Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

К ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОЛОДЦЕВ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

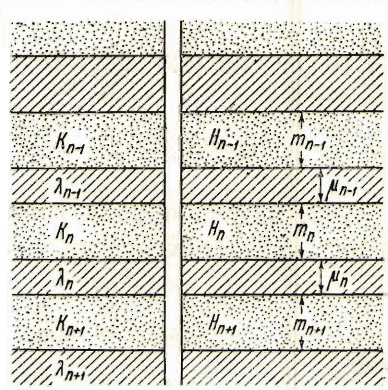
П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

В настоящей работе приводятся некоторые математические исследования, связанные с работой А. Н. Мятиева о *действии колодцев в напорном фильтрационном комплексе подземных вод*.[1] Идея, положенная в основу его работы, представляется очень важной для гидрогеологии нефтяного пласта. Она ставит по-новому вопрос о питании пласта и возможно потребует пересмотра понятия об области питания. В этой постановке доказывается, что слабая проницаемость пород, которой обычно пренебрегают (т.е. считают породы непроницаемыми), может иметь большое значение, когда фильтрация происходит по очень большой площади, поэтому инфильтрация в пласт сверху и снизу играет большую роль даже при слабо проницаемых кровле и подошве пласта. В недавно появившейся работе [3] изложены исследования, производившиеся в последние годы в Голландии по движению грунтовых вод; оказывается, что в Голландии вопросом фильтрации сверху через слабо проницаемые грунты уже занимались (есть ссылка на работу De Glee, 1931) и полученные этим путем теоретические кривые для некоторых случаев дают более близкое совпадение с действительными кривыми напора, чем кривые, полученные с помощью формулы Дюпюи. У А. Н. Мятиева задача ставится более широко, чем в работе [3] и дальнейшее развитие его теории представляет интерес. Мы здесь даем другой вывод уравнений, полученных А. Н. Мятиевым; основное же содержание статьи посвящено решению системы таких уравнений для трех хорошо проницаемых пластов в случае движения с осевой симметрией.

§ 1. Вывод уравнений. Пусть n-й водопроницаемый слой мощностью m_n имеет пьезометрическую высоту H_n, коэффициент фильтрации k_n; далее, пусть нижележащий «водоупор» мощностью μ_n имеет очень малый по сравнению с k_n коэффициент фильтрации λ_n. Остальные обозначения показаны на фиг. 1. Пусть u, v, w проекции на оси x, y, z скорости фильтрации в какой-нибудь точке M n-го пласта. Считая жидкость несжимаемой, будем иметь уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1.1)$$



Фиг. 1.

Горизонтальные скорости u, v мало меняются с высотой, поэтому их можно заменить их средними значениями по всей толщине m_n рассматриваемого n-го пласта. Проинтегрируем это уравнение по z в пределах от 0 до m_n. Имеем

$$\int_0^{m_n}\frac{\partial u}{\partial x}dz+\int_0^{m_n}\frac{\partial v}{\partial y}dz+\int_0^{m_n}\frac{\partial w}{\partial z}dz=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{m_n}u\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{m_n}v\,dz+\int_0^{m_n}\frac{\partial w}{\partial z}dz=0$$

Заменим здесь первые два интеграла произведениями средних значений $U=U(x, y)$ и $V=V(x, y)$ подинтегральных функций $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ на промежуток интегрирования m_n; последний интеграл представится как разность значения вертикальной скорости на верхней границе пласта и ее значения на нижней. Получим

$$m_n\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+w''-w'=0 \tag{1.2}$$

Скорости u, v, w имеют, как известно, потенциал

$$\varphi(x, y, z)=-k\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)=-kh(x, y, z) \qquad \left(h=\frac{p}{\rho g}+z\right)$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент фильтрации.

