

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПО ТЕЛАМ ВРАЩЕНИЯ ПРИ
 ОБТЕКАНИИ ГАЗОМ С БОЛЬШИМИ ДОЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ**

И. И. Этерман¹

(Новосибирск)

С. А. Христианович в работе^[1] дал приближенный способ расчёта обтекания тел вращения газом. В этой работе этот способ дополняется приемом приближенного определения обтекаемого контура в фиктивной плоскости, а также указывается прием интегрирования уравнения Христиановича.

§ 1. Рассмотрим обтекание тела вращения потоком идеального, безвихревого, адиабатического газа. Ось симметрии тела направим по оси z , а ось r перпендикулярно к ней. Плоскость zr является *физической* плоскостью течения. Скорость потока на бесконечности, отнесенную к критической скорости, назовем λ_∞ .

Приведя основные уравнения движения газа к характеристическим координатам μ, ν , мы получим уравнения Христиановича. Плоскость характеристических координат μ, ν вслед за Христиановичем назовем плоскостью фиктивного течения, или для краткости просто *фиктивной* плоскостью.

Мы будем пользоваться несколько преобразованными уравнениями. Приведя уравнения Христиановича к эллиптическим координатам и совершая некоторые преобразования, получим

$$E[\varphi] = (\alpha^2 - 1) \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial \log L}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad (1.1)$$

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (1.2)$$

$$r = \int_{H_0}^H \left[\frac{\sin \vartheta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{K_\infty}{K} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \zeta^2}{\alpha^2 - 1} \right)^{1/2} \frac{\cos \vartheta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right] d\alpha + \quad (1.3)$$

$$+ \left[\frac{\sin \vartheta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{K_\infty}{K} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{1 - \zeta^2} \right)^{1/2} \frac{\cos \vartheta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] d\zeta$$

Здесь φ — потенциал скорости, ϑ — угол наклона к оси z вектора скорости, λ — модуль скорости частицы газа, отнесенный к критической скорости, ρ — плотность газа, отнесенная к критической скорости, ρ_0 — плотность в точке остановки. Выражение $E(\varphi)$ имеет вид

$$E[\varphi] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(\alpha^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right] = F(\alpha, \zeta) \quad (1.4)$$

¹ Автор приносит глубокую благодарность Ф. И. Франклю за ряд ценных советов и указаний.

Величины α и ζ связаны с эллиптическими координатами

$$\mu = ch \eta \cos \theta, \quad \nu = sh \eta \sin \theta, \quad \alpha = ch \eta, \quad \zeta = \cos \theta$$

Индекс ∞ означает в (1.3) значение функции в бесконечности. Кроме того:

$$L = \frac{\nu}{r} \left(\frac{K}{K_\infty} \right)^{1/2}, \quad M = \frac{\sin \vartheta \rho_0}{r \lambda} \frac{1}{\rho} \left(\frac{K_\infty}{K} \right)^{1/2}, \quad h^2 = \frac{c_p + c_v}{c_p - c_v}, \quad K = \frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda^2 / h^2) h^2}$$

причем для воздуха $h^2 \approx 6$.

Будем в дальнейшем штрихами обозначать величины, относящиеся к фиктивной плоскости¹. При решении уравнений (1.1), (1.2), (1.3) граничные условия на контуре A' и в бесконечности будут

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{A'} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_\infty = \lambda'_\infty, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_\infty = 0$$

Угол ϑ на A' совпадает с наклоном касательной к оси μ ; примем $\vartheta_\infty = 0$.

Соответствие $x = x(\mu, \nu)$, $y = y(\mu, \nu)$ взаимно однозначно и определяет в физической плоскости обтекание некоторого контура A , отличного от A' , со скоростью λ_∞ . Функции λ и λ' связаны соотношением

$$\lambda' = 2\lambda \left(\frac{(h-1)^{h-1}}{(h+1)^{h+1}} \frac{(h+u)^{h+1}}{(h-u)^{h-1}(u+1)^2} \right)^{1/2} \quad \left(u^2 = \frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 / h^2} \right)$$

Определим контур в плоскости физического течения, соответствующий решению этих уравнений на эллипсе $\eta = \eta_0$ плоскости $\mu\nu$.

