Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О КРЫЛЕ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Л. А. Галин

(Москва)

Рассмотрим задачу об обтекании слабо изогнутого крыла, неподвижного или совершающего гармонические колебания, сверхзвуковым потоком газа. Движение газа происходит в направлении оси x со скоростью, на бесконечности равной w. При этом решение находится для той части пространства, где оно может быть определено на основании условий, заданных в области L^* на плоскости $x_1 y_1$. Область L^* обладает следующим свойством: след от пересечения плоскости $x_1 y_1$ с конусом Маха, вершина которого находится на передней линии, ограничивающей крыло, состоящий из двух образующих конуса, целиком находится внутри этой области.

В настоящей заметке показывается, что отыскание потенциала скоростей при этих условиях приводится к задаче типа задачи Неймана, когда на части плоскости заданы *однородные* граничные условия. Поэтому решение поставленных задач может быть сразу дано в виде соответствующих потенциалов простых слоев.

1. В случае неподвижного крыла скорости движения газа могут быть выражены на основании потенциала скоростей, для определения которого в верхнем полупространстве имеем следующие условия:

на L_1^* (перед крылом, $z_1 = 0$)

$$\partial\varphi^* / \partial z_1 = 0 \tag{1.1}$$

на L^* (на крыле, $z_1 = 0$)

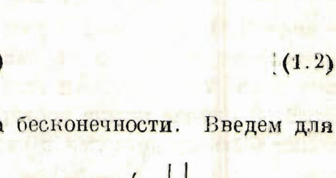
$$\partial\varphi^* / \partial z_1 = f^* (x_1, y_1)$$

Здесь L_1^* — область перед крылом, а $f^* (x_1 y_1) = w\, \partial F^* (x_1, y_1) / \partial x_1$, причем $F^* (x, y)$ — уравнение поверхности крыла. Потенциал скоростей непрерывен в верхнем полупространстве и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} - (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_1{}^2} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь число Маха $M = w / a$, где a — скорость звука на бесконечности. Введем для удобства новые переменные

$$x = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}\, x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 \tag{1.3}$$



Фиг. 1.

В таком случае будем иметь для определения $\varphi (x, y, z) = \varphi^* (x_1, y_1, z_1)$ условия при $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{на } L_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f (x, y) \quad \text{на } L \tag{1.4}$$

При этом $f (x, y) = f^* (x_1, y_1)$. Функция φ, непрерывная в верхнем полупространстве, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

Области L_1 и L могут быть легко найдены путем соответствующей деформации областей L_1^* и L_1^*. На фиг. 1 крыло изображено в плоскости xy. Ось z направлена перпендикулярно чертежу.

Итак, для определения $\varphi(x, y, z)$ мы имеем задачу типа задачи Неймана, когда нормальная производная задана на части плоскости xy. Поэтому выражение для $\varphi(x, y, z)$ в верхнем полупространстве, удовлетворяющей условиям (1.4) может быть написано сразу на основании результатов, приведенных, например, в книге Г. Мюнтца [2], в виде волнового потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta^2) - z^2}} \tag{1.6}$$

Условие непрерывности потенциала скоростей или условие равенства нулю этой величины на огибающей конусов Маха при этом, очевидно, выполняется.

Здесь S — часть крыла, находящаяся внутри конуса Маха, вершина которого помещена в точке (x, y, z) и который расширяется в отрицательном направлении оси x.

В нижнем полупространстве при $z < 0$ будет $\varphi(x, y, -z) = -\varphi(x, y, z)$.

Рассмотрим обратную задачу теории крыла — определение формы крыла по заданному распределению давлений. Введем потенциал ускорений $\psi(x, y, z) = \partial\varphi / \partial x$, причем в верхнем полупространстве на крыле при $z = 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho w} p(x, y)$$

Здесь ρ — плотность, а $p(x, y)$ — давление, действующее сверху на поверхность крыла.

Потенциал ускорений будет, очевидно, удовлетворять волновому уравнению (1.5), причем для его определения получим условия при $z = 0$

$$\begin{aligned} &\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 && \text{на } L_1 \text{ (перед крылом)} \\ &\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho w} p(x, y) && \text{на } L \text{ (на крыле)} \\ &\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 && \text{на } L_2 \text{ (за крылом)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Таким образом, для определения $\psi(x, y, z)$ мы имеем условия типа задачи Дирихле на всей плоскости xy. На основании [2] выражение для $\psi(x, y, z)$ может быть получено в виде волнового потенциала двойного слоя

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\pi\rho w} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S p(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} \tag{1.8}$$

При этом следует заметить, что решение обратной задачи может быть представлено в виде (1.8) для любой формы крыла в плане, что, впрочем, аналогично соответствующей задаче для несжимаемой жидкости. Указанное выше ограничение, которое накладывается на форму области на крыле, в данном случае не имеет места.

2. В случае крыла, совершающего гармонические колебания, потенциал скоростей может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, t) = \varphi(x_1, y_1, z_1) + \varphi_1(x_1, y_1, z_1, t) \tag{2.1}$$

причем

$$\varphi_1 = Re\, \Phi^*(x, y, z)\, e^{i\beta x_1 - i\omega t}, \qquad \beta = \frac{w\omega}{w^2 - a^2} \tag{2.2}$$

Если ввести новые переменные по формулам (1.3), то для определения функции $\Phi(x, y, z) = \Phi^*(x_1, y_1, z_1)$ получим условия в верхнем полупространстве при $z = 0$, см. [2].