Применив осреднение к составляющим скорости u и v, мы тем самым осредняем и функцию h. Введем для среднего значения этой функции обозначение $H(x, y)$. Имеем

$$U=-k_n\frac{\partial H_n}{\partial x}, \qquad V=-k_n\frac{\partial H_n}{\partial y} \qquad \left(H(x, y)=\frac{1}{m_n}\int\limits_0^{m_n} h(x, y, z)\,dz\right) \tag{1.3}$$

Будем считать, что в слабо проницаемых пластах, например в пласте с коэффициентом фильтрации λ_n, фильтрация происходит в вертикальном направлении. Тогда, как известно, скорость фильтрации пропорциональна разности напоров $H_{n+1}-H_n$ на границах пласта и обратно пропорциональна его толщине; таким образом, для вертикальных скоростей w' и w'' на подошве и кровле n-го пласта получим

$$w'=\lambda_n\frac{H_{n+1}-H_n}{\mu_n}, \qquad w''=\lambda_{n-1}\frac{H_n-H_{n-1}}{\mu_{n-1}} \tag{1.4}$$

Подставив (1.3) и (1.4) в (1.2), получим уравнение А. Н. Мятиева

$$m_nk_n\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2}\right)-\frac{\lambda_n}{\mu_n}(H_n-H_{n+1})-\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}(H_n-H_{n-1})=0 \tag{1.5}$$

§ 2. Задача о фильтрации в одном пласте при постоянных напорах в двух смежных пластах. Уравнение (1.5) представим в виде

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2}-\xi_n(H_n-H)=0 \tag{2.1}$$

где

$$\xi_n=\frac{1}{m_nk_n}\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}+\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right), \qquad H=\frac{H_{n+1}\lambda_n/\mu_n+H_{n-1}\lambda_{n-1}/\mu_{n-1}}{\lambda_n/\mu_n+\lambda_{n-1}/\mu_{n-1}} \tag{2.2}$$

Если пьезометрические напоры H_{n-1} и H_{n+1} в соседних пластах настолько мало изменяются в зависимости от координат, что их можно считать постоянными, то $H=\text{const}$, и мы будем иметь одно уравнение (2.1) для определения одной неизвестной функции H_n. В этом предположении А. Н. Мятиев и решает зедачу для случая колодца в n-м пласте. Приведем решение.

Считая, что имеется цилиндрический колодец (ось которого совпадает с осью z), а течение зависит только от радиуса-вектора r, уравнение (2.1) можно преобразовать к полярным координатам

$$\frac{d^2H_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH_n}{dr}-\xi_n(H_n-H)=0 \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$H-H_n=S, \qquad \xi_n=\omega^2, \qquad \omega=\sqrt{\frac{1}{m_nk_n}\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}+\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right)} \tag{2.4}$$

Уравненение (2.3) тогда приведется к однородному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2S}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dS}{dr}-\omega^2S=0 \tag{2.5}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $S=C_1I_0(\omega r)+C_2K_0(\omega r)$, где I_0 и K_0 — функции Бесселя от мнимого аргумента.

Так как $S\to 0$, когда $r\to\infty$, то следует положить $C_1=0$ (как известно, $I_0\to\infty$ при $r\to\infty$). Получим $S=C_2K_0(\omega r)$.

Постоянная C_2 определяется из условия, что через поверхность цилиндрического колодца радиуса ρ глубины m_n протекает расход Q_ρ. Поэтому для S получается окончательно такое выражение:

$$S=H-H_n=\frac{Q_\rho}{2\pi k_nm_n\omega}\frac{K_0(\omega r)}{K_1(\omega\rho)} \tag{2.6}$$

где K_1 — функция Бесселя от мнимого аргумента первого порядка второго рода. В формуле (2.6) величина H есть постоянное значение пьезометрического напора при $r=\infty$, т. е. на больших расстояниях от колодца.