Примем за φ_0 и ϑ_0 соответственно потенциальную функцию и угол наклона вектора скорости потока несжимаемой жидкости, обтекающей эллипсоид $\eta = \eta_0$ со скоростью λ'_∞ , а $r = \nu$. Тогда

$$\varphi_0 = \lambda'_\infty [\alpha - k Q_1(\alpha)] \zeta \quad \left(k = \frac{sh \eta_0}{dQ_1(\alpha_0)/d\eta}, \quad \alpha_0 = ch \eta_0 \right) \quad (1.5)$$

Через $P_n(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$ мы обозначаем функции Лежандра первого и второго рода. Уравнение контура A записывается в виде

$$r = \int_{H_0}^H \frac{\sin \vartheta_0}{\lambda_0} d\varphi_0, \quad z = \int_{H_0}^H \frac{\cos \vartheta_0}{\lambda_0} d\varphi_0 \quad (1.6)$$

где H_0 — точка с координатами $\theta = 0$, $\eta = \eta_0$, а H — переменная точка эллипса $\eta = \eta_0$. На эллипсе $\eta = \eta_0$ имеют место соотношения

$$\frac{\cos \vartheta}{\lambda} d\varphi = \frac{\lambda'}{\lambda} \cos \vartheta ds, \quad \frac{\sin \vartheta}{\lambda} d\varphi = \frac{\lambda'}{\lambda} \sin \vartheta ds \quad (1.7)$$

где s — длина дуги эллипса $\eta = \eta_0$; далее

$$\cos \vartheta = \frac{ch \eta_0 \sin \theta}{\sqrt{ch^2 \eta_0 - \cos^2 \theta}}, \quad \sin \vartheta = -\frac{sh \eta_0 \cos \theta}{\sqrt{ch^2 \eta_0 - \cos^2 \theta}}, \quad ds = -\sqrt{ch^2 \eta_0 - \cos^2 \theta} d\theta \quad (1.8)$$

Частное λ'/λ представимо рядом^[1]

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\lambda'_\infty}{\lambda_\infty} - \frac{\lambda_\infty'^2}{\lambda_\infty^2} e_1^* \beta + O(\beta^2) \quad \left(\beta = \lambda'^2 - \lambda_\infty'^2, \quad e^* = \frac{\lambda_\infty}{2\lambda_\infty'^3} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} - 1 \right] \right) \quad (1.9)$$

¹ Заметим, что в цитируемой здесь работе С. А. Христиановича^[1] величины в фиктивной плоскости обозначаются ~ волнистой чертой сверху.

Для λ'^2 имеем формулу

$$\lambda'^2 = \frac{1}{x^2 - \zeta^2} \left[(\alpha^2 - 1) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right)^2 + (1 - \zeta^2) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \quad (1.10)$$

которая на $\eta = \eta_0$ принимает вид

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda_\infty'^2 \sin^2 \theta}{\eta_0^2 - \zeta^2} T^2(\alpha_0) \quad \left(T(\alpha) = \alpha - kQ_1(\alpha) \right) \quad (1.11)$$

Подставляя в (1.6) выражение (1.11) и пренебрегая величинами $O(\beta^2)$, получаем уравнение контура A в параметрическом виде

