Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ВЛИЯНИЕ НА ИЗГИБ СТЕРЖНЯ ПАРОЙ ИЗГИБА ОТ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ

А. К. Рухадзе

(Тбилиси)

В задачах линейной теории упругости возможность взаимного влияния двух напряженных состояний исключается в силу принципа суперпозиции.

Если воспользоваться методом нелинейной теории упругости, изложенным в работах Мернахана[1], Зволинского и Риза[2], то можно изучить взаимное влияние, вызванное различными нагрузками.

В работах[3,4,5,6] изучаются действия, вызванные кручением, изгибом парой и изгибом силой растянутого стержня, а также изгибом парой закрученного стержня. В настоящей работе исследуется влияние, которое оказывает изгиб поперечной силой на изгиб стержня парой.

Пусть имеем призматическое тело, закрепленное одним основанием. Поместим начало координат в центре инерции этого основания, ось ζ направим параллельно образующим боковой поверхности тела, а оси ξ и η — по главным осям инерции упомянутого основания. Предположим, что боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, а усилия, действующие на свободную поверхность $\zeta = l$, статически эквивалентны совокупности изгибающей силы W, приложенной к центру тяжести этого основания, направленной параллельно одной из главных осей ξ этого сечения, и изгибающей паре с моментом M_η, направленным параллельно оси η.

Обозначим через ξ, η и ζ координаты точки упругого тела до деформации, а через x, y и z — координаты той же точки после деформации.

Приведем необходимые формулы нелинейной теории упругости.

Зависимость между компонентами тензоров деформации и напряжения для окончательного состояния тела в координатах x, y и z имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \qquad (xyz) \qquad (1)$$

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{xx} + \lambda\,(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{xx}^2 + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) -$$

$$-(\lambda + 2\mu)\,(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}) - 2\lambda\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + (3\lambda + 5\mu)\,(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2) + 3\lambda\varepsilon_{yz}^2 \qquad (2)$$

$$X_y = 2\mu\varepsilon_{xy} + (\lambda + 3\mu)\,(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yx}) + (\lambda - 2\mu)\,\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy} + 5\mu\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz} \quad (x\,y\,z)$$

Формулы (1) были указаны Файлоном, а формулы (2) — Мернаханом; постоянные в последних определены по гипотезе Зволинского — Риза.

При указанных условиях вопрос сводится к следующей задаче: требуется найти компоненты напряжения X_x, Y_y, ..., Y_z, удовлетворяющие в области S, занятой телом, однородным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0 \qquad (xyz) \tag{3}$$

условиям совместимости и граничным условиям

$$X_x\cos(nx)+X_y\cos(ny)+X_z\cos(nz)=0 \qquad (xyz) \tag{4}$$

на боковой поверхности, где $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ — направляющие косинусы нормали деформированной поверхности. Решение задачи ищем в виде

$$\begin{gathered} u=\frac{1}{2}\beta\left[\zeta^2+\sigma(\xi^2-\eta^2)\right]+\nu\left[\frac{1}{2}\sigma(l-\zeta)(\xi^2-\eta^2)+\frac{1}{2}l\zeta^2-\frac{1}{6}\zeta^3\right]+\beta\nu u_1 \\ v=\beta\sigma\xi\eta+\nu\sigma(l-\zeta)\xi\eta+\beta\nu v_1 \qquad \left(\beta=\frac{M_\eta}{EJ_\eta},\nu=\frac{W}{EJ_\eta}\right) \\ w=-\beta\xi\zeta-\nu\left[\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\xi+\chi(\xi,\eta)+\xi\eta^2\right]+\beta\nu w_1 \end{gathered} \tag{5}$$

где $\chi(\xi,\eta)$ — обычная функция изгиба, u_1, v_1 и w_1 — дополнительные смещения, выражающие искомое взаимное влияние указанных деформаций, β и ν — постоянные, E — модуль Юнга, а J_η — момент инерции сечения S относительно оси, проходящей через центр инерции параллельно оси η.

