Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

КОЛЕБАНИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

М. Д. Хаскинд, С. В. Фалькович

(Москва)

В работе исследуется возмущенное движение газа, возникающее при гармонических колебаниях тонкого, слабо изогнутого крыла конечного размаха, движущегося поступательно со сверхзвуковой скоростью. Этому вопросу посвящена работа Е. А. Красильщиковой[1], в которой автор, применяя метод Фурье, получила решение пространственной задачи при условии, что конусы Маха, проведенные из передней кромки крыла, пересекают крыло или его касаются.

Здесь дается другой метод решения, свободный от указанного условия. В частности, рассматриваются колебания стреловидного крыла, находящегося внутри конуса Маха.

§ 1. Основные уравнения задачи. Будем рассматривать тонкое, слабо изогнутое крыло, проекция которого на плоскость xy имеет вид равнобедренного треугольника с углом при вершине $2\gamma < 2\alpha$, где α — угол Маха. Будем считать, что основное движение крыла состоит в прямолинейном поступательном движении с постоянной сверхзвуковой скоростью u параллельно оси x. Будем считать, что оси координат перемещаются с той же скоростью и направление оси x совпадает с направлением скорости u. На основное движение крыла наложим добавочное гармоническое его колебание с частотой ω, причем не исключается возможность деформации крыла. Уравнение поверхности крыла можно тогда представить в виде

$$z(x, y, t) = f_0(x, y) + f_1(x, y)\cos\omega t + f_2(x, y)\sin\omega t \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что отношения функций f_k к линейным размерам треугольника и производные $\partial f_k / \partial x$ и $\partial f_k / \partial y$ малы.

Рассматривая безвихревое движение газа для потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, можно при указанных предположениях взять линеаризированное уравнение

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + 2\frac{M}{a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

где $M = u / a$ — число Маха и a — скорость звука.

Условие обтекания, которому должен удовлетворять на поверхности крыла потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, будем считать выполняющимся на проекции крыла на плоскость $z = 0$.

При выводе этого условия будем придерживаться работы Н. Е. Кочина[2]. Воспользуемся неподвижной системой координат $x_1\ y_1\ z_1$, связанной с применяемой нами подвижной системой координат соотношениями $x = x_1 - ut_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $t = t_1$; в этих координатах формула (1.1) будет

$$z_1 = f_0(x_1 - ut_1, y_1) + f_1(x_1 - ut_1, y_1)\cos\omega t + f_2(x_1 - ut_1, y_1)\sin\omega t$$

Отсюда для нормальной к крылу составляющей скорости частиц газа, примыкающих к поверхности крыла, получим

$$\frac{dz_1}{dt_1} = -u\frac{\partial f_0}{\partial x} - u\frac{\partial f_1}{\partial x}\cos\omega t - \omega f_1 \sin\omega t - u\frac{\partial f_2}{\partial x}\sin\omega t + \omega f_1\cos\omega t$$

Вводя обозначения

$$-u\frac{\partial f_0}{\partial x} = Z(x, y), \qquad \omega f_2 - u\frac{\partial f_1}{\partial x} = Z_1(x, y), \qquad -\omega f_1 - u\frac{\partial f_2}{\partial x} = Z_2(x, y)$$

граничное условие, которому должен удовлетворять потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, представим в виде

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = Z_0(x, y) + Z_1(x, y)\cos\omega t + Z_2(x, y)\sin\omega t \tag{1.3}$$

На поверхности конуса Маха имеем условие $\Phi(x, y, z, t) = 0$.

Таким образом, приходим к задаче: найти внутри конуса Маха функцию $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющую уравнению (1.2), условию (1.3) и обращающуюся на конусе Маха в нуль.

Учитывая установившийся колебательный характер движения газа, преобразуем уравнение (1.2) к более простому виду, положив[3]

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z)\cos(\omega t + \lambda x) + \varphi_2(x, y, z)\sin(\omega t + \lambda x)$$

$$\left(\lambda = \frac{\omega M}{a(M^2-1)}\right)$$

Введя обозначения

$$Z_1(x, y) + iZ_2(x, y) = Z(x, y), \qquad \varphi_1(x, y, z) + i\varphi_2(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$$

получим для определения функций $\varphi_0(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ после простых вычислений из (1.2) и (1.3) следующие уравнения

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = Z_0(x, y) \tag{1.4}$$

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)_{z=0} = iZ(x, y)\, e^{-i\lambda x}$$

$$\left(k = \frac{\omega}{u\sqrt{M^2-1}}\right) \tag{1.5}$$

Функция $\varphi_0(x, y, z)$, определяемая уравнениями (1.4), есть потенциал скоростей движения газа при установившемся поступательном движении крыла, а $\mathrm{Re}\,[\varphi(x, y, z)\, e^{-i(\omega t + \lambda x)}]$ — потенциал скоростей, отвечающий колебаниям крыла.

