Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. А. Марков

(Ленинград)

В этой статье рассматриваются уравнения теории пластичности Губера—Мизеса [1]. Устанавливается, что, пренебрегая силами инерции и объемными силами, относящиеся к этим уравнениям краевые задачи можно рассматривать как вариационные, что позволяет получить некоторые результаты, касающиеся единственности решений этих краевых задач.

1. Уравнения теории пластичности Губера—Мизеса имеют вид

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad (x, y, z) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \qquad \text{или} \qquad p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.3}$$

$$\sigma_x' = \sigma_x + p \qquad (x, y, z) \tag{1.4}$$

$$\sigma_x' = k\frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \tau_{yz} = \frac{k}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad (x, y, z) \tag{1.5}$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \qquad (1, 2, 3) \tag{1.6}$$

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2K^2 \tag{1.7}$$

Здесь обозначение (x, y, z) справа означает, что выписана лишь одна из трех формул, получаемых одна из другой циклической перестановкой букв x, y, z; аналогичный смысл имеет обозначение $(1, 2, 3)$.

Буква ρ обозначает плотность пластической среды; v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в декартовой системе координат; F_x, F_y, F_z — составляющие объемной силы; t — время; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ — составляющие тензора напряжений $\mathbf{T}$, а $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z'$ — диагональные составляющие уравновешенного тензора напряжений $\mathbf{T}'$:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad T' = \begin{pmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z + p \end{pmatrix}$$

Буква p обозначает среднее давление, определяемое (в силу инвариантности суммы диагональных элементов тензора напряжений $\mathbf{T}$) равносильными равенствами (1.3), в которых σ_1, σ_2, σ_3 суть главные напряжения, т. е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Далее τ_1, τ_2 τ_3 суть главные скалывающие напряжения; K — зависящая от материала постоянная пластичности.

Уравнения (1.1) суть общие уравнения динамики сплошной среды. Уравнение (1.2) есть условие несжимаемости. Равенства (1.4) определяют диагональные составляющие уравновешенного тензора напряжений. Уравнения (1.5) выражают пропорциональность этого тензора тензору скорости деформации

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Коэффициент k в формулах (1.5) является неизвестной функцией аргументов x, y, z, t. На эту функцию мы накладываем условие $k > 0$.

Равенства (1.6) определяют главные скалывающие напряжения как функции тензора напряжений. Нетрудно видеть, что сумма их квадратов может быть представлена в виде

$$\frac{3}{4}\left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}^2\right)$$

Поэтому условие пластичности (1.7) может быть представлено в виде

$$\sum \left(\sigma_x'^2 + 2\tau_{yz}^2\right) = L^2 \qquad \left(L = 2\sqrt{\frac{2}{3}}K\right) \tag{1.8}$$

Здесь и в дальнейшем знак $\sum$ означает суммирование стоящего под этим знаком выражения с двумя другими, получаемыми из него циклическими перестановками букв x, y, z. Согласно (1.4) и (1.3)

$$\sigma_x' = \frac{1}{3}\left(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z\right) \qquad (x, y, z) \tag{1.9}$$

Принимая это во внимание, мы можем рассматривать систему десяти равенств (1.1), (1.5), и (1.8) как систему уравнений относительно стольких же неизвестных функций v_x, v_y, v_z, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}, k. При соблюдении этих уравнений и условия $k > 0$ равенство (1.2) будет выполнено, так как согласно (1.9) и (1.5) имеем

$$\sum \sigma_x' = 0, \qquad k\sum \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Плотность ρ и составляющие объемной силы F_x, F_y, F_z мы здесь рассматриваем как известные функции x, y, z, t. Считаем также известной и положительной постоянную L.

2. Вместо системы функций $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ можно рассматривать систему функций $\{\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', p\}$, связанных согласно (1.9) соотношением $\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$. Эти функции выражаются через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ согласно (1.3) и (1.9). Обратно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ выражаются через $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', p$ согласно (1.4) равенствами

$$\sigma_x = \sigma_x' - p \qquad (x, y, z) \tag{2.1}$$

В новых переменных уравнения (1.1) принимают вид

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = F_x + \frac{\partial \sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (x, y, z) \tag{2.2}$$

Искомыми являются 11 функций $v_x, v_y, v_z, \sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, p, k$. Они должны удовлетворять уравнениям (1.5), (1.8), (2.2), уравнению $\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$ и условию $k > 0$.