Пользуясь формулами преобразования для производных

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(1-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial}\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \zeta},\ldots \tag{6}$$

на основе формул (2) будем иметь

$$\begin{aligned} X_x&=\beta\nu\left\{2(\lambda+\mu)\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta-\frac{1}{2}\lambda(\xi^2-\eta^2)\zeta+\lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2+\right.\\ &\qquad\left.+\lambda\zeta\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]\right\}+\beta\nu\tau_{11} \\ Y_y&=\beta\nu\left\{2\lambda\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta-\lambda\sigma(\xi^2-\eta^2)\zeta+\lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2+\right.\\ &\qquad\left.+\lambda\zeta\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]\right\}+\beta\nu\tau_{22} \\ Z_z&=-E\beta\xi-E\nu(l-\zeta)\xi+\beta\nu\left\{2(\lambda+\nu)\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta-\frac{1}{2}\lambda(\xi^2-\eta^2)\zeta+\right.\\ &\qquad\left.+2\lambda\sigma^2(l-\zeta)\eta^2+4E\sigma(l-\zeta)\xi^2+(\lambda+2\mu)\zeta\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]\right\}+\beta\nu\tau_{33} \\ X_y&=-\beta\nu\sigma\xi\eta\zeta+\beta\nu\tau_{12} \\ X_z&=-\mu\nu\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]+\beta\nu\left[-\mu(1+\sigma)\left(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\right)\xi+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{3\sigma-1}{2}\mu\xi\chi_\xi'+\mu\sigma\eta\chi_\eta'+\frac{5\sigma^2+\sigma}{4}\mu\xi^3+\frac{3\sigma^2+13\sigma-2}{4}\mu\xi\eta^2\right]+\beta\nu\tau_{13} \\ Y_z&=-\mu\nu\left[\chi_\eta'+(\sigma+2)\xi\eta\right]+\beta\nu\left[-\mu\sigma\left(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\right)\eta+\frac{3\sigma-1}{2}\mu\xi\chi_\eta'-\mu\sigma\eta\chi'+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{5\sigma^2+7\sigma-1}{2}\mu\xi^2\eta-\mu\sigma\eta^3\right]+\beta\nu\tau_{23} \end{aligned} \tag{7}$$

где $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{23}$ — напряжения, соответствующие смещениям u_1, v_1 и w_1.

Уравнения равновесия (3) на основе формул (6) и (7) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta}+(\lambda+\mu)\zeta\chi_{\xi\xi}''+(3\mu-\lambda\sigma+\mu\sigma)\xi\zeta-El\xi=0\\
&\frac{\partial\tau_{21}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\zeta}+(\lambda+\mu)\zeta\chi_{\xi\eta}''+(2\mu+7\mu\sigma+3\lambda\sigma)\eta\zeta+2(\lambda-\mu)\sigma l\eta=0\\
&\frac{\partial\tau_{31}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial\zeta}+(2\lambda+3\mu)\Big(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\Big)+\frac{2\lambda+3\mu+\mu\sigma}{2}\chi_\xi'-\frac{3\mu\sigma^2+\mu\sigma-6\mu+\lambda}{2}+{}^2\\
&\qquad+\frac{7\mu\sigma^2+7\mu\sigma+6\mu+3\lambda}{2}\eta^2=0
\end{aligned}\tag{8}$$

Граничные условия (4), если учесть формулы

$$\begin{aligned}
&\cos(nx)=\cos(n\xi)-[\beta\sigma\eta+\nu\sigma(l-\zeta)\eta]\cos(n\eta)\\
&\cos(ny)=\cos(n\eta)+[\beta\sigma\eta+\nu\sigma(l-\zeta)\eta]\cos(n\xi)\\
&\cos(nz)=\nu\sigma\eta\xi\cos(n\eta)-[\beta\zeta-\sigma(\xi^2-\eta^2)+\nu(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2)]\cos(n\xi)
\end{aligned}\tag{9}$$