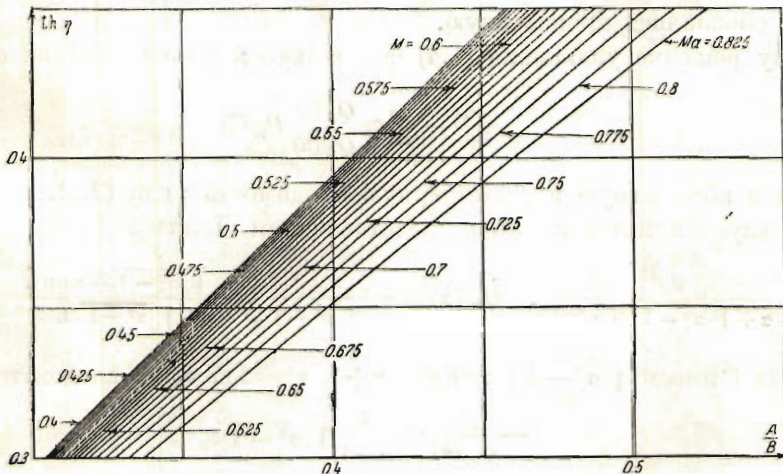
$$z = \frac{\lambda_\infty'}{\lambda_\infty} \operatorname{ch} \eta_0 \frac{1+P}{2} \left\{ \cos \theta - \frac{P-1}{P+1} T^2(\alpha_0) \left[\cos \theta + \frac{1 - \operatorname{ch}^2 \eta_0}{2 \operatorname{ch} \eta_0} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \log \left(\frac{\operatorname{ch} \eta_0 + \cos \theta}{\operatorname{ch} \eta_0 - \cos \theta} \frac{\operatorname{ch} \eta_0 - 1}{\operatorname{ch} \eta_0 + 1} \right) \right] \right\} \quad (1.12)$$

$$r = \frac{\lambda_\infty'}{\lambda_\infty} \operatorname{sh} \eta_0 \frac{1+P}{2} \left[\sin \theta - \frac{P-1}{P+1} T^2(\alpha_0) (\sin \theta - \operatorname{sh} \eta_0 \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta}{\operatorname{sh} \eta_0}) \right]$$

где $P = 1 / \sqrt{1 - M_\infty^2}$.

Кривую (1.12) с большой точностью можно принять за эллипс.

Таким образом, если контур A в плоскости zr есть эллипс, то за соответствующий ему в плоскости $\mu\nu$ контур A' с большой степенью точности можно принять эллипс с другим отношением осей.



Фиг. 1.

Фиг. 1 дает возможность, зная отношение осей A/B эллипса плоскости физического течения zr , найти отношение осей, равное $\operatorname{th} \eta_0$, эллипса фиктивной плоскости для различных значений M (числа Маха).

Основываясь на вышедоказанном, можно для тел вращения, близких к эллипсоидам вращения, дать приближенный способ нахождения A' : для этого достаточно принять, что контур A при переходе от плоскости zr к плоскости $\mu\nu$ претерпевает ту же деформацию, что и близкий к нему эллипс.

§ 2. Рассмотрим уравнение (1.4). О правой части (1.4) делаем следующие предположения: пусть функция $F(\alpha, \zeta)$ разлагается в ряд Лежандра, имеющий конечный модуль $\{F(\alpha, \zeta)\}$ в области $\eta \geq \eta_0$, т. е. ряды

$$F(\alpha, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha) P_m(\zeta), \quad \{F(\alpha, \zeta)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m\} \quad (2.1)$$

предполагаются сходящимися. Символом $\{f\}$ обозначим максимум модуля функции f в области ее задания. Кроме того, пусть $F(\alpha, \zeta)$ имеет на бесконечности порядок $O(\alpha^{-1})$; это понадобится для существования некоторых несобственных интегралов.

Найдем функцию $\varphi(\alpha, \zeta)$, удовлетворяющую (2.1) и граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\eta_0} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(\zeta) \quad \text{при } \alpha = \alpha_0, \quad (\varphi)_{\infty} = 0 \quad (2.2)$$

Мы предполагаем, что ряд из $|c_m|$ сходится.

Представим φ в виде суммы двух слагаемых $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$, где $\varphi^{(1)}(\alpha, \zeta)$ удовлетворяет условиям (2.2) и, кроме того, уравнению (1.4).

