

ОБ УДАРЕ ПО ГИБКОЙ НИТИ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

§ 1. Исследование решений дифференциальных уравнений движения нити. Рассмотрим бесконечно длинную гибкую нить, имеющую первоначально прямолинейную форму. Обозначим через x^* смещения частиц нити, направленных вдоль нее, и через y^* смещения, перпендикулярные к первым. Дифференциальные уравнения движения нити при отсутствии массовых сил будут иметь вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{T}{1+\varepsilon} \left(1 + \frac{\partial x^*}{\partial s_0} \right) \right], \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} \left[\frac{T}{1+\varepsilon} \frac{\partial y^*}{\partial s_0} \right] \quad (1.1)$$

Здесь ρ_0 — масса единицы длины недеформированной нити, s_0 — лагранжева координата частицы нити, ε — деформация элемента нити, $T = T(\varepsilon)$ — натяжные нити; как известно,

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2} - 1 \quad (1.2)$$

Введем новые переменные $x^* = v_0 t x$, $y^* = v_0 t y$, где v_0 — величина, имеющая размерность скорости. Функции x, y безразмерные и зависят [1] от безразмерного параметра $z = s_0 / v_0 t$. После введения новых переменных уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} z^2 x'' &= \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+\varepsilon)} x'' + \frac{1+x'}{1+\varepsilon} \frac{d}{dz} \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+\varepsilon)} \left[(1+x') x'' + y' y'' \right] \\ z^2 y'' &= \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+\varepsilon)} y'' + \frac{y'}{1+\varepsilon} \frac{d}{dz} \frac{T}{\rho_0 v_0^2 (1+\varepsilon)} \left[(1+x') x'' + y' y'' \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь штрихи означают дифференцирование по z .

В работе [1] дано решение задачи о косом ударе. При этом использованы тривиальные решения $x'' = 0$, $y'' = 0$ уравнений (1.3).

Уравнения (1.3), однако, имеют решения, отличные от $x'' = 0$, $y'' = 0$. Чтобы получить эти решения, приравняем нулю детерминант системы (1.3), рассматривая эти уравнения как однородные относительно x'' , y'' . Получим

$$\begin{vmatrix} U - z^2 + \frac{(1+x')^2}{1+\varepsilon} \frac{dU}{dz} & \frac{y'(1+x')}{1+\varepsilon} \frac{dU}{dz} \\ \frac{y'(1+x')}{1+\varepsilon} \frac{dU}{dz} & U - z^2 + \frac{y'^2}{1+\varepsilon} \frac{dU}{dz} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$U = \frac{T(\varepsilon)}{\rho_0 v_0^2 (1+\varepsilon)} = U(\varepsilon) \quad (1.5)$$

Раскрывая этот детерминант и используя (1.2), получим

$$(U - z^2) \left[U - z^2 + (1+\varepsilon) \frac{dU}{dz} \right] = 0 \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) имеет два решения. Положим $U - z^2 = 0$. Учитывая, что $U = U(\varepsilon)$, а следовательно, $\varepsilon = \varepsilon(z)$, после подстановки $z^2 = U$ в уравнения (1.3) имеем

$$(1+x') \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dz} = 0, \quad y' \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dz} = 0 \quad (1.7)$$

Легко видеть, что получаемые отсюда три решения

$$1. \quad \frac{dz}{dz} = 0; \quad 2. \quad \frac{aU}{dz} = 0; \quad 3. \quad y' = 0, \quad 1 + x' = 0 \quad (1.8)$$

противоречат условиям $U = U(z)$ и $\varepsilon = \varepsilon(z)$.

Таким образом, остается исследовать решения уравнения

$$U - z^2 + (1 + \varepsilon) \frac{dU}{dz} = 0 \quad (1.9)$$

Подставляя сюда выражение U согласно (1.5) и принимая во внимание, что $z = s_0 / v_0 t$, получим

$$\left(\frac{s_0}{t} \right) = \frac{1}{v_0} \frac{dT}{dz} = a^2(z) \quad (1.10)$$

Последнее уравнение имеет простой физический смысл. Вдоль прямых $s_0 / t = \text{const}$ местные скорости звука постоянные. Решение (1.10) есть волна Римана для двухмерного движения нити. Из (1.10) можно получить деформацию как функцию z . Для полного определения движения нам надо знать $x = x(z)$, $y = y(z)$. С указанной целью обратимся к уравнению (1.3). Подставляя (1.9) во второе уравнение (1.3), получим

$$\left\{ (1 + \varepsilon) y'' - \frac{y'}{1 + \varepsilon} [x''(1 + x') + y' y''] \right\} \frac{dU}{dz} = 0$$