выражающие с точностью до β и ν направляющие косинусы нормали к деформированной поверхности через направляющие косинусы нормали к недеформированной поверхности, принимают вид

$$\begin{aligned}
&\tau_{11}\cos(n\xi)+\tau_{12}\cos(n\eta)+\Big\{2(\lambda+\mu)\Big(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)\zeta-\frac{1}{2}\lambda(\xi^2-\eta^2)\zeta+\lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2+\\
&\qquad+(\lambda+\mu)\zeta\Big[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\Big]\Big\}\cos(n\xi)-\mu\sigma\xi\eta\zeta\cos(n\eta)=0\\
&\tau_{21}\cos(n\xi)+\tau_{22}\cos(n\eta)+\Big\{\mu\zeta[\chi_\eta'+(\sigma+2)\xi\eta]-\mu\sigma\xi\eta\zeta\Big\}\cos(n\xi)+\\
&\qquad+\Big\{2\lambda\Big(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\Big)\zeta-\lambda\sigma(\xi^2-\eta^2)\zeta+\lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2+\\
&\qquad\qquad+\lambda\zeta\Big[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\Big]\Big\}\cos(n\eta)=0\\
&\tau_{31}\cos(n\xi)+\tau_{32}\cos(n\eta)+\Big[\mu(1+\sigma)\Big(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\Big)\xi+\frac{1}{2}(3\sigma^2+\sigma)\mu\xi\eta^2-\\
&\qquad-\frac{1}{2}(\sigma^2+\sigma)\mu\xi^3\Big]\cos(n\xi)+\Big[-\mu\sigma\Big(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\Big)\eta-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}(\sigma^2+2\sigma-1)\mu\xi^2\eta-\frac{1}{2}\sigma^2\mu\eta^3\Big]\cos(n\eta)=0
\end{aligned}\tag{10}$$

Соответствующие условия совместимости будут

$$\begin{aligned}
&\Delta\tau_{11}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\xi^2}+2(\lambda+\mu)\zeta\chi_{\xi\xi\xi}'''+\Big[\frac{6\lambda\sigma^2}{1-\sigma}+4(\lambda\sigma-\mu)\Big](l-\zeta)-(\lambda-2\mu)\zeta=0\\
&\Delta\tau_{22}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\eta^2}+2(\lambda+\mu)\zeta_{\xi\eta\eta}''^{k}+\Big[\frac{6\lambda\sigma^2}{1-\sigma}+8\lambda\sigma\Big](l-\zeta)+(5\lambda+4\mu)\zeta=0\\
&\Delta\tau_{23}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\zeta^2}+\Big[\frac{6\lambda\sigma^2}{1-\sigma}+10\lambda+12\mu\Big](l-\zeta)-(4\lambda+6\mu)\zeta=0\\
&\Delta\tau_{12}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\xi\,\partial\eta}+2(\lambda+\mu)\zeta\chi_{\xi\xi\eta}=0\\
&\Delta\tau_{13}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\frac{4\lambda+5\mu+\mu\sigma}{2}\chi_{\xi\xi}''+\frac{12\mu-2\lambda+3\mu\sigma-3\mu\sigma^2}{2}\xi=0\\
&\Delta\tau_{23}+\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2T}{\partial\eta\,\partial\zeta}+\frac{4\lambda+5\mu+\mu\sigma}{2}\chi_{\xi\eta}^{\circ}+\frac{10\mu+6\lambda+15\mu\sigma+7\mu\sigma^2}{2}\eta=0
\end{aligned}\tag{11}$$

Для определения дополнительных напряжений $\tau_{11}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{23}$ примем, что

$$\tau_{11} = -(\lambda+2\mu)\zeta\left[\chi_\xi' + \frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right] - 2(\lambda+\mu)\left(l\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta + $$
$$+ E(l-\zeta)\xi^2 + \frac{1}{2}\lambda(\xi^2-\eta^2)\zeta + p(l-\zeta)\eta^2 + (l-\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}$$

$$\tau_{22} = -\lambda\zeta\left[\chi_\xi' + \frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right] - 2\lambda\left(l\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta + \tag{12}$$
$$+\lambda\sigma(\xi^2-\eta^2)\zeta - \lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2 + q(l-\zeta)\xi^2 + (l-\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}$$

$$\tau_{33} = -\lambda\zeta\left[\chi_\xi'' + \frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right] - 2(\lambda+\mu)\left(l\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\zeta + \frac{1}{2}\lambda(\xi^2-\eta^2)\zeta -$$
$$-\lambda(l-\zeta)\eta^2 - p(l-\zeta)\eta^2 - q(l-\zeta)\xi^2 + c(l-\zeta) +$$
$$+A(1+\sigma)(l-\zeta)(\xi^2+\eta^2) + (l-\zeta)\sigma\Delta F$$