Тогда $\varphi^{(2)}$ есть решение уравнения (1.4) при условиях

$$\left(\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \alpha}\right)_{\eta_0} = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0, \quad (\varphi^{(2)})_{\infty} = 0 \quad (2.3)$$

Найдем $\varphi^{(1)}$. Заметим что решением уравнения $E[\varphi_n^{(1)}] = 0$, удовлетворяющим условию $\varphi^{(1)} = 0$ и обращающимся на эллипсе $\eta = \eta_0$ в $c_n P_n \zeta$, будет

$$\varphi_n^{(1)} = c_n P_n(\zeta) Q_n(\alpha) / \dot{Q}_n(\alpha_0) \quad (2.4)$$

где точка обозначает производную.

Поэтому решение уравнения (1.4) формально можно представить в виде

$$\varphi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{Q_n(\alpha)}{Q_n(\alpha_0)} P_n(\zeta) \quad (2.5)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.5).

Воспользуемся интегральным представлением Лапласа

$$Q_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{du}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} u)^{n+1}}, \quad \dot{Q}_n(\alpha) = -\frac{n+1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha \operatorname{ch} u}{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} u)^{n+2}} du \quad (2.6)$$

но при $\alpha \geq 1$ имеем $\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha \operatorname{ch} u \geq \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} u$, и, следовательно,

$$-\frac{Q_n(\alpha)}{\dot{Q}_n(\alpha)} < \frac{1}{n+1} \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Из последнего неравенства заключаем, что

$$c_n P_n(\zeta) \frac{Q_n(\alpha)}{\dot{Q}_n(\alpha_0)} < |c_n| \frac{1}{n+1} \sqrt{\alpha_0^2 - 1} \quad (2.7)$$

Следовательно, ряд (2.5) сходится абсолютно и равномерно в области $\eta \geq \eta_0$. Тогда согласно теореме Харнака ряд (2.5) представляет собой решение уравнения (1.4). Решение $\varphi^{(2)}$ пишется в виде ряда

$$\varphi^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\alpha) P_m(\zeta) \quad (2.8)$$

где

$$b_m(\alpha) = P_m(\alpha) \int_{\infty}^{\alpha} a_m(\beta) Q_m(\beta) d\beta - Q_m(\alpha) \int_{\alpha_0}^{\alpha} a_m(\beta) P_m(\beta) d\beta - \frac{Q_m(\alpha)}{Q_m(\alpha_0)} \dot{P}_m(\alpha_0) \int_{\infty}^{\alpha_0} a_m(\beta) Q_m(\beta) d\beta \quad (2.9)$$

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (2.9) и его производных до второго порядка включительно следует из оценок

$$|b_m| < \frac{\{a_m\}}{m(m+1)}, \quad |\dot{P}_m(\alpha) \dot{Q}_m(\alpha)| \leq \frac{m(m+1)}{\alpha^2-1} L, \quad |\dot{P}_n(\xi)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.10)$$

причем L означает постоянную, не зависящую ни от n , ни от α .

§ 3. Рассмотрим уравнение

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} = G(\eta, \theta) \quad (3.1)$$

Пусть $G(\eta, \theta)$ разлагается в ряд Фурье с конечным модулем $\{G\}$ в области $\eta \geq \eta_0$, т. е. ряд

$$G(\eta, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m(\eta) \cos m\theta + b_m(\eta) \sin m\theta] \quad (3.2)$$

где

$$a_m(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\eta, \theta) \cos m\theta d\theta, \quad b_m(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\eta, \theta) \sin m\theta d\theta$$

а также и ряд $\{G\}$, составленный из $\{|a_m| + |b_m|\}$, сходится. Найдем также решение $\vartheta = \vartheta(\eta, \theta)$ уравнения (3.1), чтобы

$$\vartheta(\eta_0, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta], \quad \vartheta_{\infty} = 0 \quad (3.3)$$

причем мы предполагаем, что ряд, составленный из $\{|c_m| + |d_m|\}$, сходится.

