Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

К ТЕОРИИ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С. В. Фалькович

(Москва)

В заметке указывается метод определения потенциала скоростей возмущенного движения газа, возникающего при движении со сверхзвуковой скоростью тонкого слабо изогнутого крыла. Этот прием опирается на классический метод Вольтерра решения задачи Коши для уравнения цилиндрических волн. Применение этого метода позволяет также определить потенциал скоростей для случая, когда крыло совершает малые гармонические колебания около сверхзвукового поступательного движения.

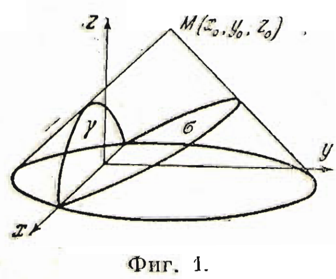
1. Как известно (см., например, Гурса [1]) значение функции $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

в какой-либо точке $M(x_0, y_0, z_0)$, определяется формулой Вольтерра

$$\varphi(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_S\left(v\frac{d\varphi}{dN}-\varphi\frac{dv}{dN}\right)d\sigma \tag{1.2}$$

Здесь интегрирование производится по части поверхности S, несущей данные Коши



Фиг. 1.

и попадающей внутрь прямого круглого конуса с прямым углом при вершине, расположенной в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, а v — фундаментальная функция Вольтерра:

$$v=\log\left(\frac{z_0-z}{r}-\sqrt{\frac{(z_0-z)^2}{r^2}-1}\right)$$

$$\left(r=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}\right) \tag{1.3}$$

и оператор d/dN есть производная по конормали

$$\frac{d}{dN}=\frac{\partial}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial}{\partial y}\cos(n, y)-\frac{\partial}{\partial z}\cos(n,z) \tag{1.4}$$

Пусть поверхность S состоит из двух частей σ и γ (фиг. 1), где σ есть часть плоскости $z=y$, попадающей внутрь конуса, а γ — область, ограниченная гиперболой и осью x, получающаяся при пересечении конуса с плоскостью $y=0$. Из (1.4) следует, что направление конормали на σ совпадает с касательной к σ, следовательно, на σ достаточно задать лишь значения функции φ. Примем их равными нулю, тогда, пользуясь (1.3) и (1.4), запишем равенство (1.2) в виде

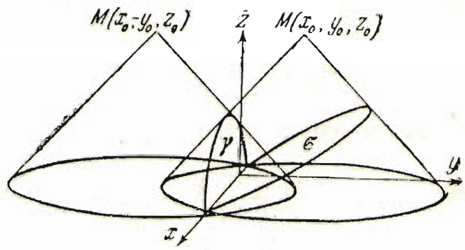
$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\Bigg[\iint\limits_{\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial y}\log\left(\frac{z_0-z}{r}+\sqrt{\frac{(z_0-z)^2}{r^2}-1}\right)d\gamma + {}$$

$$+\iint\limits_{\gamma}\varphi\frac{y_0(z_0-z)}{r^2\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}}\,d\gamma\Bigg] \tag{1.5}$$

Легко видеть[1], что первый интеграл можно продифференцировать по z_0, после чего формула (1.5) примет вид

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_{\gamma}\varphi\frac{y_0(z_0-z)}{r^2\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}}\,d\gamma + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\gamma}{\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}} \tag{1.6}$$

Известно, что значения φ и $\partial\varphi/\partial y$ при $y=0$ не являются независимыми величинами, поэтому исключим $\varphi(x, 0, z)$ из формулы (1.6), пользуясь обычным приемом, применяе-



Фиг. 2.

мым при решении задачи Дирихле для полуплоскости. Построим конус (фиг. 2) с вершиной в точке $M'(x_0, -y_0, z_0)$. Интегрируя по объему τ, общему для обоих конусов (фиг. 2), будем иметь

$$\iiint\limits_{\tau}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)v-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\varphi\right]d\tau = 0$$

Преобразуя этот интеграл в интеграл по поверхности и принимая во внимание, что $\varphi=0$ на σ, будем иметь

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_0}\iint\limits_{\gamma}\varphi\frac{y_0(z_0-z)\,d\gamma}{r^2\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}} + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\gamma}{\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}} \tag{1.7}$$

Складывая почленно (1.6) и (1.7), получим окончательно

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\gamma}{\sqrt{(z_0-z)^2-r^2}}$$

$$\left(r^2=\sqrt{(x_0-x)^2+y_0^2}\right) \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим вместо уравнения (1.1) уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\lambda^2\varphi = 0 \tag{2.1}$$

[1] При этом нужно принимать во внимание зависимость области интегрирования от z.

Тогда для фундаментальной функции Вольтерра вместо (1.3) будем иметь [3]

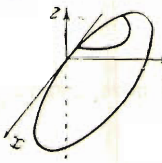
$$v = \int \frac{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{(z_0 - z)^2 - r^2}}{\sqrt{(z_0 - z)^2 - r^2}}\, dz_0 \qquad \left(r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}\right) \tag{2.2}$$

Повторяя проделанные выше рассуждения, найдем, что интеграл уравнения (2.1), производная которого $\partial\varphi / \partial y$ на γ принимает заданное значение, и обращающийся в нуль на σ, имеет вид

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\operatorname{ch}\left[\lambda \sqrt{(z_0 - z)^2 - r^2}\right]}{\sqrt{(z_0 - z)^2 - r^2}}\, d\gamma \qquad \left(r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}\right) \tag{2.3}$$

Поверхность σ (фиг. 1) может быть произвольной линейчатой поверхностью, образованной из бихарактеристических прямых уравнений (1.1) или (2.1).