3. Из равенств (1.5) и (1.8) следует, что $k^2 S = L^2$, где

$$S = \sum \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 \right] \tag{3.1}$$

Так как $L \neq 0$, то величина S не может обращаться в нуль и

$$k = L / \sqrt{S} \tag{3.2}$$

причем здесь и в дальнейшем подразумевается положительное значение квадратного корня. Из равенств (1.5) и (3.2) следует, что

$$\sigma_x' = L v_{xx}, \qquad \tau_{yz} = L v_{yz} \qquad (x, y, z) \tag{3.3}$$

где

$$v_{xx} = \frac{1}{\sqrt{S}} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad v_{yz} = \frac{1}{2\sqrt{S}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad (x, y, z) \tag{3.4}$$

Подставляя правые части равенства (3.3) в уравнения (2.2), получаем

$$\frac{\rho}{L} \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{L} + \frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} - \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (x, y, z) \tag{3.5}$$

Присоединяя сюда (1.2), получаем систему четырех уравнений в частных производных относительно четырех неизвестных функций v_x, v_y, v_z, p.

Обратно, исходя из произвольного решения $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ системы уравнений (1.2) и (3.5) и определяя функции $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ равенствами (3.3), а функцию k равенством (3.2), мы получим решение $\{v_x, v_y, v_z, \sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, p, k\}$ системы уравнений, указанной в п. 2.

Таким образом, мы можем в дальнейшем иметь дело лишь с системой уравнений (1.2) и (3.5), где $v_{xx}, v_{yy}, v_{zz}, v_{yz}, v_{zx}, v_{xy}$ определяются равенствами (3.4) и (3.1), причем на S налагается условие положительности.

4. В дальнейшем мы будем пренебрегать объемными силами и силами инерции. Таким образом, мы будем писать уравнения (3.5) в виде

$$\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} - \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (x, y, z) \tag{4.1}$$

Система (1.2) и (4.1) не содержит дифференцирования по времени. Поэтому мы можем рассматривать время как параметр и в дальнейшем вообще не рассматривать зависимости от него интересующих нас функций.

5. Мы будем рассматривать некоторые краевые задачи, относящиеся к системе уравнений (1.2) и (4.1). Нашей целью является вывод условий этих задач из вариационных принципов, что даст возможность установить некоторые факты, касающиеся единственности решений этих задач.

В основе наших дальнейших рассмотрений будет лежать некоторая ограниченная область G с границей F, состоящей из конечного числа попарно не пересекающихся гладких замкнутых поверхностей.

Существенную роль будет играть функционал

$$\Phi_1(v_x, v_y, v_z) = \int_G \sqrt{S}\, d\omega \tag{5.1}$$

где $d\omega$ — элемент объема, а аргументы v_x, v_y, v_z функционала суть функции класса C'' в G такие, что во всей этой области $S > 0$. Нам будет нужна следующая формула варьирования функционала Φ_1: (5.2)

$$\delta\Phi_1 = \int_F \sum \left[(n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx})\, \delta v_x \right] d\psi - \int_G \sum \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} \right) \delta v_x \right] d\omega$$

Здесь $d\psi$ — элемент поверхности; n_x, n_y, n_z — составляющие внешней нормали. Формула (5.2) получается следующим образом. Согласно (3.1)

$$\delta\sqrt{S} = \frac{\delta S}{2\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta v_z}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial z} \right) \right]$$

Отсюда согласно (3.4)

$$\delta\sqrt{S} = \sum \left[v_{xx} \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + v_{yz} \left(\frac{\partial \delta v_z}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial z} \right) \right] = \tag{5.3}$$

$$= \sum \left[\frac{\partial}{\partial x}(v_{xx}\delta v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_{xy}\delta v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(v_{zx}\delta v_x) - \left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} \right) \delta v_x \right]$$

Отсюда по формуле Остроградского получается равенство (5.2).

