Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О БОЛЬШИХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ НАТЯЖЕНИЯХ

П. М. Риз

(Москва)

В настоящей заметке отмечается одна особенность в процессе колебаний струны при больших натяжениях, до сих пор, насколько нам известно, в литературе не освещаемая, несмотря на довольно полную изученность этой задачи.

Рассмотрение проведем, не делая каких-либо предположений о малости деформаций, за исключением предположения о применимости закона Гука, устанавливающего пропорциональность между упругими напряжениями и удлинениями в струне.

Пусть струна в положении равновесия находится под действием растягивающей силы, создающей натяжение T_0.

Прямую, на которой располагается при этом струна, примем за ось x, смещения при колебаниях вдоль осей x и y обозначим соответственно u и v.

Пусть x — абсцисса элемента струны в состоянии равновесия, dx — длина элемента струны в положении равновесия, ds — то же в произвольный момент времени.

Очевидно,

$$ds = R\,dx \qquad \left(R = \sqrt{\left[1+\frac{du}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dv}{dx}\right]^2}\right) \tag{1}$$

Натяжение T выражается через первоначальное натяжение T_0 и удлинение (k — жесткость струны):

$$T = T_0 + k\frac{ds-dx}{dx} = T_0 + k(R-1) \tag{2}$$

Уравнения колебаний могут быть записаны следующим образом:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T\cos\alpha), \qquad m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}(T\sin\alpha) \tag{3}$$

где m — линейная плотность струны в положении равновесия, α — угол касательной к струне с осью x.

В левых частях уравнений (3) стоят частные производные, а не полные «субстанциональные» производные, так как x есть координата положения точки в состоянии равновесия и, следовательно, не зависит от времени. Замечая, что

$$\sin\alpha = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{R}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4}$$

и подставляя в уравнение (3), найдем:

для «поперечных» колебаний

$$\frac{m}{T_0}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{1}{R}\right)\right] \tag{5}$$

для «продольных» колебаний

$$\frac{m}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma\frac{T_0}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{R}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \tag{6}$$

где

$$\gamma = \frac{k-T_0}{T_0}$$

Можно указать две возможности вырождения системы (5)—(6) в линейную и при этом представляющую два независимых движения.

Первая возможность общеизвестна и реализуется в случае малых колебаний, когда можно пренебречь высшими степенями деформации, сохраняя только их первые степени.

Второй случай—обращение коэффициента γ в нуль, т. е. случай равенства жесткости струны и первоначального натяжения.

Очевидно, что и в этом предельном случае продольные и поперечные колебания точно описываются линейными уравнениями и притом оказываются раздельными, хотя и с общей частотой.

Естественно, что при больших колебаниях и больших первоначальных натяжениях может оказаться целесообразным, пользуясь методами теории возмущений, строить решение системы (5)—(6) в виде рядов по степеням γ, причем быстрота сходимости не будет зависеть от величины амплитуды колебаний в отличие от обычных методов, где решение строится в виде рядов по параметру, характеризующему амплитуду. Мы не приводим расчетов, так как указанное явление интересно преимущественно с качественной стороны и вряд ли возможно осуществить достаточно большое начальное натяжение, не выходя за рамки закона Гука.

Задача о больших колебаниях струны при первоначальном натяжении является представителем обширного класса задач о колебаниях, для которых характерно, что первоначальная статическая деформация (в данном случае первоначальное натяжение) смягчает нелинейность, возникающую при больших колебаниях. Таковы задачи о поперечные колебаниях мембраны, о радиальных колебаниях сферической оболочки при большом внутреннем давлении, об изгибных колебаниях растянутого стержня. Во всех этих случаях статическая нагрузка как бы разгружает колеблющуюся систему и уменьшает ее нелинейность.

Упомянем в заключении, что задача о больших колебаниях струны рассматривалась недавно в работе М. А. Исаковича[1], но вследствие того, что автор местами сохранял квадратичные члены, местами их отбрасывал, он пришел к неверным уравнениям колебаний (ошибка заключена прежде всего в выражении для удлинения, где сохранены члены порядка $(\partial v / \partial x)^2$, но отброшены величины порядка $(\partial u / \partial x)^2$; в наших обозначениях имеются, впрочем, и другие неточности).

Поступила в редакцию
26 XII 1946

P. M. RIZ. — LARGE OSCILLATIONS OF A STRING UNDER ARBITRARY INITIAL STRETCHING

One particularity of the oscillations of a string under large strains is pointed out — the possibility of the non-linear system of equations [5],[6] of the oscillations passing into linear equations.

The first possibility — for small oscillations — is well known.

The second, which may be of theoretical interest, is the case of the equality of the rigidity of the string and its initial stretching, when the coefficient γ is equal to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исакович М. А. Доклады Академии Наук. 1946. Т. I. № 2.