§ 3. Задача о фильтрации в трех пластах. Рассмотрим случай взаимодействия трех пластов, считая, что напоры можно принять постоянными в первом и пятом пластах. Вернемся к уравнению (1.5). Введем обозначения

$$m_nk_n=\beta_n, \qquad \frac{\lambda_n}{\mu_n}=\gamma_n, \qquad \frac{\partial^2H_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_n}{\partial y^2}=\triangle H_n \tag{3.1}$$

и будем давать n значения 0, 1, 2, 3, 4, причем будем рассматривать второй, третий и четвертый пласты с переменными напорами H_1, H_2, H_3, а H_0 и H_4 будем считать постоянными величины. Получим систему:

$$\begin{aligned}
&\beta_1\triangle H_1-(\gamma_0+\gamma_1)H_1+\gamma_1H_2 &&=-\gamma_0H_0\\
&\beta_2\triangle H_2+\gamma_1H_1-(\gamma_1+\gamma_2)H_2+\gamma_2H_3 &&=0\\
&\beta_3\triangle H_3+\gamma_2H_2-(\gamma_2+\gamma_3)H_3 &&=-\gamma_3H_4
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как рассматривается движение с осевой симметрией, то

$$\triangle H=\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr} \tag{3.3}$$

Легко видеть, что эта система имеет частное решение $H_1=H_{10}$, $H_2=H_{20}$, $H_3=H_{30}$, где H_{10}, H_{20}, H_{30} — постоянные. Действительно, в этом случае $\triangle H_1=\triangle H_2=\triangle H_3=0$ и постоянные определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&-(\gamma_0+\gamma_2)H_1+\gamma_1H_2 &&=-\gamma_0H_0\\
&\gamma_1H_1-(\gamma_1+\gamma_2)H_2+\gamma_2H_3 &&=0\\
&\gamma_2H_2-(\gamma_2+\gamma_3)H_3 &&=-\gamma_3H_4
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Определитель этой системы $D = -(\gamma_0\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3\gamma_0 + \gamma_3\gamma_0\gamma_1)$ всегда отличен от нуля; поэтому искомое постоянное решение всегда существует. Решая (3.4), имеем

$$H_{10} = -\frac{\gamma_0(\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1)H_0 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 H_4}{D}$$

$$H_{20} = -\frac{\gamma_0\gamma_1(\gamma_2+\gamma_3)H_0 + \gamma_2\gamma_3(\gamma_0+\gamma_1)H_4}{D} \tag{3.5}$$

$$H_{30} = -\frac{\gamma_0\gamma_1\gamma_2 H_0 + \gamma_3(\gamma_0\gamma_1+\gamma_1\gamma_2+\gamma_3\gamma_0)H_4}{D}$$

Эти значения постоянных дают те уровни, которые должны установиться при заданных значениях H_0 и H_4 в промежуточных пластах, если грунтовые воды будут находиться в состоянии равновесия.

Чтобы определить общее решение системы (3.2), найдем сначала решение однородной системы, которую получим, заменяя правые части в уравнениях (3.2) нулями. Решение этой однородной системы будем искать в виде

$$H_1 = A_1K_0(\omega r), \qquad H_2 = A_2K_0(\omega r), \qquad H_3 = A_3K_0(\omega r) \tag{3.6}$$

где ω, A_1, A_2, A_3 — постоянные, подлежащие определению.

Подставим выражения (3.6) в однородную систему (3.2).; учитывая, что

$$\frac{d^2K_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dK_0}{dr} = \omega^2 K_0$$

а следовательно,

$$\triangle H_1 = A_1\omega^2K_0(\omega r), \qquad \triangle H_2 = A_2\omega^2K_0(\omega r), \qquad \triangle H_3 = A_3\omega K_0(\omega r) \tag{3.7}$$

получим для определения постоянных A_1, A_2, A_3 систему уравнений:

$$\begin{aligned}
(\beta_1\omega^2-\gamma_0-\gamma_1)A_1 + \gamma_2 A_2 &= 0\\
\gamma_1 A_1 + (\beta_2\omega^2-\gamma_1-\gamma_2)A_2 + \gamma_3A_3 &= 0\\
\gamma_2A_2 + (\beta_3\omega^2-\gamma_2-\gamma_3)A_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для того чтобы существовали отличные от нуля значения A_1, A_2, A_3, удовлетворяющие этой системе, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Это дает для определения ω^2 уравнение

$$\begin{vmatrix} \beta_1\omega^2-\gamma_0-\gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2\omega^2-\gamma_1-\gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_2 & \beta_3\omega^2-\gamma_3-\gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.9}$$

Найдя три корня этого уравнения ω_ν^2 ($\nu = 1, 2, 3$) и подставив каждый из них в систему (3.8) вместо ω^2, мы получим три системы уравнений для определения постоянных $A_{1\nu}$, $A_{2\nu}$, $A_{3\nu}$, соответствующих корню ω_ν. В каждом случае эти постоянные определяются с точностью до постоянного множителя C_ν. Таким образом, получим три частных решения.