6. Будем рассматривать тройки $\{v_x, v_y, v_z\}$ функций класса C'' в G, принимающих заданные значения на F и связанных соотношением (1.2). В пределах этого множества троек $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$ на F, в силу чего равенство (5.2) принимает более простой вид:

$$\delta\Phi_1 = -\int_G \sum \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} \right) \delta v_x \right] d\omega \tag{6.1}$$

В этом множестве будем искать тройку, дающую стационарное значение функционала Φ_1. Согласно методу множителей, мы должны потребовать, чтобы при соблюдении на F условия $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$, а в остальном произвольных δv_x, δv_y и δv_z имело место равенство

$$\delta \left\{ \Phi_1 + \int_G \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega \right\} = 0 \tag{6.2}$$

где λ — произвольная, не подлежащая варьированию функция класса C'. Имеем

$$\delta \int \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega = \int_G \lambda \sum \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} d\omega = \int_G \sum \left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\, \delta v_x) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta v_x \right] d\omega \tag{6.3}$$

Применяя формулу Остроградского и пользуясь тем, что на F $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$, получаем отсюда

$$\delta \int\limits_G \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega = -\int\limits_G \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta v_x \, d\omega \tag{6.4}$$

Равенства (6.1), (6.2) и (6.4) дают

$$\int\limits_G \sum \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \delta v_x \right] d\omega = 0 \tag{6.5}$$

что должно быть выполнено при произвольных δv_x, δv_y, δv_z, удовлетворяющих на F условию $\delta v_x = \delta v_y = \delta v_z = 0$. Это дает систему уравнений

$$\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \qquad (x, y, z) \tag{6.6}$$

которая лишь обозначением отличается от системы (4.1). В самом деле, (6.6) переходит в (4.1), если положить $p = -L\lambda$.

Таким образом, уравнения (4.1) представляют собой условия стационарности функционала Φ_1 в совокупности троек $\{v_x, v_y, v_z\}$ функций класса C'' в G, связанных соотношением (1.2) и заданных на F.

7. В доказательстве теоремы единственности, к которому мы теперь перейдем, будет играть существенную роль неравенство Шварца

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^{*2}} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i a_i^* \tag{7.1}$$

где a_i, a_i^* $(i = 1, \ldots, m)$ — произвольные вещественные числа и где подразумеваются неотрицательные значения квадратных корней. Полагая

$$\Delta a_i = a_i^* - a_i, \qquad \Delta \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^{*2}} - \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}$$

перепишем неравенство (7.1) в виде

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^{*2}} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^2 + \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta a_i$$

что при

$$\sum_{i=1} a_i^2 > 0 \tag{7.2}$$

дает

$$\Delta \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta a_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} \tag{7.3}$$

При соблюдении условия (7.2) знак равенства в формуле (7.1) имеет место лишь в случае существования вещественного неотрицательного числа μ, такого, что $a_i^* = \mu a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Следовательно, лишь в этом случае имеет место знак равенства в формуле (7.3).

8. Пусть теперь имеем две системы $\{v_x, v_y, v_z\}$ и $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*\}$ функций класса C'' в G. Условимся применить знак Δ как символ конечного приращения при переходе от первой системы ко второй.

При $S>0$ имеем, согласно (3.1), (3.4) и (7.3),

$$\Delta\sqrt{S}\geqslant\sum\left[v_{xx}\frac{\partial\Delta v_x}{\partial x}+v_{yz}\left(\frac{\partial\Delta v_z}{\partial y}+\frac{\partial\Delta v_y}{\partial z}\right)\right]\tag{8.1}$$

причем знак равенства имеет место лишь в случае существования неотрицательного числа μ такого, что

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x}=\mu\frac{\partial v_x}{\partial x},\quad\frac{\partial v_z^*}{\partial y}+\frac{\partial v_y^*}{\partial z}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\qquad(x,\,y,\,z)\tag{8.2}$$

Соотношение (8.1) аналогично формуле (5.3). Все различие состоит в том, что знак $=$ заменен знаком $\geqslant$ и знак вариации δ заменен знаком конечного приращения Δ. Действуя дальше, как в 5, получаем (8.3)

$$\Delta\Phi_1\geqslant\int_F\sum\left[(n_xv_{xx}+n_yv_{xy}+n_zv_{zx})\,\Delta v_x\right]d\psi-\int_G\sum\left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial v_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial v_{zx}}{\partial z}\right)\Delta v_x\right]d\omega$$

