Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, Том XI, 1947

К ВОПРОСУ О ТОНКОМ ТРЕУГОЛЬНОМ КРЫЛЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

М. И. Гуревич

(Москва)

Настоящая заметка дополняет статью М. Д. Хаскинда и С. В. Фальковича (см. стр. 371). В ней рассматривается вопрос о том, как следует дополнить их решение в том случае, когда часть крыла выходит из конуса Маха. От частоты k зависят только легко определимые функции $\psi_n(\zeta)$, вырождающиеся при $k=0$ в степенные. Граничные условия для определения $\varkappa_n(\xi, \eta)$ имеют одинаковый характер при любой частоте. Поэтому задача об установившемся обтекании тонкого произвольного крыла эквивалентна задаче о колебаниях его. Для определенности мы остановимся на первой.

Задача определения потенциала скоростей внутри конуса Маха сведена М. Д. Хаскиндом и С. В. Фальковичем к нахождению функций $W_n(\tau)=U_n+iV_n$, причем на части действительной полуоси, соответствующей крылу, V_n является известной функцией $\xi>0$, а на остальных частях полуоси $\xi>0$ и на оси η (конус Маха) $U_n=0$. Когда части крыла выходят из конуса Маха, то на мнимой полуоси U_n уже не будет равно нулю. Однако ясно, что если найти потенциал скоростей вне конуса Маха и затем значения $U_n(0, \eta)$ на конусе Маха, то задача определения $W_n(\tau)$ легко решается методами теории функций комплексного переменного.

§ 1. Общее решение уравнения неразрывности. Пусть мы имеем слабо изогнутое тонкое треугольное крыло OAB, лежащее в плоскости $z=0$, причем ось x параллельна скорости потока. Начало координат совпадает с вершиной крыла O, крыло обрезано плоскостью $x=1$. Потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ будет удовлетворять волновому уравнению

$$-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (A\sqrt{M^2-1}=1) \tag{1.1}$$

где M — число Маха. Введем новые переменные

$$Ax=i\varepsilon\cos\vartheta, \qquad y=\varepsilon\cos\sigma\sin\vartheta, \qquad z=\varepsilon\sin\sigma\sin\vartheta. \tag{1.2}$$

Заметим, что $i\varepsilon=\zeta^*=\sqrt{A^2x^2-y^2-z^2}$, причем внутри конуса Маха действительно ζ^*, а вне конуса Маха действительно ε. На конусе Маха $\varepsilon=\zeta^*=0$. Представим φ в виде

$$\varphi=\varepsilon\varphi_1(\vartheta, \sigma)+\varepsilon^2\varphi_2(\vartheta, \sigma)+\ldots+\varepsilon^n\varphi_n(\vartheta, \sigma)+\ldots \tag{1.3}$$

Тогда функция φ_n будет удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^2\varphi_n+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\sigma^2}+n(n+1)\varphi_n=0 \tag{1.4}$$

Как это следует из (1.2), вне конуса Маха ϑ является комплексной величиной. Введем новое переменное θ по формуле $\sin\theta\sin\vartheta=1$. Тогда (1.2) и (1.4) примут вид

$$Ax=\varepsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad y=\varepsilon\frac{\cos\sigma}{\sin\theta}, \quad z=\varepsilon\frac{\sin\sigma}{\sin\theta}, \quad \theta=\arccos\frac{Ax}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \sigma=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y} \tag{1.5}$$

$$-\sin^2\theta\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\theta^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\sigma^2}+n(n+1)\varphi_n=0 \tag{1.6}$$

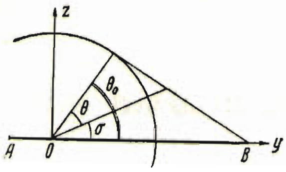
Из (1.5) следует, что θ действительная величина. Общее решение (1.6) имеет вид

$$\varphi_n=\sin^{n+1}\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n\frac{U_n^*(\sigma\pm\theta)}{\sin\theta} \tag{1.7}$$

При $x>0$, $yz>0$ перед θ следует брать знак плюс, а при $x>0$, $yz<0$ — минус.