Так как $dU/d\varepsilon \neq 0$ согласно (1.10), то, пользуясь (1.2), найдем

$$(1 + x')^2 y'' + y'^2 y'' - y' x'' (1 + x') - y'^2 y'' = 0$$

Отсюда последовательно имеем

$$\frac{x''}{1 + x'} = \frac{y''}{y'}, \quad y' = C(1 + x'), \quad y = C(z + x) + C_2 \quad (1.11)$$

Переходя к размерным переменным, получим

$$y^* = C(s_0 + x^*) + C_1 t \quad (1.12)$$

Последнее уравнение показывает, что форма нити в каждый момент времени образована прямолинейными отрезками.

Покажем теперь, что первое из уравнений (1.3) тождественно удовлетворяется, если выполнены уравнения (1.9) и (1.11).

В самом деле, подставляя (1.9) в первое уравнение (1.4) и имея в виду (1.2), получим

$$y'^2 x'' - y'(1 + x') y'' = 0$$

Очевидно, последнее равенство есть тождество, если имеет место (1.11).

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим задачу об ударе по нити. Из (1.12) получаем

$$\frac{\partial y^*}{\partial s_0} = C \left(1 + \frac{\partial x^*}{\partial s_0} \right)$$

Следовательно, согласно (1.1)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + C^2} \left(1 + \frac{\partial x^*}{\partial s_0} \right) - 1 = \sqrt{1 + C^2} \left(1 + \frac{dx}{dz} \right) - 1$$

Отсюда

$$\alpha(z + x) - z = \int \varepsilon dz + C_2 \quad \left(\alpha = \sqrt{1 + C^2} \right) \quad (1.13)$$

Для скорости имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = v_0 (x - z x')$$

Подставляя сюда выражение для x и x' , получим

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = v_0 \left[\frac{1}{\alpha} \left(z + \int \varepsilon dz + C_2 \right) - z - z \left(\frac{1 + \varepsilon}{\alpha} - 1 \right) \right]$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям для интеграла, входящего в это равенство, получим

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} \int a(\varepsilon) d\varepsilon + C_2 \quad (1.14)$$

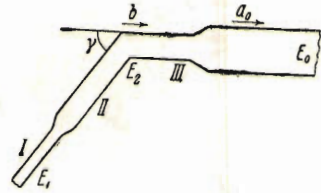
Имея в виду (1.12), найдем

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} = C_1 - \frac{C}{\alpha} \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon + CC_2 \quad (1.15)$$

В случае одномерного движения из (1.13) получаем известное соотношение между скоростью и деформацией на волне Римана (в этом случае $C_1 = 0$):

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon$$

Таким образом, видим, что полученное решение есть обобщение волны Римана при двухмерном движении. Выше было показано, что части нити, имеющие переменные деформации и скорости, будут прямолинейными. На фиг. 1 дана схема деформированного состояния нити, описываемого уравнениями (1.10) и (1.12).



Фиг. 1.

§ 2. Задача о поперечном ударе по нити. Для простоты рассмотрим случай нормального удара (фиг. 2). В области III движение чисто продольное и для этой области из (1.14) имеем

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = -\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.1)$$

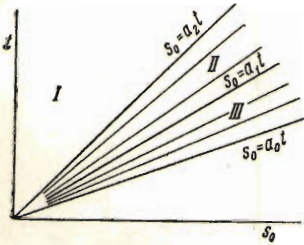
В области II имеем:

для $z = a_2/v_0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$

$$\frac{\partial y^*}{\partial t} = v_0, \quad \frac{\partial x^*}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

для любого z

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = +\frac{1}{\alpha} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} a(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \frac{\partial y^*}{\partial t} = v_0 + \frac{c}{\alpha} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon$$



Фиг. 2.

Так как $c = -\operatorname{tg} \gamma$, то $z = \sqrt{1+C^2} = \sec \gamma$ и, следовательно,

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} = \cos \gamma \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} a(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \frac{\partial y^*}{\partial t} = v_0 - \sin \gamma \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.3)$$

Напишем уравнение, связывающее скорость распространения сильного разрыва с деформацией:

$$\frac{b}{v_0} = z + x(z) = \frac{a_1}{v_0} + x\left(\frac{a_1}{v_0}\right), \quad a_1 = a(\varepsilon_2) \quad (2.4)$$

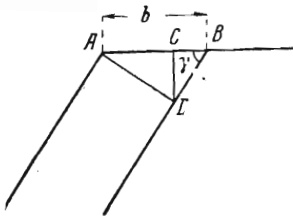
Обозначим через u абсолютное значение скорости на поверхности сильного разрыва справа:

$$u = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_2} a(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.5)$$