$$\tau_{12} = -\mu\zeta\left[\chi_\eta' + (\sigma+2)\xi\eta\right] + \mu\sigma\xi\eta\zeta - (l-\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

$$\tau_{13} = -\mu\chi - \mu(1+\sigma)\left(2l\zeta - \frac{3}{2}\zeta^2\right)\xi - \frac{3\sigma+1}{2}\mu\sigma\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\mu\sigma(1+\sigma)\xi^3 + \frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

$$\tau_{23} = \mu\sigma\left(2l\zeta - \frac{3}{2}\zeta^2\right)\eta + \frac{\sigma^2+2\sigma-1}{2}\mu\xi^2\eta + \frac{1}{2}\mu\sigma^2\eta^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

Нетрудно убедиться, что система напряжений (12) будет удовлетворять уравнениям равновесия (8), условиям совместимости (11), а также граничным условиям (10), если функции F и ψ и p, q, A определены условиями:

$$\Delta F = \frac{4\sigma^2+5\sigma-3}{2(1-\sigma)}\mu(\eta^2-\xi^2) + a \qquad \text{в области } S$$

$$\frac{dF}{dn} = \cos(n\xi)\int_0^s q\xi^2\cos(n\eta)\,ds - \cos(n\eta)\int_0^s (E\xi^2+p\eta^2)\cos(n\xi)\,ds \qquad \text{на контуре } L \tag{13}$$

$$\Delta\psi = -\frac{1+\sigma}{2}\mu\chi_\xi'^4 - \frac{3\mu\sigma^3-8\mu\sigma^3+\mu\sigma+4\mu}{4(1-\sigma)}\xi^2 + \frac{15\mu\sigma^3+6\mu\sigma^2+9\mu\sigma-6\mu}{4(1-\sigma)}\eta^2 + c - a\sigma \qquad \text{в } S$$

$$\frac{d\psi}{dn} = 0 \quad \text{на } L, \qquad q = A = \frac{3\sigma}{1-\sigma}\mu, \qquad p = \lambda - \frac{3\sigma}{1-\sigma}(\mu+\lambda\sigma)$$

где a и c определяются из условия существования функций F и ψ.

В частности, если область S есть внутренность эллипса, то

$$F = \frac{1}{24}\frac{4\sigma^2+5\sigma-3}{1-\sigma}\mu(\eta^4-\xi^4) +$$
$$+\frac{1}{192(1-\sigma)(a^2+b^2)}\left[2\mu(1-\sigma)a^2 - (20\mu\sigma^2+8\mu\sigma-6\mu-\lambda)b^2\right](\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4) +$$
$$+\left[\frac{20\mu\sigma^2+8\mu\sigma-6\mu-\lambda}{192(1-\sigma)(a^2+b^2)}(5a^2+3b^2)b^2 + \frac{(19+24\sigma)a^2+(21+24\sigma)b^2}{96(a^2+b^2)}\mu a^2\right](\xi^2-\eta^2) +$$
$$+\left[\frac{20\mu\sigma^2+8\mu\sigma-6\mu-\lambda}{64(1-\sigma)}b^2 + \frac{16\sigma+15}{32}\mu a^2\right](\xi^2+\eta^2) + \text{const}$$

$$\psi=\frac{1}{12}[m\eta^4-n\xi^4]+\frac{n-m}{16}(\xi^2+\eta^2)+\frac{mb^2-na^2}{48(a+b^2)}[\xi^4-6\xi^2\eta^2+\eta^4-(a^2-b^2)(\xi^2-\eta^2)]-$$
$$-\frac{mb^2+na^2}{12}(\xi^2-\eta^2)+\text{const}$$

где

$$m=\frac{15\mu\sigma^3+6\mu\sigma^2+9\mu\sigma-6\mu}{4(1-\sigma)}+\frac{2a^2+b^2+\frac{1}{2}\sigma(a^2-b^2)}{2(3a^2+b^2)}(1+\sigma)\mu$$

$$n=\frac{3\mu\sigma^3-8\mu\sigma^2+\mu\sigma+4\mu}{4(1-\sigma)}+\frac{2a^2+b^2+\frac{1}{2}\sigma(a^2-b^2)}{2(3a^2+b^2)}(1+\sigma)\mu$$