Представим ϑ в виде $\vartheta^{(1)} + \vartheta^{(2)}$, где $\vartheta^{(1)}$ удовлетворяют условиям (3.3) и уравнению $\Delta \vartheta^{(1)} = 0$. Тогда $\vartheta^{(2)}$ есть решение уравнения (3.1), исчезающее на эллипсе и в бесконечности. Решение $\vartheta^{(1)}$ дается рядом

$$\vartheta^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) e^{-m(\eta-\eta_0)} \quad (3.4)$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 2, показывают, что $\vartheta^{(1)}$ удовлетворяет в области $\eta \geq \eta_0$ уравнению Лапласа.

Суммируя решения уравнений

$$\Delta \vartheta_m^{(2)} = a_m(\eta) \cos m\theta + b_m(\eta) \sin m\theta \quad (3.5)$$

находим, что

$$\vartheta^{(2)}(\eta, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [e_m(\eta) \cos m\theta + f_m(\eta) \sin m\theta] \quad (3.6)$$

где

$$e_m(\eta) = \frac{1}{2m} \left\{ e^{m\eta} \int_{\infty}^{\eta} a_m(\beta) e^{-m\beta} d\beta - e^{-m\eta} \left[\int_{\eta_0}^{\eta} a_m(\beta) e^{m\beta} d\beta + e^{2m\eta_0} \int_{\infty}^{\eta_0} a_m(\beta) e^{-m\beta} d\beta \right] \right\}$$

$$f_m(\eta) = \frac{1}{2m} \left\{ e^{m\eta} \int_{\infty}^{\eta} b_m(\beta) e^{-m\beta} d\beta - e^{-m\eta} \left[\int_{\eta_0}^{\eta} b_m(\beta) e^{m\beta} d\beta + e^{2m\eta_0} \int_{\infty}^{\eta_0} b_m(\beta) e^{-m\beta} d\beta \right] \right\}$$

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (3.5) и его производных вплоть до второго порядка доказывается неравенствами, аналогичными приведенным в конце § 2. Таким образом, ряд (3.6) действительно дает искомое решение.

§ 4. Итак, задача нахождения распределения давления по телу вращения A , обтекаемому потоком сжимаемого газа со скоростью λ_{∞} , сводится к решению уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) при граничных условиях, указанных в § 1. Рассмотрим частный случай, когда контур A' является эллипсом с уравнением $\eta = \eta_0$. Будем искать решения в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \Phi, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \theta, \quad r = \nu + R \quad (4.1)$$

Функции с индексом нуль соответствуют обтеканию эллипсоида потоком несжимаемой жидкости со скоростью λ_{∞}' и легко находятся (работа [2]). Для отыскания Φ и θ прибегнем к итерационному процессу. Первое приближение определяется уравнениями

$$E[\varphi_1] = S_0(\alpha, \zeta), \quad \Delta \vartheta_1 = T_0(\alpha, \zeta)$$

где $S_0(\alpha, \zeta)$ обозначает правую часть уравнения (1.1) с подставленными в нее вместо φ , ϑ и r функциями φ_0 , ϑ_0 , ν ; такой же смысл имеет $T_0(\alpha, \zeta)$ в отношении (1.2). Для φ_n и ϑ_n имеем уравнения

$$E[\varphi_n] = S_{n-1}(\alpha, \zeta), \quad \Delta \vartheta_n = T_{n-1}(\alpha, \zeta) \quad (4.2)$$

причем $S_{n-1}(\alpha, \zeta)$ есть правая часть уравнения (1.1) с заменой φ , ϑ и r на φ_{n-1} , ϑ_{n-1} и r_{n-1} ; такой же смысл имеет T_{n-1} в отношении (1.2). В предположении законности всех предельных переходов получаем

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \quad \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n \quad (4.3)$$