Заметим, что при $k = 0$ система (1.5) переходит в систему (1.4), следовательно, достаточно найти решение системы (1.5).

§ 2. Метод решения. Положим в уравнениях (1.5)

$$x = x^*\sqrt{M^2-1}, \qquad y = y^*, \qquad z = z^*$$

и введем в рассмотрение криволинейную систему координат

$$\xi = \frac{\sqrt{x^{*2} - y^{*2} - z^{*2}}}{x^* + y^*}, \qquad \eta = \frac{z^*}{x^* + y^*}, \qquad \zeta = \sqrt{x^{*2} - y^{*2} - z^{*2}} \tag{2.1}$$

Легко видеть, что внутри конуса Маха $x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} = 0$, координаты ξ, η, ζ однозначно определяют положение точки. На конусе Маха $\xi = 0$,

$\zeta=0$. В треугольной области проекции крыла $z=0$, $|y|\leqslant \operatorname{tg}\gamma x$ имеем

$$\eta=0, \quad a\leqslant\xi\leqslant b \qquad \left(a=\frac{\sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma+\sin\gamma},\quad b=\frac{\sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma-\sin\gamma}\right) \tag{2.2}$$

В новых координатах уравнения (1.5) примут вид

$$\zeta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2\zeta\frac{d\varphi}{d\zeta}-\xi^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)+k^2\varphi=0 \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=f(\xi,\zeta) \tag{2.4}$$

где

$$f(\xi,\zeta)=\frac{\zeta}{\xi}\,iZ\left(\frac{\zeta(1+\xi^2)}{2\xi}\sqrt{M^2-1},\ \frac{\zeta(1-\xi^2)}{2\xi}\right)\exp\left(-i\frac{\zeta(1+\xi^2)\lambda}{2\xi}\sqrt{M^2-1}\right)$$

Полагая в уравнении (2.3) $\varphi=\chi(\xi,\eta)\psi(\zeta)$, получим после отделения переменных

$$\zeta^2\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}+2\zeta\frac{d\psi}{d\zeta}+[k^2\zeta^2-n(n+1)]\psi=0 \tag{2.5}$$

$$\xi^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial\eta^2}\right)-n(n+1)\chi=0 \tag{2.6}$$

Решения уравнения (2.5) выражаются в функциях Бесселя. Учитывая конечность функции φ на конусе Маха ($\zeta=0$), берем следующее решение уравнения (2.5):

$$\psi_n(k\zeta)=\sqrt{\frac{\pi}{2k\zeta}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(k\zeta) \qquad (n\geqslant 0) \tag{2.7}$$

Чтобы выбрать в уравнениях (2.5), (2.6) постоянную n, произведем разложение произвольной функции $F(\zeta)$, аналитической в области, содержащей начало координат, в ряд по функциям $\psi_n(\zeta)$:

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\psi_n(\zeta)$$

Чтобы установить возможность этого разложения, воспользуемся формулой Гегенбауэра (Ватсон[4], стр. 283)

$$\frac{\zeta^\nu}{\tau-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n\nu}(\tau)J_{\nu+n}(\zeta) \qquad (|\zeta|<|\tau|) \tag{2.8}$$

где $A_{n\nu}(\tau)$ — полиномы Гегенбауэра, определяемые уравнением

$$A_{n\nu}(\tau)=\frac{2^{\nu+n}(\nu+n)}{\tau^{n+1}}\sum_{m=0}^{\leqslant\frac{1}{2}n}\frac{\Gamma(\nu+n-m)}{m!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2m} \tag{2.9}$$

Полагая $\nu=\frac{1}{2}$ в (2.8) и (2.9) и учитывая (2.7), найдем разложение

$$\frac{1}{\tau-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\psi_n(\zeta) \qquad (|\zeta|<|\tau|) \tag{2.10}$$

где $A_n(\tau)$ согласно (2.9) будет иметь вид

$$A_n(\tau)=\frac{2^n(2n+1)}{\sqrt{\pi}\,\tau^{n+1}}\sum_{m=0}^{\leqslant\frac{1}{2}n}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n-m)}{m!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2m} \tag{2.11}$$

Используя разложение (2.10) и интегральную формулу Коши, найдем

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(\zeta), \qquad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|<r} F(\tau) A_n(\tau)\, d\tau \tag{2.12}$$

Коэффициенты a_n легко выразить через производные функции $F(\zeta)$ при $\zeta=0$. Действительно, приняв во внимание (2.10) и формулу Коши для производных, получим

$$a_n=\frac{2n+1}{2^n}\sum_{m=0}^{\leqslant \frac{1}{2}n} F^{(n-2m)}(0)\,\frac{(2n-2m)!}{m!\,(n-m)!\,(n-2m)!} \tag{2.13}$$