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{на } L_1 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = A(x, y) \quad \text{на } L \tag{2.3}$$

Здесь $A(x, y)$ — некоторая функция, которая определяется на основании уравнения колеблющегося крыла; ω — частота колебаний крыла. При этом $\Phi(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \lambda^2\Phi = 0 \qquad \left(\lambda^2 = \frac{a^2\omega^2}{(w^2 - a^2)^2}\right) \tag{2.4}$$

Кроме того, функция $\Phi(x, y, z)$ должна быть непрерывна во всем пространстве.

Функцию, удовлетворяющую уравнению (2.3) и условию (2.4), можно представить в виде соответствующего потенциала простого слоя, что сделано в книге Адамара [3], а также в статье Л. Магнарадзе [4]. В этой статье дана формула, аналогичная формуле Пуассона—Парсеваля, посредством которой решается задача Коши в случае, когда значения функции и ее нормальной производной заданы на плоскости yz. Применяя рассуждения, вполне аналогичные тем, которые приведены в книге Г. Мюнтца [1], можно показать, что посредством потенциала простого слоя может быть решена задача типа задачи Неймана, когда условия (2.3) заданы на части плоскости yz.

Дадим выражение для искомого потенциала и покажем, как могут быть установлены его граничные свойства. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}-\lambda^2\varphi^*=0 \tag{2.5}$$

Его решение может быть дано в виде потенциала простого слоя

$$\varphi^*(x_1, y, z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Gamma} f(\xi, \eta)\, K(r)\, d\xi\, d\eta \quad \left(r=\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2},\right) \tag{2.6}$$

При этом $K(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\lambda^2\right)K(r)=0 \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что его интеграл, обладающий необходимыми свойствами, будет

$$K(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,I_{-\frac{1}{2}}(\lambda r)=\frac{\operatorname{ch}(\lambda r)}{r} \tag{2.8}$$

так как

$$I_{-\frac{1}{2}}(\lambda r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{ch}(\lambda r)}{r}$$

С другой стороны, гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}=0 \tag{2.9}$$

может быть представлена в виде ньютоновского потенциала простого слоя. Положив плотность простого слоя также равной $f(\xi, \eta)$, получим

$$\varphi_1^*(x_1, y, z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Gamma} f(\xi, \eta)\,\frac{1}{r}\,d\xi\, d\eta \tag{2.10}$$

Составим разность соответствующих потенциалов двойных слоев

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi^*(x_1, y, z)-\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1^*(x_1, y, z)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Gamma} f(\xi, \eta)\,\frac{\operatorname{ch}\left[\lambda\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}\right]-1}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\,d\xi\, d\eta\right\} \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi^*(x_1, y, z)-\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1^*(x_1, y, z)=0 \tag{2.12}$$

так как ядро в интегралах (2.11) представляет собой четную регулярную функцию от z.

Из выражений (2.6) и (2.10) нетрудно получить потенциалы, удовлетворяющие уравнениям (1.5) и (2.4). Для этой цели нужно ввести вместо x_1 величину ix и взять мнимую часть от полученных выражений. За область интегрирования здесь может быть взята область Γ', по которой будет выполняться условие $x<\xi$. Но ядра в интегралах (2.6) и (2.10) будут чисто мнимыми только в области S, определенной выше, которая содержится в области Γ'. В результате получим выражения для искомых потенциалов:

$$\varphi_1(x, y, z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{S} f(\xi, \eta)\,\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2}} \tag{2.13}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} d\xi\, d\eta \qquad (2.14)$$

Рассмотрим выражение (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}] - 1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} d\xi\, d\eta$$

Можно показать, что если для исходных потенциалов (2.6) и (2.10) выполняется условие (2.12), то выражение (2.15), относящееся к потенциалам (2.13) и (2.14), будет также равно нулю. Итак, на основании (2.12), (2.15) и (1.6)

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{\cos[\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}]}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S f(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} = f(x, y) \qquad (2.16)$$

Таким образом, для функции $\Phi(x, y, z)$, удовлетворяющей (2.3) и (2.4), получаем выражение

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_S A(\xi, \eta) \frac{\cos(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} d\xi\, d\eta \qquad (2.17)$$

Если будет представлять интерес определение функции $\Phi(x, y, z)$ на основании распределения давлений на крыле, т. е. решение задачи типа задачи Дирихле, то искомое выражение может быть представлено в виде потенциала двойного слоя

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S B(\xi, \eta) \frac{\cos(\lambda \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - z^2}} d\xi\, d\eta \qquad (2.18)$$

Таким образом, в этом разделе заметки показано, что результаты, касающиеся потенциалов слоев, удовлетворяющих уравнению (2.4), дают возможность легко построить решение задач, рассмотренных в работе Е. А. Красильщиковой [2].

Заметим, что решения плоских задач могут быть также найдены этим же методом.

Поступила в редакцию
15 II 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

L. A. GALIN.—NOTES ON THE THEORY OF A WING OF FINITE SPAN IN A SUPERSONIC FLOW

The paper treats the problem of a stationary wing and a wing vibrating in accordance with the harmonic law in a supersonic gas flow. The wing is of a shape in plane for which all of the Mach cones, whose vertices lie on the forward edge, are within the wing.

The problem of determining the potential of velocities is shown to be of the Neumann type, the solution being given in the form of potentials of a layer, in the first case by formula (1.6), in the second, by formula (2.17). The problem of the vibrating wing is investigated by E. Krasilstchikova, employing a different procedure [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. 1934. Ч. 1.
2. Красильщикова Е. А. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 1.
3. Hadamard J. Le problème de Cauchy. Paris. 1932.
4. Магнарадзе Л. Сообщения Академии Наук Грузинской ССР. Т. V. № 3.