что аналогично равенству (5.2). Знак равенства в формуле (8.3) имеет место в том и только в том случае, когда существует определенная в области G неотрицательная функция μ такая, что равенства (8.2) соблюдаются в каждой точке этой области. В последнем случае имеем согласно (3.1) $S^*=\mu^2S$, где

$$S^*=\sum\left[\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z^*}{\partial y}+\frac{\partial v_y^*}{\partial z}\right)^2\right]\tag{8.4}$$

Следовательно, $\sqrt{S^*}=\mu\sqrt{S}$, где подразумеваются неотрицательные значения квадратных корней, а потому при $S^*>0$ имеем согласно (3.4) и (8.2)

$$v_{xx}^*=v_{xx},\qquad v^*_{yz}=v_{yz}\qquad(x,\,y,\,z)\tag{8.5}$$

где

$$v_{xx}^*=\frac{1}{\sqrt{S^*}}\frac{\partial v_x^*}{\partial x},\qquad v_{yz}^*=\frac{1}{2\sqrt{S^*}}\left(\frac{\partial v_z^*}{\partial y}+\frac{\partial v_y^*}{\partial z}\right)\qquad(x,\,y,\,z)\tag{8.6}$$

9. Пусть система функций $\{v_x,v_y,v_z,p\}$, где v_x,v_y,v_z—функции класса C'' в G, а p—функция класса C' в G, удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1.2) и (4.1); система $\{v_x^*,v_y^*,v_z^*\}$ функций класса C'' в G удовлетворяет уравнению (1.2) в G и условиям $v_x^*=v_x$, $v_y^*=v_y$, $v_z^*=v_z$ на F; пусть при этом $S^*>0$ в G, где S^* определяется равенством (8.4).

Так как при соблюдении уравнений (4.1), $S>0$ в области G (иначе эти уравнения не имеют смысла), то имеет место неравенство (8.3). С другой стороны, в силу $v_x^*=v_x$, $v_y^*=v_y$, $v_z^*=v_z$ на F имеем $\Delta v_x=\Delta v_y=\Delta v_z=0$ на F. Таким образом,

$$\Delta\Phi_1\geqslant-\int_G\sum\left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial v_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial v_{zx}}{\partial z}\right)\Delta v_x\right]d\omega$$

В силу (4.1) это неравенство дает

$$\Delta\Phi_1\geqslant-\frac{1}{L}\int_G\sum\frac{\partial p}{\partial x}\Delta v_x\,d\omega=\frac{1}{L}\int_G\sum\left[p\frac{\partial\Delta v_x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(p\Delta v_x)\right]d\omega$$

Так как системы функций $\{v_x,v_y,v_z\}$ и $\{v_x^*,v_y^*,v_z^*\}$ удовлетворяют уравнению (1.2), имеем $\sum\partial\Delta v_x/\partial x=0$.

Следовательно, применяя формулу Остроградского, получим

$$\Delta\Phi_1\geqslant-\frac{1}{L}\int_G\sum\frac{\partial}{\partial x}(p\,\Delta v_x)\,d\omega=-\frac{1}{L}\int_F p\sum n_x\Delta v_x\,d\psi$$

Отсюда $\Delta\Phi_1 \geqslant 0$, так как $\Delta v_x = \Delta v_y = \Delta v_z = 0$ на F, причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда существует определенная в области G положительная функция μ такая, что равенства (8.2) соблюдаются в каждой точке этой области. В этом случае, как мы знаем, имеют место равенства (8.5).