§ 2. Граничные условия. Предположим, что нормальная скорость на крыле вне конуса Маха задана в виде ряда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} f_n(\theta)\sin\theta$$



Фиг. 1.

Так как

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{y} = \frac{\sin\theta}{\varepsilon}$$

то на крыле

$$\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=0} = f_n(\theta) \tag{2.1}$$

Рассмотрим для определенности течение при $y>0$, $z>0$, при этом U_n^* является функцией только $\sigma+\theta$. Пользуясь равенством $\partial U_n^*/\partial\sigma = \partial U_n^*/\partial\theta$, после перестановки порядка дифференцирования получим граничное условие в виде

$$f_n(\theta) = \sin^{n+1}\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{n+1} U_n^*(\theta) \tag{2.2}$$

Формула (2.2) является дифференциальным уравнением для определения $U^*_n(\theta)$. Заменяя в $U_n^*(\theta)$ переменную θ через $\theta+\sigma$ и вставляя в (1.7), находим φ_n. Константы, появляющиеся при интегрировании уравнения (2.2), мы должны выбирать такими, чтобы на конце крыла (при $\theta=\theta_0$) функция U_n^* и все ее производные до порядка n включительно равнялись нулю. В самом деле, вне конусов Маха, проведенных из передней кромки крыла OB, $\varphi=0$. В первой четверти плоскости $x=1$ эти конусы Маха вырезают область (фиг. 1), ограниченную прямой $\theta+\sigma=\theta_0$. На последней φ и φ_n также равны нулю. Но согласно (1.7) мы можем φ_n представить в виде суммы произведений U_n^* и n ее производных на некоторые функции θ, откуда следуют упомянутые условия. Поэтому

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,d\theta\ldots\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,d\theta\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{f_n(\theta)\,d\theta}{\sin^n\theta} = U_n^*(\theta) \tag{2.3}$$

§ 3. Значение потенциала скоростей на конусе Маха. Пользуясь (1.3), (1.5) и (1.7) при $\varepsilon\to 0$, т. е. на конусе Маха, находим

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 1.3\ldots(2n-1)\,(Ax)^n U_n^*(\sigma) \tag{3.1}$$

Для случая установившегося движения крыла, когда внутри конуса Маха φ задано в виде $\zeta^{*}\varkappa_1(\xi,\eta)+\zeta^{*2}\varkappa_2(\xi,\eta)+\ldots+\zeta^{*n}\varkappa_n(\xi,\eta)+\ldots$ можно, следуя методу М. Д. Хаскинда и С. В. Фальковича, получить на конусе Маха

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(2n)!\,(Ax)^n(1+\cos\sigma)^n U_n(0,\eta) \tag{3.2}$$

где $\eta=-\mathrm{tg}(\sigma/2)$. Сравнивая (3.1) и (3.2), находим значения $U_n(0,\eta)$ на конусе Маха:

$$U_n(0,\eta) = \frac{(-1)^n U_n^*(\sigma)}{2^n n!\,(1+\cos\sigma)^n} \tag{3.3}$$

Поступила в редакцию
9 IV 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

M. I. GUREVICH.—ON THE THIN TRIANGULAR WING AT SUPERSONIC SPEED

The note is an addition to the papers of M. D. Haskind and S. V. Falkovich printed in this number (page 371). The wing is taken as partially outside the Mach cone. The solution of equation (1.1) outside the Mach cone is sought in the form (1.3). Equation (1.6) is obtained for φ_n. The independent variables σ and θ are determined by formulae (1.5). The boundary conditions on the wing (2.1) yield the differential equation (2.2) for $U_n^*(\theta)$. In integrating this equation, the condition must be observed that function U_n^* and its n derivates are equal to zero on the forward edge of the wing outside the Mach cone. Function φ_n is found from (1.7) by means of (2.3). The values of φ approaching the Mach cone from the outside and inside are determined by formulae (3.1) and (3.2) respectively, leading to (3.3). Having determined φ on the Mach cone the flow inside the Mach cone may be determined by the methods of Haskind and Falkovich.