Возвращаясь к формулам (7), окончательно будем иметь

$$X_x=\beta\nu\left\{-2\mu\zeta\left[\chi_\xi'\,\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]+E(l-\zeta)\xi^2+\lambda\sigma(l-\zeta)\eta^2+\right.$$
$$\left.+p(l-\zeta)\eta^2+(l-\zeta)\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right\}$$

$$Y_y=\beta\nu\left[q(l-\zeta)\xi^2+(l-\zeta)\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}\right]$$

$$Z_z=-E\beta\xi-E\nu(l-\zeta)\xi+\beta\nu\left\{-2\mu\zeta\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^3\right]+\right.$$
$$+(2\sigma^2-1)\lambda(l-\zeta)\eta^2+c(l-\zeta)+4E\sigma(l-\zeta)\xi^2-p(l-\zeta)\eta^2-q(l-\zeta)\xi^2+$$
$$\left.+A(1+\sigma)(l-\zeta)(\xi^2+\eta^2)+(l-\zeta)\sigma\Delta F\right\}$$

$$X_y=-\beta\nu\mu\zeta[\chi_\eta'+(\sigma+2)\xi\eta]-\beta\nu(l-\zeta)\frac{\partial^2F}{\partial\xi\partial\eta}\tag{14}$$

$$X_z=-\mu\nu\left[\chi_\xi'+\frac{1}{2}\sigma(\xi^2-\eta^2)+\eta^2\right]+\beta\nu\left\{-\mu\chi+\frac{3\sigma-1}{2}\mu\xi\chi_\xi'+\mu\sigma\eta\chi_\eta'-\right.$$
$$\left.-E\left(2l\zeta-\frac{3}{2}\zeta^2\right)+\frac{7\sigma+3}{4}\sigma\mu\zeta^3-\frac{3\sigma^2-11\sigma+2}{4}\mu\zeta\eta^2+\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right\}$$

$$Y_z=-\mu\nu[\chi_\eta'+(\sigma+2)\xi\eta]+\beta\nu\left\{\frac{3\sigma-1}{2}\mu\xi\chi_\eta'-\mu\sigma\eta\chi_\xi'\right.$$
$$\left.+\frac{6\sigma^2+9\sigma-2}{2}\mu\xi^2\eta+\frac{\sigma(\sigma-2)}{2}\mu\eta^3+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right\}$$

Смещения, соответствующие этим напряжениям, будут

$$u=\frac{1}{2}\beta[\zeta^2+\sigma(\xi^2-\eta^2)]+\nu\left[\frac{1}{2}\sigma(l-\zeta)(\xi^2-\eta^2)+\frac{1}{2}l\zeta^2-\frac{1}{6}\zeta^3\right]+$$
$$+\beta\nu\left\{-\zeta\chi-\xi\eta^2\zeta-\left(l\zeta-\frac{1}{2}\zeta^2\right)\xi\zeta+\frac{1}{3}(l-\zeta)\xi^3+\frac{\lambda\sigma}{2\mu}(l-\zeta)\xi\eta^2+\right.$$
$$+\frac{p}{2\mu}(l-\zeta)\xi\eta^2-\frac{A\sigma}{6\mu}(l-\zeta)(\xi^3+3\xi\eta^2)+\frac{4\sigma^2+5\sigma-3}{12}(l-\zeta)(3\xi\eta^2-\xi^3)+$$
$$\left.+\left(\frac{1-\sigma}{2\mu}a-\frac{c\sigma}{E}\right)(l-\zeta)\xi-\frac{1}{2}(l-\zeta)\frac{\partial F}{\partial\xi}\right\}\tag{15}$$

$$v=\beta\sigma\xi\eta+\nu\sigma(l-\zeta)\xi\eta+\beta\nu\left\{-\sigma(l-\zeta)\xi^2\eta+\frac{9}{2\mu}(l-\zeta)\xi^2\eta-\frac{A\sigma}{6\mu}(l-\zeta)(3\xi^2\eta+\eta^3)+\right.$$
$$\left.+\frac{4\sigma^2+5\sigma-3}{12}(l-\zeta)(\eta^3-3\xi^2\eta)+\left(\frac{1-\sigma}{2\mu}a-\frac{c\sigma}{E}\right)(l-\zeta)\eta-\frac{1}{2\mu}(l-\zeta)\frac{\partial F}{\partial\eta}\right\}$$