3. Рассмотрим тонкое, слабо изогнутое крыло, движущееся под малым углом атаки со сверхзвуковой скоростью u в направлении, противоположном оси z (фиг. 3). Предположим, что форма в плане такова, что конусы Маха с вершинами, лежащими на передней кромке крыла, пересекают его или касаются. Пусть уравнение поверхности крыла будет $y = f(x, z)$. Линеаризируя задачу и перенося граничное условие с поверхности крыла на плоскость $y = 0$, будем иметь для определения потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ абсолютного движения, в системе координат, связанной с крылом, уравнения



Фиг. 3.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = U \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \tag{3.1}$$

Полагая $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^* \sqrt{M^2 - 1}$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{*2}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} = \frac{U}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial f^*(x^*, z^*)}{\partial z^*} \tag{3.2}$$

к уравнениям (3.2) нужно добавить условие обращения φ в нуль на поверхности, огибающей конусы Маха с вершинами, лежащими на передней кромке.

Легко видеть, что решение задачи получается при помощи формулы (1.8)

$$\varphi(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = \frac{u}{\pi \sqrt{M^2 - 1}} \iint_\gamma \frac{\partial f^*(x^*, z^*)}{\partial z^*} \frac{d\gamma}{\sqrt{(z_0^* - z^*)^2 - r^2}} \tag{3.3}$$

Здесь γ — область, указанная на фиг. 3. Формула (3.3) определяет значения потенциала скоростей φ в области, расположенной между поверхностью крыла и огибающей поверхностью конуса Маха с вершинами, лежащими на контуре крыла.

4. При тех же предположениях, что и выше, рассмотрим гармонические колебания с частотой ω крыла, двигающегося со сверхзвуковой скоростью [1] u в направлении, противоположном оси z (фиг. 3). В этом случае для потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$ абсолютного движения в системе координат, движущейся поступательно с той же скоростью u в том же направлении, что и крыло, имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{M}{a} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

---

[1] Задача о колеблющемся крыле другим методом рассмотрена в работе Е. А. Красильщиковой [3].

Если уравнение поверхности крыла представить в виде

$$y(x, z, t) = f_0(x, z) + f_1(x, z)\cos\omega t + f_2(x, z)\sin\omega t$$

то на поверхности крыла будем иметь условие обтекания [4]

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = Z_0(x, z) + Z_1(x, z)\cos\omega t + Z_2(x, z)\sin\omega t \qquad (4.2)$$

где

$$Z_0 = -u\frac{\partial f_0}{\partial z}, \qquad Z_1 = \omega f_2 - u\frac{\partial f_1}{\partial z}, \qquad Z_2 = -\omega f_1 - u\frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Положим в уравнении (4.1)

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) + \operatorname{Re}\varphi(x, y, z)\, e^{i(\omega t + kz)} \qquad \left(k = \frac{\omega M}{a(M^2-1)}\right) \qquad (4.3)$$

Здесь $\varphi_0(x, y, z)$ — потенциал скоростей, соответствующий поступательному движению, а $\varphi(x, y, z)$ — потенциал скоростей, отвечающий колебанию крыла, тогда для $\varphi(x, y, z)$ будем иметь

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - (M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \lambda^2\varphi = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{\omega}{u\sqrt{M^2-1}}\right) \qquad (4.4)$$

на поверхности крыла

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = iZe^{-ikz} \qquad (Z = Z_1 + iZ_2) \qquad (4.5)$$

Полагая аналогично предыдущему

$$x = x^*, \qquad y = y^*, \qquad z = z^*\sqrt{M^2-1}$$

и принимая во внимание условие обращения в нуль потенциала $\varphi(x, y, z)$ на огибающей поверхности конусов Маха, имеющих вершины на передней кромке, получим, воспользовавшись формулой (2.3):

$$\varphi(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\gamma} iz\exp\left(-ikz\sqrt{M^2-1}\right)\frac{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{(z_0^*-z^*)^2-r^2}}{\sqrt{(z_0^*-z^*)-r^2}} \qquad (4.6)$$

Поступила в редакцию
18 II 1947

Институт механики
АН СССР

S. V. FALKOVICH.—ON THE THEORY OF A WING OF FINITE SPAN IN A SUPERSONIC FLOW

The paper suggests a method of determining the velocity potential of a disturbed supersonic gas flow past a wing of finite span. The method employs the Volterra formula (1.2) in equations (1.1) and (2.1), solving the Cauchy problem. As a result, formula (3.3) is obtained for the velocity potential, and formula (4.6) for the vibrating wing. The latter case was investigated earlier by Krasilstchikova[1], employing a different method.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа. ГТТИ. 1935. т. III. ч. 1.
2. Hadamard J. Leçons sur le problème de Cauchy. Paris. 1932.
3. Красильщикова Е. А. Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 1.
4. Хаскинд М. Д., Фалькович С. В. Колебания крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. Статья в этом выпуске журнала.