Напишем уравнение количества движения на поверхности сильного разрыва, имея в виду, что при прохождении через нее деформация остается непрерывной:

$$\begin{aligned} (b+u) \rho \left[u + \cos \gamma \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} a d\varepsilon \right] &= T(\varepsilon_2) (1 - \cos \gamma) \\ (b+u) \rho \left[v_0 + \sin \gamma \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} a d\varepsilon \right] &= T(\varepsilon_2) \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

Имея в виду $\operatorname{tg} \gamma = v_0 / b$, получим $v_0 \cos \gamma = b \sin \gamma$. Умножая первое уравнение (2.6) на $\sin \gamma$, второе на $\cos \gamma$, складывая их и принимая во внимание (2.7), будем иметь



Фиг. 3.

$$(b+u)^2 \rho = T(\varepsilon_2) \quad (2.8)$$

Напишем еще одно кинематическое соотношение на поверхности сильного разрыва, пользуясь фиг. 3, где $AB = b$, $AC = \partial x^* / \partial t$, $CG = \partial y^* / \partial t$. Имеем

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{b - \partial x^* / \partial t}{\partial y^* / \partial t}$$

Подставляя сюда $\partial x^* / \partial t$ и $\partial y^* / \partial t$ согласно (2.3), легко установить, что это соотношение выполняется тождественно.

В составленных нами уравнениях неизвестными являются u , ε_1 , ε_2 , $\cos \gamma$, b . Для их определения имеем уравнения (2.4), (2.5), одно из уравнений (2.6) и уравнения (2.7), (2.8). В случае упругих деформаций $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ мы получим известную^[1] систему уравнений

$$(b+u) \rho v_0 = T \sin \gamma, \quad u = a_0 \varepsilon, \quad (b+u)^3 \rho = T, \quad v_0 = b \operatorname{tg} \gamma$$

Найдем выражение для смещения x , входящее в (2.4). В области I из (1.13) имеем

$$\alpha(z+x) - z = \varepsilon_1 z + C_2$$

Так как $x=0$ при $z=0$, то $C_2=0$. Следовательно, на прямой $z = a_2 / v_0$ получим

$$x = \frac{1}{z} \left(\varepsilon_1 \frac{a_2}{v_0} + \frac{a_2}{\gamma_2} \right) - \frac{a_2}{v_0} = \frac{a_2}{v_0} [(1 + \varepsilon_1) \cos \gamma - 1] \quad (2.9)$$

В случае линейного упрочнения будем иметь $a_1 = a_2$ (заметим, что $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$).

Из (2.9) и (2.4) получим

$$b = a_1 (1 + \varepsilon_1) \cos \gamma \quad (2.10)$$

Из (2.6) и (2.8) найдем

$$v_0 - \sin \gamma a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \sqrt{\frac{T(\varepsilon_2)}{\rho}} \sin \gamma, \quad v_0 \cos \gamma = b \sin \gamma \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) получаем

$$a_1 (1 + \varepsilon_1) - a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \sqrt{\frac{T(\varepsilon_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon_2) T(\varepsilon_2)}{\rho_0}}$$

Отсюда

$$a_1 \sqrt{1 + \varepsilon_2} = \sqrt{a_0^2 \varepsilon_s + a_1^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_s)} \quad \text{или} \quad a_1^2 (1 + \varepsilon_s) = a_0^2 \varepsilon_s$$

Это может иметь место только для материалов с *весьма малым модулем упрочнения*. Так например, (2.13) не может иметь места для стали, так как в этом случае $(a_2 / a_0)^2 \approx 0.05$ и $\varepsilon_s = 0.002$, а равно и для меди, для которой $(a_1 / a_0)^2 \approx 0.003$ и $\varepsilon_s \approx 0.001$.

В цитированной статье^[1] мы высказывали мнение, что упомянутое решение соответствует случаю удара клина о гибкую нить. Так как второе решение дифференциального уравнения движения нити для практически важных случаев не реализуется, то для случая удара клина по гибкой нити нам придется пользоваться первыми решениями дифференциального уравнения. Поэтому схема движения в случае удара клина о гибкую нить будет иметь вид, указанный на фиг. 4.



Фиг. 4.

Поступила в редакцию

24 IV 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

К. А. РАХМАТУЛИН.—IMPACT ON A FLEXIBLE CORD

The note is a development of the author's work, published in this Journal "Oblique Impact on a Flexible Cord with High Velocity, in the Presence of Friction."^[1]

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ. 1945. Т. IX.