Перед тем как перейти к вопросу эффективного нахождения φ_n и ϑ_n , исследуем поведение $S_0(\alpha, \zeta)$ и $T_0(\alpha, \zeta)$ на бесконечности. Из (1.5) следует,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} &= \lambda_{\infty}' \zeta \left[1 + \frac{2}{3} \frac{k}{\alpha^3} + O(\alpha^{-4}) \right] \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} &= \lambda_{\infty}' \left[\alpha - \frac{1}{3} \frac{k}{\alpha^2} + O(\alpha^{-4}) \right] \end{aligned} \quad L_0 = 1 + \frac{2}{3} D_0^* \lambda_{\infty}'^2 \frac{k(3\zeta^2 - 1)}{\alpha^3} + O(\alpha^{-5})$$

Отсюда имеем

$$S_0(\alpha, \xi) = O(\alpha^{-2}), \quad T_0(\alpha, \xi) = O(\alpha^{-2}) \quad (4.4)$$

Представимось S_0 и T_0 рядами Лежандра и Фурье с конечными модулями очевидна в предположении $\lambda < 1$ (случай дозвукового потока); имеем

$$S_0(\alpha, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) P_n(\zeta), \quad T_0(\eta, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\eta) \sin m\theta \quad (4.5)$$

Вид второго разложения в (4.5) определяется нечетностью T_0 по переменной θ . Найдем $\varphi_1(\alpha, \zeta)$ и $\vartheta_1(\alpha, \zeta)$. Функция $\varphi_1(\alpha, \zeta)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = 0 \quad \text{на } \eta = \eta_0, \quad (\varphi_1)_{\infty} = 0$$

и уравнению (1.4). Поэтому $\varphi_1(\alpha, \zeta)$ получается методом § 2 и имеет вид

$$\varphi_1(\alpha, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m'(\alpha) P_m(\zeta)$$

$$a_m'(\alpha) = P_m(\alpha) \int_{\alpha_0}^{\alpha} c_m^{\circ}(\beta) Q_m(\beta) d\beta - Q_m(\alpha) \int_{\alpha_0}^{\alpha} c_m^{\circ}(\beta) P_m(\beta) d\beta - Q_m(\alpha) \frac{P_m(\alpha_0)}{Q_m(\alpha_0)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} c_m^{\circ}(\beta) Q(\beta) d\beta$$

Функции $\vartheta_1(\alpha, \zeta)$ удовлетворяют уравнению $\Delta \vartheta_1 = T_0(\alpha, \zeta)$ и граничным условиям

$$(\vartheta_1)_{\eta_0} = 0, \quad (\vartheta_1)_{\infty} = 0$$

Функция $\vartheta_1(\alpha, \zeta)$ получается методом § 3 и имеет вид

$$\vartheta_1 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m'(\alpha) \sin m\theta$$

$$d_m'(\alpha) = \frac{1}{2m} \left\{ e^{m\eta} \int_{\infty}^{\eta} b_m^{\circ}(\beta) e^{-m\beta} d\beta - e^{-m\eta} \left[\int_{\eta_0}^{\eta} b_m^{\circ}(\beta) e^{m\beta} d\beta + c^{2m\eta_0} \int_{\infty}^{\eta_0} b_m^{\circ}(\beta) e^{-m\beta} d\beta \right] \right\}$$

Этим мы дали способ вычисления φ_1 и ϑ_1 . Точно так же получаются φ_2 и $\vartheta_2, \dots, \varphi_n$ и ϑ_n . В самом деле, функции φ_n и ϑ_n удовлетворяют уравнениям $E[\varphi_n] = S_{n-1}$ и $\Delta \vartheta_n = T_{n-1}$ и поэтому представимы рядами

$$\varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n(\alpha) P_m(\zeta), \quad \vartheta_n = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^n(\alpha) \sin m\theta$$

