Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ЗАМЕТКИ

К УРАВНЕНИЮ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НЕКОТОРОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. Ш. Аминов

(Казань)

Будем рассматривать консервативную механическую систему с n степенями свободы, стесненную голономными стационарными связями. Положение системы будем определять обобщенными координатами Лагранжа $q^1, q^2, \ldots, q^n$.

Для этой системы в общепринятых обозначениях имеем интеграл живой силы

$$T = U + h$$

Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \qquad \left(g_{\alpha\beta}' = g_{\beta\alpha}', \ \dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}\right) \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$$

Уравнения движения механической системы получим из принципа наименьшего действия в форме Якоби. Рассмотрим пространство $Q_n(q^1, q^2, \ldots, q^n)$, в котором определено поле тензора $g_{\alpha\beta} = 2(U+h) g_{\alpha\beta}'$. Метрику Q_n определим равенством

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

и движение системы можем трактовать как движение точки единичной массы по геодетике этого пространства.

Уравнения движения системы будут иметь вид

$$\frac{d^2 q^k}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} = 0$$

где обозначено

$$\Gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2} g^{k\gamma} \left[\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right]$$

Здесь s — дуга геодетики, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки O.

Выделяя начальными данными определенную геодетику, назовем ее невозмущенной. При бесконечно малом консервативном возмущении (т. е. с неизменной полной энергией системы) начальных данных мы получим некоторую новую геодетику пространства Q_n, которую назовем возмущенной. Нас будет интересовать поведение возмущенной геодетики по отношению к невозмущенной. Для того чтобы изучить этот вопрос, установим соответствие точек этих геодетик. Именно, соответствующими точками будем считать точки, равноудаленные (в смысле действия) от фиксированных начальных точек O и O^* на невозмущенной и возмущенной геодетиках.

Пусть в этом смысле точке $A(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ соответствует точка $A^*(q^{*1}, q^{*2}, \ldots, q^{*n})$. Положим

$$q^{*\alpha} = q^\alpha + p^\alpha$$

Для возмущений p^α легко получим линеаризированные уравнения

$$\frac{d^2 p^k}{ds^2} + 2\Gamma_{\alpha\beta}{}^k \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dp^\beta}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}{}^k}{\partial q^\gamma} \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} p^\gamma = 0 \qquad (*)$$

коэффициенты в которых подсчитаны вдоль невозмущенной геодетики. Эти уравнения возмущенного движения справедливы при произвольной системе независимых координат $q^1, q^2, \ldots, q^n$ и произвольном выборе фиксированных точек O и O^*.

Для того чтобы уравнения (*) привести к более удобному виду, специализируем координаты в пространстве Q_n. Вдоль невозмущенной геодетики возьмем ортогональные координаты Ферми. В точке O первый координатный вектор $(q^1, 0, \ldots, 0)$ направляем вдоль этой геодетики, а остальные координатные векторы—по взаимно ортогональным геодетикам, ортогональным к невозмущенной геодетике в O. В любой другой точке A невозмущенной геодетики первый координатный вектор опять направляем вдоль этой геодетики, а остальные переносим из O параллельно в смысле Леви—Чивита. В других точках пространства (для нас достаточно рассмотреть только точки около невозмущенной геодетики) введем геодезические координаты, взяв за опорную гиперповерхность геометрическое место геодетик, ортогональных к невозмущенной в точке O. Точку O^* условимся выбирать на опорной гиперповерхности. При таком выборе система (*) примет вид

$$\frac{d^2p^k}{ds^2}=0 \qquad (k=2, 3, \ldots, n)$$

Или, вводя замену переменных по формулам

$$r^k=p^k\sqrt{g_{kk}} \qquad (\text{по } k \text{ — не суммируется})$$

получим

$$\frac{d^2r^k}{ds^2}+\frac{1}{g_{kk}}R_{1k,1k}\,r^k=0 \qquad (k=2, 3, \ldots, n)$$

где по k не суммируется и $R_{1k,1k}$—компоненты тензора кривизны. Откуда, полагая $n=2$, получим известный классический результат.

Теперь рассмотрим неконсервативное возмущение начальных данных, при котором изменяется полная энергия системы. В этом случае соответствующими точками будем считать точки A и A^*, если бесконечно малый вектор AA^* перпендикулярен к невозмущенной геодетике.

Выбирая оси координат аналогично предыдущему, уравнения возмущенного движения приведем к виду

$$\frac{d^2r^k}{ds^2}+\frac{1}{g_{kk}}R_{1k,1k}\,r^k+\frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\left(2\frac{\partial g_{k1}}{\partial q^1}-\frac{\partial g'_{kk}}{\partial q^k}\right)\Delta h=0 \qquad (^{**})$$

где Δh—возмущение полной энергии системы.

Отсюда как частный случай получим ($n=2$) известное уравнение Жуковского.

Поступила в редакцию
25 XII 1946

M. S. AMINOV. - ON THE EQUATION OF DISTURBED MOTION OF A MECHANICAL SYSTEM

Based on the idea of N. E. Joukovsky, equations are given for the disturbed motion of a holonomial conservative system, in the form (**).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Полное собр. соч. ОНТИ. 1937. Т. 1.
2. Fermi E. Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria. Rend. Accad. dei Lincei 31. I (p. 21—23, 51—52).
3. Levi-Cività T. Sur l'écart géodésique. Math. Annalen. 97. 1926 (P. 291—320).
4. Synge I. L. On the Geometry of Dynamics. Phil. Trans. 226 (P. 31—106).