Общее решение системы (3.2), ограниченное на бесконечности, составляется с помощью выражений (3.9) и (3.5) и имеет вид

$$\begin{aligned}
H_1 &= C_1A_{11}K_0(\omega_1r) + C_2A_{12}K_0(\omega_2r) + C_3A_{13}K_0(\omega_3r) + H_{10}\\
H_2 &= C_1A_{21}K_0(\omega_1r) + C_2A_{22}K_0(\omega_2r) + C_3A_{23}K_0(\omega_3r) + H_{20}\\
H_3 &= C_1A_{31}K_0(\omega_1r) + C_2C_{32}K_0(\omega_2r) + C_3A_{33}K_0(\omega_3r) + H_{30}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

§ 4. Пример. Рассмотрим случай, когда все величины β_k равны между собой и все величины γ_k равны между собой; положим

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta, \qquad \gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma \tag{4.1}$$

В частности, эти условия будут выполнены, если все проницаемые пласты будут иметь одинаковую мощность m и один и тот же коэффициент фильтрации k, а все малопроницаемые пласты также имеют одинаковые мощности μ и коэффициенты фильтрации λ. Уравнение (3.9) имеет вид

$$(\beta\omega^2-2\gamma)\left[(\beta\omega^2-2\gamma)^2-2\gamma^2\right]=0 \quad \text{или} \quad \beta\omega^2-2\gamma=0, \quad (\beta\omega^2-2\gamma)^2=2\gamma^2$$

Отсюда

$$\omega_1^2=\frac{2\gamma}{\beta}, \qquad \omega_2^2=(2+\sqrt{2})\frac{\gamma}{\beta}, \qquad \omega_3^2=(2-\sqrt{2})\frac{\gamma}{\beta} \tag{4.2}$$

Общее решение (3.10) в рассматриваемом примере будет

$$H_1=\frac{3H_0+H_1}{4}+C_1K_0\left(r\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\right)+C_2K_0\left(r\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)-C_3K_0\left(r\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)$$

$$H_2=\frac{H_0+H_4}{2}-\sqrt{2}\,C_2K_0\left(r\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)-C_3K_0\left(r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)\sqrt{2} \tag{4.3}$$

$$H_3=\frac{H_0+3H_4}{4}-C_1K_0\left(r\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta}}\right)+C_2K_0\left(r\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)-C_3K_0\left(r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{\beta}\gamma}\right)$$

Для определения трех произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, нужно иметь три физических условия; например, если поставить условие, что одновременно отбирается из первого водоносного слоя расход жидкости Q_1, из второго Q_2, а из третьего Q_3, то постоянные C_1, C_2, C_3 можно определить. Для простоты положим, что $Q_1=Q_3=0$, $Q_2=Q$, т. е. предположим, что вода отбирается только из второго пласта. Имеем (ρ — радиус колодца)

$$Q=-2\pi r\rho km\left(\frac{dH}{dr}\right)_{r=\rho} \tag{4.4}$$

Дифференцируя (4.4) и принимая во внимание, что $K_0'(x)=K_1(x)$, согласно поставленным нами условиям дебита каждого пласта получим:

$$\left(\frac{dH_1}{dr}\right)_{r=\rho}=+C_1\omega_1K_1(\omega_1\rho)+C_2\omega_2K_1(\omega_2\rho)-C_3\omega_3K_1(\omega_3\rho)=0$$

$$\left(\frac{dH_2}{dr}\right)_{r=\rho}=-\sqrt{2}\,C_2\omega_2K_1(\omega_2\rho)-C_3\omega_3K_1(\omega_3\rho)\sqrt{2}=\frac{Q}{2\pi\rho km}$$

$$\left(\frac{dH_3}{dr}\right)_{r=\rho}=-C_1\omega_1K_1(\omega_1\rho)+C_2\omega_2K_1(\omega_2\rho)-C_3\omega_3K_1(\omega_3\rho)=0$$