Для установившегося движения в уравнении (2.5) надо положить $k=0$, тогда $\psi_n(\zeta)=\zeta^n$ и (2.12) обращается в обыкновенный степенной ряд

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,\xi^n$$

Предположим, что в (2.4) функция $f(\xi,\zeta)$ аналитическая по ξ, тогда согласно (2.12) ее можно разложить по функциям $\psi_n(k\zeta)$ в ряд

$$f(\xi,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)\,\psi_n(k\zeta) \tag{2.14}$$

В связи с этим будем искать решение нашей задачи в виде

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(k\zeta)\,\chi_n(\xi,\eta) \tag{2.15}$$

На основании формулы (2.4) и разложения (2.14) получим граничное условие для функции $\chi_n(\xi,\eta)$, удовлетворяющей уравнению (2.6):

$$\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}=f_n(\xi) \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b) \tag{2.16}$$

где a и b определяются из (2.2). Таким образом, задача приводится к интегрированию уравнения (2.6) при граничном условии (2.16). Преобразованием $\chi_n=\xi^{n+1}\chi_n{}^*$ уравнение (2.6) приводится к уравнению Дарбу для функции $\chi_n{}^*(\xi,\eta)$, и так как в нашем случае n — целое число, то общее решение уравнения (2.6) можно представить в виде (см. Дарбу[5])

$$\chi_n(\xi,\eta)=\xi^{n+1}\,\triangle^n\,\frac{U_n(\xi,\eta)}{\xi} \tag{2.17}$$

где $U_n(\xi,\eta)$ — произвольная гармоническая функция, а $\triangle^n$ — оператор Лапласа порядка n.

§ 3. Нахождение гармонической функции U_n. Развертывая выражение (2.17), принимая во внимание, что $\triangle U_n(\xi,\eta)=0$, найдем

$$\chi_n(\xi,\eta)=n!\,\xi^{-n}\sum_{m=0}^{n}(-2)^m\frac{(2n-m)!}{m!\,(n-m)!}\,\xi^m\,\frac{\partial^m U_n}{\partial \xi^m} \tag{3.1}$$

Удовлетворяя условию (2.16), получим обыкновенное дифференциальное уравнение Эйлера для $[\partial U_n/\partial\eta]_{\eta=0}$:

$$\sum_{m=0}^{n}(-2)^m\frac{(2n-m)!}{m!\,(n-m)!}\,\xi^m\frac{d^m}{d\xi^m}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{\xi^n f_n(\xi)}{n!} \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b) \tag{3.2}$$

Общий интеграл уравнения Эйлера, как известно, имеет вид

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \sum_{m=1}^{n} C_m{}' \xi^{2m-1} + u_n(\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{3.3}$$

где $u_n(\xi)$ — частный интеграл для (3.2), а $C_m{}'$ — произвольные постоянные.

Введем комплексное переменное $\tau = \xi + i\eta$ и рассмотрим функцию этой переменной $W_n(\tau) = U_n + iV_n$. Пользуясь условиями Коши-Римана, найдем граничные условия, которым должна удовлетворять функция $W_n(\tau)$;

$$V_n(\xi, 0) = v_n(\xi) = \bar{v}_n(\xi) + \sum_{m=0}^{n} C_m \xi^{2m} \qquad \left(\bar{v}_n(\xi) = -\int_{\infty}^{\xi} u_n(\xi)\, d\xi\right) \tag{3.4}$$

где C_m — новые постоянные интегрирования и $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Далее из (2.15) и (3.1) следует, что на конусе Маха

$$\varphi(0, \eta, 0) = \lim_{\xi \to 0,\ \zeta \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\psi_n(k\xi)}{\xi^n} \sum_{m=0}^{n} (-2)^m \frac{(2n-m)!}{m!\,(n-m)!} \xi^m \frac{\partial^m U_n}{\partial \xi^m}$$

Принимая во внимание свойства функции $\psi_n(k\zeta)$ и (2.1), получим

$$\varphi(0, \eta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x+y)^n U_n(0, \eta)$$

Так как на поверхности конуса Маха функция φ обращается в нуль, то необходимо, чтобы $U_n(0, \eta) = 0$. Кроме того, в силу симметрии имеем

$$U_n(\xi, 0) = 0 \qquad (0 < \xi < a,\ \xi > b) \tag{3.5}$$

Условие (3.5) позволяет аналитически продолжить функцию $W_n(\tau)$ в левую полуплоскость.