В случае произвольного контура A' поступаем аналогично, только вместо потенциальной функции удобнее пользоваться функцией тока ψ . К уравнению (1.2) присоединим уравнение, получающееся из (1.1) переходом от φ к функции тока ψ ; это уравнение имеет вид

$$E[\psi] = D \tag{4.6}$$

где D будет содержать также лишь производные функции ψ . Пусть уравнение контура A' будет $\eta = \eta_0 + \delta\eta(\theta)$, где в силу близости A' к эллипсу квадратом $\delta\eta(\theta)$ можно пренебречь. Тогда можно перенести граничные условия для ψ и ϑ с A' на эллипс $\eta = \eta_0$. Пусть

$$\psi = \psi_3 + \delta\psi, \quad \vartheta = \vartheta_3 + \delta\vartheta$$

Функция ψ_3 удовлетворяет уравнению $E[\psi] = D$, а ϑ_3 уравнению (1.2) и обе функции удовлетворяют тем же граничным условиям, что и ψ и ϑ .

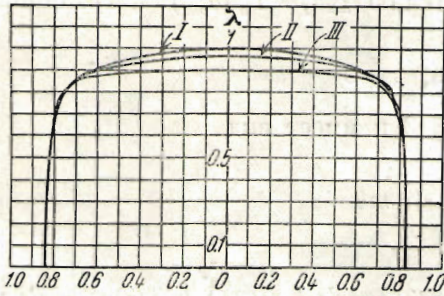
Ограничиваясь величинами первого порядка малости относительно $\delta\eta(\theta)$, получаем такое граничное условие на эллипсе $\eta = \eta_0$

$$(\delta\psi)_{\eta_0} = \left(-\frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} \delta\eta(\theta) \right)_{\eta_0}$$

и аналогичное условие для $\delta\vartheta$.

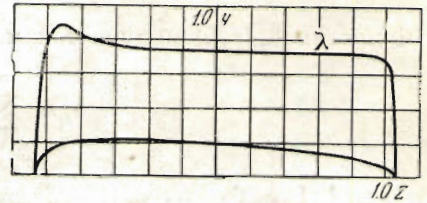
К уравнениям (1.2) и (4.6) опять применим вышеописанный итерационный процесс, а искомые функции на каждом этапе итерации будут представлены рядами Лежандра и Фурье.

§ 5. Насколько нам известно, в литературе не опубликованы данные о проведении экспериментов на распределение давления по телам вращения при больших скоростях полета. Вследствие этого мы ограничились сравнением расчетов обтекания тел сжимаемой жидкостью с экспериментами при $M=0$. На фиг. 2 нанесены распределения скоростей по эллипсоиду вращения с отношениями осей, равным 0.215, при $M_\infty=0.827$. Кривая III соответствует обтеканию эллипсоида несжимаемой жидкостью ($M=0$).



Фиг. 2

Кривые I и II дают распределение скоростей с учетом сжимаемости, первая без учета деформации, а вто-



Фиг. 3.

рая с учетом. Кривые I и II расположены над кривой III, так как эффект сжимаемости приводит к росту скоростей. Учет деформации в данном примере вносит поправку в первое приближение ^[1] порядка 3—4% или в скоростях 9.7—12.5 м/сек.

Проведенные расчеты показывают, что и в случае произвольного тела вращения учет деформации должен дать примерно такие же поправки на больших скоростях. Поэтому расчет обтекания на больших скоростях следует вести с учетом деформации тела.

На фиг. 3 дано распределение давления по некоторому телу вращения, сосчитанное с учетом деформации $M_\infty=0,665$ ($M_{cr}=0.697$).

Поступила в редакцию
3 X 1944

I. I. ETERMAN.—DISTRIBUTION OF PRESSURE OVER THE SURFACE OF A BODY OF REVOLUTION IN A GAS FLOW OF HIGH SUBSONIC VELOCITY

An approximate method of calculating the flow of a gas past a body of revolution is given in a paper by S. Christianovich^[1].

The present paper gives an additional procedure of approximate determination of the contour of the body in an auxiliary plane, and also gives a procedure for integrating the Christianovich equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Обтекание тел газом на больших скоростях. Труды ЦАГИ 1940. № 481.
2. Франкль Ф. И., Этерман И. И. Обтекание тел, близких к телам вращения. ПММ. 1944 Т. VIII (стр. 65).