Решая эту систему, найдем:

$$C_1=0, \qquad C_2=\frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\rho km\omega_2K_1(\omega_2\rho)}, \qquad C_3=\frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\rho km\omega_3K_1(\omega_3\rho)}$$

Таким образом, окончательное решение для задачи имеет вид

$$\begin{aligned} H_2&=H_{20}-\frac{Q}{4\pi\rho km}\left[\frac{K_0(\omega_2r)}{\omega_2K_1(\omega_2\rho)}+\frac{K_0(\omega_3r)}{\omega_3K_1(\omega_3\rho)}\right]\\ H_1&=H_{10}-\frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\rho km}\left[\frac{K_0(\omega_3r)}{\omega_3K_1(\omega_3\rho)}-\frac{K_0(\omega_2r)}{\omega_2K_1(\omega_2\rho)}\right]\end{aligned} \tag{4.5}$$

Для H_3 получается такое же выражение, как для H_1, только H_{10} надо заменить на H_{30}. Из последних формул видно, что понижение пьезометрического уровня для H_2 больше, чем для H_1 и H_3.

В случае, рассмотренном А. Н. Мятиевым, когда пьезометрический напор считается переменным лишь в одном пласте, вместо двух членов для H_2 получается один и притом соответствующий корню ω_1, лежащему между ω_2 и ω_3. Такое рассмотрение задачи является вполне законным, так как H_1 и H_3 меняются мало по сравнению с H_2. А так как формула А. Н. Мятиева значительно проще, то ее преимущества очевидны.

Поступила в редакцию
17 IV 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

P. J. POLUBARINOVA-KOCHINA.—HYDRAULIC THEORY OF WELLS IN A STRATIFIED MEDIUM

The so-called water-tight layers are, in point of fact, slightly permeable. The works of A. N. Miatiev[1], as well as of Dutch investigators[2] study the influence of slightly permeable layers on the influx of liquid into wells. The present work sets up the Miatiev equation in a different manner, and takes up filtration in a number of water-bearing layers (for the sake of simplicity, three layers are taken).

Let the water-layer n have a power m_n and a piezometric head H_n, and filtration coefficient k_n. The slightly permeable layer below has a power μ_n and a filtration coefficient λ_n (see fig. 1). Averaging the continuity equation (1.1) along the vertical, and assuming that filtration in the slightly permeable layers is governed by the linear law (1.4), the Miatiev equation (1.5) is obtained. If H_{n-1} and H_{n+2} may be considered constant, the value H (2.2) will also be constant. For this case of a cylindrical well, Miatiev obtained the equation (2.3), having the particular solution (2.7), where K_0, K_1 are Bessel functions of the zero and first orders and the second type. This equation replaces the well-known Dupuit equation. Calculation of the head at various distances from the well according to this equation yields the usual good coincidence with data yielded by observation.

The case of three water-bearing layers yields the system (3.2). The general solution of these equations for the case of axial symmetry is given by formulae (3.10), where C_1, C_2, C_3 are arbitrary constants, $A_{i\nu}$ are fixed constants, ω are the roots of equation (3.9), H_{10}, H_{20}, H_{30} are a particular solution of the non-homogeneous equation. For the particular case, when the power and the permeability of all the permeable layers are similar, and the same holds true for the slightly permeable layers, the particular solution of the non-homogeneous equation has the form (4.7), while the general solution of the problem will be (4.8). If the liquid is drawn into the well only from the middle (second) layer, the particular solution is given by (4.5), where Q is the discharge is the radius of the well, and ω_2, ω_3 are determined by formulae (4.2). If H_2 and H_3 are constant, formulae (4.5) for H_1 must be replaced by (2.7), where $\omega_1 = \omega = \sqrt{2\gamma/\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мятиев А. Н. Известия Туркменского филиала Академии Наук СССР. 1946.
2. Krul u. Liefrinck. Recent Groundwater Investigations in the Netherlands. 1946.