$$w = -\beta\xi\zeta - \nu\left[\left(l\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\xi + \chi(\xi, \eta) + \xi\eta^2\right] + \beta\nu\left\{-\left(\frac{1}{3}l\zeta^3 - \frac{1}{8}\zeta^4\right) + \right.$$
$$+ \sigma\left(l\zeta - \frac{3}{4}\zeta^2\right)(\eta^2 - \xi^2) + \frac{c}{E}\left(l\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma}{2\mu}a - \frac{c\sigma}{E}\right)(\xi^2 + \eta^2) +$$
$$\left. + \left(\frac{2\sigma^2 + \sigma + 7}{12} - \frac{A\sigma}{6\mu}\right)\frac{\xi^4}{4} + \left(\frac{10\sigma^2 + 5\sigma - 3}{12} - \frac{A\sigma}{6\mu}\right)\frac{\eta^4}{4} + \frac{1 + \sigma - 2\sigma^2}{8}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{\mu}\psi - \frac{1}{2\mu}F\right\}$$

Напряжения (14) на торцевой поверхности $\zeta = l$, вообще говоря, не будут удовлетворять требуемым условиям. Чтобы удовлетворить и этим условиям, следует к полученному решению добавить решение некоторой линейной задачи Сен-Венана, нейтрализующее лишние напряжения на указанной поверхности. В случае, когда оси координат являются осями симметрии области S, то, как легко заметить, будет иметь место

$$X = W, \qquad M_y = M_\eta, \qquad Z = -3\mu l\beta\nu W, \qquad Y = M_x = M_z = 0 \tag{16}$$

где X, Y, Z, M_x, M_y, M_z—компоненты главного вектора и главного момента напряжения на указанной поверхности.

Поступила в редакцию
30 V 1946

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский математический институт

A. K. RUKHADZE.—INFLUFNCE OF TRANSVFRSE FORCE ON TORQUE IN BENDING OF A BAR

Given a prismatic bar clamped at a butt end. The origin of coordinates is placed at the centre of inertia of the butt end cross section; the ζ axis is directed parallel to the generatrix of the side surface of the prismatic body, the ξ and η axes are directed along the principal axes of inertia of the above cross section. It is assumed that the side surface of the body is free of loading and that the load on the free butt end is statically equivalent to the bending force W and the bending torque M_η directed parallel to the η axis. The bending force is applied to the centre of gravity of the free butt end and is directed parallel to one of the principle axes of this cross section.

The expressions for the displacement components are employed in the work in the form (5), where u_1, v_1, w_1 are the sought additional displacements. Stress components corresponding to displacements (5) are given by formulae (7), where $\tau_{11}, \ldots, \tau_{23}$ are stresses corresponding to displacements u_1, v_1, w_1.

To determine the stresses, the author employs the equilibrium equations (8), the boundary conditions (10) and the compatibility conditions (11).

The solution of the problem is given in formula (12), where A, q and p are constants, and F and ψ are functions determined by formula (13). The determination in final form is given in formulae (15) and (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Murnaghan F. Finite Deformations of Elastic Solid. Amer. Journal of Math. 1937. Vol. LIX No. 2.
2. Зволинский Н. и Риз П. О законе Гука для конечных смещений. Известия. АН СССР. Отделение технических наук. 1938. № 8—9, стр. 17—20.
3. Зволинский Н. и Риз П. Кручение растянутого призматического бруса. ДАН, 1938. T.XX, IV. Вып. 2 – 3.
4. Риз. П. Изгиб растянутого призматического стержня. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 3.
5. Рухадзе А. Изгиб силой растянутого призматического стержня. Сообщения АН Грузинской ССР. 1941. Т. II. № 7. стр. 609—617.
6. Горидзе А. и Рухадзе А. Изгиб парой закрученного стержня. Сообщения АН Грузинской ССР. 1944. Т. V. № 3. Стр. 253—262.