболочки в переменных ρ и β имеют вид

$$T_1 = \frac{\sqrt{1+2\rho^2}}{2\rho^2} Q, \quad S = \frac{1}{2\rho^2} P, \quad T = -\frac{1}{2\rho^2 \sqrt{1+2\rho^2}} Q \quad (6.3)$$

7. Гиперболические оболочки отрицательной гауссовой кривизны. Критерий мгновенной изменяемости оболочек как изгибаемых поверхностей. Рассмотрим теперь оболочку отрицательной гауссовой кривизны. Пусть такая оболочка очерчена по поверхности двухполостного гиперboloида вращения (фиг. 7). Уравнение меридиана поверхности в центральных осях r и z имеет вид

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (7.1)$$

Отсюда находим

$$r = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}, \quad r' = \frac{a^2 z}{b^2 r}, \quad r'' = \frac{a^4}{b^2 r^3} \quad (7.2)$$

Уравнения (1.6), справедливые для любой оболочки вращения, принимают вид

$$r^2 \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \frac{b^2}{a^4} r^2 \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (7.3)$$

Вводя вместо координаты z новую переменную α и полагая

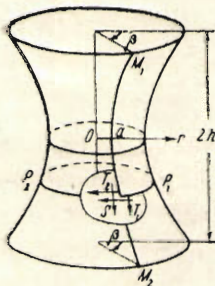
$$\frac{br^2 dz}{a^2 dz} = 1, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{i}{2} \log \frac{bi+z}{bi-z} \quad (7.4)$$

получим

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda P}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda P}{\partial z} = 0 \quad \left(\lambda = \frac{b}{a^2} \right) \quad (7.5)$$

Вводя теперь новую функцию напряжений φ по формулам

$$Q = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad P = -\frac{a^2}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (7.6)$$



Фиг. 7.

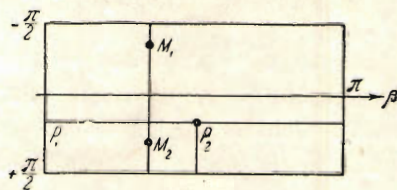
удовлетворяющим тождественно при $\lambda = b/a^2$ первому уравнению (7.5), из второго уравнения получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0 \tag{7.7}$$

Это и будет основное дифференциальное уравнение гиперболического типа для рассматриваемой гиперболической оболочки отрицательной гауссовой кривизны. В этом уравнении β — угловая координата, изменяющаяся для поверхности вращения в пределах $-\pi \leq \beta \leq \pi$; другая безразмерная координата α связана с переменной z формулой (7.4).

Формулы (1.5), принимая во внимание (7.2) и (7.4) для рассматриваемой здесь оболочки при отображении ее на прямоугольник (в переменных α, β (фиг. 8)), принимают вид

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{ab} \cos \alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ S &= -\frac{1}{b} \cos^2 \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ T_2 &= \frac{a \cos^3 \alpha}{b \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \end{aligned} \tag{7.8}$$



Фиг. 8.

Здесь $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ определяется из уравнения (7.7) и граничных условий, заданных для оболочки вращения на краях $\alpha = \alpha_1 > -\frac{1}{2}\pi$ и $\alpha = \alpha_2 < \frac{1}{2}\pi$.

Рассмотрим оболочку, имеющую по оси вращения заданную высоту $2h$ (фиг. 7). Для такой оболочки переменная z изменяется в пределах от $z = -h$ до $z = +h$. Новая переменная α будет изменяться в пределах от $\alpha = -\alpha_1$ для верхней крайней параллели $z = -h$ до $\alpha = +\alpha_1$ для нижней крайней параллели $z = +h$. Величина α_1 при заданном h определяется по формуле

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \tag{7.9}$$

получающейся при $z = h$ из второй формулы (7.4).

Предположим, что на оболочку по каждому из ее краев $z = +h$ и $z = -h$ ($\alpha = \pm \alpha_1$) действуют нормальные силы, распределенные на параллели по закону одной и той же периодической функции, например, по закону $\cos n\beta$, где n — любое целое число. Такая нагрузка при n , отличном от единицы, для каждого из краев оболочки представляет собой уравновешенную систему внешних сил. При $n = 1$ эта нагрузка приводится к изгибающему моменту и поперечной силе, действующей перпендикулярно к оси вращения. Полагая в уравнении (7.7) в соответствии с рассматриваемыми здесь граничными условиями

$$\varphi(\alpha, \beta) = \Psi_n(\alpha) \sin n\beta \tag{7.10}$$

получаем для $\Psi_n(\alpha)$ с точностью до двух произвольных постоянных A_n и B_n функцию

$$\Psi_n(\alpha) = A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha \tag{7.11}$$

Граничные условия, заданные в отношении нормальных сил T_1 на краях

$\alpha = \pm \alpha_1$, при законе распределения этих сил по $\cos n\beta$ принимают вид:
при $\alpha = -\alpha_1$

$$nA_n \sin n\alpha_1 + nB_n \cos n\alpha_1 = C_n$$

при $\alpha = +\alpha_1$

$$-nA_n \sin n\alpha_1 + nB_n \cos n\alpha_1 = D_n \quad (7.12)$$

Здесь C_n и D_n —некоторые постоянные величины, пропорциональные амплитудам заданных на краях $\alpha = \pm \alpha_1$ нормальных нагрузок, распределенных по закону $\cos nx$.

Из уравнений (7.12) находим

$$A_n = \frac{n \cos n\alpha_1}{\Delta_n} (C_n - D_n), \quad B_n = \frac{n \sin n\alpha_1}{\Delta_n} (C_n + D_n) \quad (7.13)$$

Здесь $\Delta_n = n^2 \sin 2n\alpha_1$ —определитель системы (7.12), обращающийся в нуль при $2n\alpha_1 = k\pi$, где k , как и n , может принимать значение любого целого числа.

Из приведенного здесь решения следует, что если величина $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}\pi$, характеризующая размер оболочки по оси вращения, и n представляют собой такие числа, что выполняется условие $2n\alpha_1 = k\pi$, то постоянные A_n , B_n , а следовательно, и все внутренние силы оболочки в случае нагрузки, заданной на краях $\alpha = \pm \alpha_1$ (при $C_n \neq 0$ или $D_n \neq 0$), принимают бесконечные значения. Если положить $C_n = D_n = 0$, что соответствует отсутствию нагрузки, то при $\alpha_1 = \frac{1}{2}k\pi/n < \frac{1}{2}\pi$ мы получаем для A_n и B_n неопределенные решения. Это означает, что в данном случае оболочка ведет себя подобно мгновенно изменяемой стержневой системе и расчет ее по безмоментной теории невозможен.

Поступила в редакцию
5 IV 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

V. Z. VLASOV.—MOMENTLESS THEORY OF THIN SHELLS OF REVOLUTION

The paper gives the solution of a number of problems of the calculation of thin momentless shells of revolution, in case of given arbitrary loads. In case of shells with a surface of the second order and of positive Gauss curvature, by means of replacing the variables the equations of the momentless theory are reduced to the Cauchy—Riemann equations. The investigation includes a number of problems of elliptical, spherical and parabolic cupolas.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Расчет оболочек вращения на несимметричную нагрузку. Статья, напечатанная в журнале «Проект и стандарт», № 3 и 4. Госстройиздат. 1937.
2. Власов В. З. Расчет оболочек, очерченных по центральным поверхностям второго порядка. Статья, напечатанная в сборнике ЦНИПС «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939.
3. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 6.