Наконец, функция φ и, следовательно, согласно (3.1) все функции $U_n{}^{(m)}(\xi, \eta)$ должны быть конечны при $\eta = 0$ и $\xi = a$, $\xi = b$. Это условие будет выполняться, если потребовать конечности функции $W_n{}^{(m)}(\tau)$ для $m = 0, 1, \ldots, n$. Выполнение последнего условия приведет к уравнениям, определяющим постоянные C_m в уравнении (3.4). Таким образом, приходим к следующей краевой задаче теории функций: определить аналитическую функцию $W_n{}^{(m)}(\tau)$, регулярную в верхней полуплоскости, конечную в точках $\tau = \pm a$ и $\tau = \pm b$ и удовлетворяющую условиям на действительной оси ($\eta = 0$):

$$\operatorname{Im} W_n{}^{(m)} = v_n{}^{(m)}(\xi) \quad (+a < \xi < +b), \qquad \operatorname{Re} W_n{}^{(m)} = 0 \quad (a > |\xi| \text{ и } |\xi| > b)$$

$$\operatorname{Im} W_n{}^{(m)} = v_n{}^*(\xi) \quad (-b < \xi < -a) \qquad \left(v^*(-\xi) = (-1)^m v_n{}^{(m)}(\xi)\right)$$

Для $W_n{}^{(m)}(\tau)$, применяя формулу Келдыша и Седова [6,7], получим

$$\begin{aligned} W_n{}^{(m)}(\tau) &= -\frac{2}{\pi i}\sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{\tau^2 - b^2}} \int_a^b \frac{s v_n{}^{(m)}(s)}{s^2 - \tau^2} \sqrt{\frac{b^2 - s^2}{s^2 - a^2}}\, ds \qquad (m - \text{нечетное}) \\ W_n{}^{(m)}(\tau) &= -\frac{2\tau}{\pi i}\sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{\tau^2 - b^2}} \int_a^b \frac{v_n{}^{(m)}(s)}{s^2 - \tau^2} \sqrt{\frac{b^2 - s^2}{s^2 - a^2}}\, ds \qquad (m - \text{четное}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Выражения (3.6) дают для $W_n^{(m)}$ конечные значения в точках $\tau = \pm a$. Условие конечности $W_n^{(m)}(\tau)$ при $\tau = \pm b$ приводит к системе $n+1$ уравнений

$$\int_a^b \frac{s^\mu v_n^{(m)}(s)\,ds}{\sqrt{(s^2-a^2)(b^2-s^2)}} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{3.7}$$

где $\mu = 0$ при m — четном и $\mu = 1$ при m — нечетном.

Вычисляя из (3.4) $v_n^{(m)}(\xi)$ и подставляя результат в (3.7), можно системе уравнений (3.7) придать вид

$$\sum_{l=0}^{n} C_l B_{lm} = D_l \qquad (l = 0, 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

где

$$B_{l,2\nu+1} = 2(l-\nu) B_{l,2\nu} = 2l(2l-1)\ldots(2l-2\nu)\frac{a^{2(l-\nu)}}{b} J_{2(l-\nu)}$$

$$J_{2(l-\nu)} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{x^{2(l-\nu)}\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\sigma^2 x^2)}}$$

$$D_l = -\int_a^b \frac{s^\nu \bar{v}_n^{(l)}(s)\,ds}{\sqrt{(s^2-a^2)(b^2-s^2)}} \qquad \left(\sigma = \frac{a}{b},\ \nu = \begin{cases} 0 & \text{при } l \text{ четном} \\ 1 & \text{при } l \text{ нечетном} \end{cases}\right)$$

Интегралы J_{2k} можно выразить через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, пользуясь рекуррентным соотношением

$$(2l+3)k^2 J_{2l+4} = 2(l+1)(1+k^2) J_{2(l+1)} - (2l+1) J_{2l}$$

$$J_0 = K', \qquad J_2 = K' + \left(\frac{k'}{k}\right)^2 E' \qquad (k' = \sqrt{1-k^2}) \tag{3.9}$$

где K' и E' — полные эллиптические интегралы первого и второго рода от дополнительного модуля k'. Таким образом, можно вычислить все коэффициенты B_{lm} системы (3.8).

Поступила в редакцию
2 I 1947

S. V. FALKOVICH, M. D. HASKIND.—VIBRATION OF A WING OF FINITE SPAN IN A SUPERSONIC FLOW

The paper suggests a method of solution of the problem of vibration of a thin finite wing in a supersonic flow. The case considered is that of a delta wing within a Mach cone.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Возмущение движения воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью. ПММ. 1947. Т. XI.
2. Кочин Н. Е. Об установившихся колебаниях крыла круговой формы в плане. ПММ. 1942. Т. VI.
3. Хаскинд М. Д. Колебания крыла в дозвуковом потоке газа. ПММ. 1947. Т. XI.
4. Watson H. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. London. 1922.
5. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris. 1915. Vol. II.
6. Келдыш М. В. и Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. ДАН СССР. 1937, Т. XVI. № 1.
7. Седов Л. И. Теория плоских движений идеальной жидкости. Оборонгиз. 1939.