Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНКИ

М. П. Галин

(Москва)

Применив принцип возможных перемещений к изгибу пластинки поперечной нагрузкой интенсивности p, можно получить вариационное уравнение в форме Галеркина

$$\iint\limits_{(S)} (D\nabla^4 w - p)\,\delta w\,dx\,dy = 0 \tag{1}$$

Используя принцип Даламбера, получим вариационное уравнение поперечных колебаний пластинки

$$\iint\limits_{(S)} \left[D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} - p(x, y, t) \right] \delta w(x, y, t)\,dx\,dy = 0 \tag{2}$$

Следуя методу Галеркина, положим

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{n} c_m(t)\, w_m(x, y), \qquad \delta w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{n} w_m(x, y)\,\delta c_m(t) \tag{3}$$

где функции $w_m(x, y)$ должны удовлетворять всем граничным условиям (геометрическим и динамическим). Подставляя выражения (3) в (2), получим

$$\iint\limits_{(S)} \left\{ D\nabla^4 \left[\sum_{m=1}^{n} c_m(t)\, w_m(x, y) \right] + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{m=1}^{n} c_m(t)\, w_m(x, y) \right] - \right.$$

$$\left. - p(x, y, t) \right\} \sum_{k=1}^{n} w_k(x, y)\,\delta c_k(t) \Big]\,dx\,dy = 0 \tag{4}$$

Это равенство можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n} \left[L_{mk} \frac{d^2 c_m(t)}{dt^2} + M_{mk}\, c_m(t) \right] - N_k(t) \right\} \delta c_k(t) = 0 \tag{5}$$

где

$$L_{mk} = \iint\limits_{(S)} \rho h w_m(x, y)\, w_k(x, y)\,dx\,dy, \qquad N_k(t) = \iint\limits_{(S)} p(x, y, t)\, w_k(x, y)\,dx\,dy \tag{6}$$

$$M_{mk} = \iint\limits_{(S)} D\nabla^4 [w_m(x, y)]\, w_k(x, y)\,dx\,dy$$

Так как вариации $\delta c_1, \ldots, \delta c_k, \ldots, \delta c_n$ независимые, то мы получим n уравнений:

$$\sum_{m=1}^{n} L_{mk} \frac{d^2 c_m(t)}{dt^2} + M_{mk} c_m(t) - N_k(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

В случае свободных колебаний система (7) станет однородной:

$$\sum_{m=1}^{n} L_{mk} \frac{d^2 c_m(t)}{dt^2} + M_{mk} c_m(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

В качестве примера рассмотрим свободные колебания пластинки со сторонами $2a$ и $2b$, заделанной по контуру. Возьмем приближенное выражение для прогиба в форме

$$w(x, y, t) = c_1(t)(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \tag{9}$$

которое удовлетворяет граничным условиям на контуре пластинки

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm a; \qquad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm b$$

Вычислим коэффициенты L_{11} и M_{11} по формуле (6):

$$L_{11} = \rho h \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} (x^2 - a^2)^4 (y^2 - b^2)^4 \, dx\, dy = \frac{2^{16}}{3^2 5^2 7^2} a^9 b^9 \rho h$$

$$M_{11} = D \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \nabla^4 [(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2] \, dx\, dy =$$

$$= \frac{2^{15}}{3^2 5^2 7^2} \left(a^9 b^5 + \frac{4}{7} a^7 b^7 + a^5 b^9 \right) D$$

Для круговой частоты основного тона согласно (8) получим

$$\omega_{11} = 3 \sqrt{\frac{7}{2} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{4}{7} \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right)} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 5.612 \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{0.571}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^4}} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{10}$$

Для квадратной пластинки ($a = b$)

$$\omega_{11} = \frac{9}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{11}$$

Точное решение, полученное Игуши[1], (см. также [2]) дает

$$\omega_1 = \frac{3.646 \pi^2}{4a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{8.9965}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{12}$$

Заметим, что ошибка в нашем первом приближении составляет лишь 0.04%. Если бы мы искали решение в n-м приближении, т. е. положили бы

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)(x^2 - a)^{k+1} (y^2 - b^2)^{k+1}$$

то определили бы более точно частоту основного тона и нашли бы частоты $n - 1$ обертонов.

Е. С. Сорокин[3] приводит первое и четвертое приближения для квадратной плиты

$$\omega_1^{(1)} = \frac{9.027}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad \omega_1^{(4)} = \frac{9.0025}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{13}$$

Последний результат все же хуже (11).

Поступила в редакцию
20 II 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

M. P. GALIN.—TRANSVERSE OSCILLATIONS OF A PLATE

The Galerkin approximate method is employed in the note to investigate the oscillations of a plate. Expressions (1) and (3) lead to equations (7) for constrained oscillations, and (8) for free oscillations. Free oscillations of a rectangular clamped plate is taken as an example.

ЛИТЕРАТУРА

1. Iguchi S. Die Biegungsschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platen. Ingenieur Archiv. 1937. Heft 1, S. II.
2. Филиппов А. П. Методы расчета сооружений на колебания. Стройиздат. 1941.
3. Сорокин Е. С. Динамика междуэтажных перекрытий. Стройиздат. 1941. Стр. 68.