Таким образом, мы получаем следующий результат. Пусть система $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ функций, определенных в области G, удовлетворяет уравнениям (1.2) и (4.1), причем v_x, v_y, v_z — функции класса C'' в G, а p — функция класса C' в G. Пусть на границе F области G функции v_x, v_y, v_z удовлетворяют условиям $v_x = v_x^0$, $v_y = v_y^0$, $v_z = v_z^0$, где v_x^0, v_y^0, v_z^0 — функции точки, определенные на F. Тогда система функций $\{v_x, v_y, v_z\}$ дает абсолютный минимум функционала Φ в совокупности систем $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*\}$ функций класса C'' в G, удовлетворяющих граничным условиям $v_x = v_x^0$, $v_y^* = v_y^0$, $v_z^* = v_z^0$ на F и уравнению (1.2) в G. Если какая-нибудь другая система функций $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*\}$ из той же совокупности также дает абсолютный минимум функционала Φ_1, то имеют место равенства (8.5), где левые части определяются (8.4) и (8.6).

10. Допустим теперь, что системы функций $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ и $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*, p^*\}$ являются решениями системы дифференциальных уравнений (1.2) и (4.1) в области G, причем в этой области $v_x, v_y, v_z, v_x^*, v_y^*, v_z^*$ суть функции класса C'', а p и p^* — функции класса C', и на границе F этой области соблюдены равенства $v_x = v_x^*$, $v_y = v_y^*$, $v_z = v_z^*$. Тогда, согласно предыдущему, обе системы $\{v_x, v_y, v_z^*\}$ и $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*\}$ соответствуют абсолютному минимуму функционала Φ_1, откуда следует, что имеют место равенства (8.5). Из этих равенств согласно (4.1) следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial x} \qquad (x,\ y,\ z)$$

Следовательно, p и p^* отличаются одна от другой на постоянную.

Принимая во внимание равенства (2.1) и (3.3), выражающие тензор напряжений через функции v_x, v_y, v_z, p, приходим к следующему заключению: *задание скорости на границе пластического тела, подчиняющегося теории Губера—Мизеса, определяет тензор напряжений внутри тела однозначно с точностью до одной и той же постоянной слагаемой в диагональных составляющих этого тензора.*

11. Перейдем к рассмотрению некоторых других краевых задач, связанных с той же системой дифференциальных уравнений. Будем рассматривать нормальную составляющую v_n скорости на границе F области G. Эта составляющая определяется равенством $v_n = n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z$.

Вектор скорости представляется в точке границы F в виде суммы двух векторов: нормальной скорости с составляющими $n_x v_n$, $n_y v_n$, $n_z v_n$, параллельной нормали к F, и касательной скорости, параллельной касательной плоскости. Имеем

$$t_x = v_x - n_x v_n \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.1}$$

где t_x, t_y, t_z — составляющие касательной скорости. Так как $\sum n_x^2 = 1$ и $v_n = \sum n_x v_x$, то равенство (11.1) дает $\sum n_x t_x = 0$, что выражает ортогональность касательной скорости вектору нормали к F.

Введем вектор напряжения, действующий на элемент поверхности F; обозначим через φ_x, φ_y и φ_z — составляющие этого вектора. Имеем

$$\varphi_x = n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{zx} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.2}$$

Для его нормальной составляющей φ_n имеем

$$\varphi_n = \sum n_x\varphi_x = \sum n_x(n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{zx}) \tag{11.3}$$

Вектор напряжения, действующий на элемент поверхности, представляется в виде суммы двух векторов: нормального напряжения с составляющими $n_x\varphi_n$, $n_y\varphi_n$, $n_z\varphi_n$, параллельного нормали к F, и касательного напряжения, параллельного касательной плоскости, с составляющими

$$\tau_x = \varphi_x - n_x\varphi_n \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.4}$$

Так как $\sum n_x^2 = 1$, и $\varphi_n = \sum n_x\varphi_x$, имеем $\sum n_x\tau_x = 0$, что выражает ортогональность касательного напряжения вектору нормали к F.

Так как $\sum n_x^2 = 1$, то согласно (2.1) и (11.3)

$$\varphi_n = \varphi_n' - p \tag{11.5}$$

где

$$\varphi_n' = \sum n_x(n_x\sigma_x' + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{zx}) \tag{11.6}$$

В силу (2.1) и (11.5)

$$\sigma_x - \varphi_n = \sigma_x' - \varphi_n' \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.7}$$

В силу (11.2) и (11.4), $\tau_x = n_x(\sigma_x - \varphi_n) + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{zx}$ $(x,\ y,\ z)$, откуда согласно (11.7)

$$\tau_x = n_x(\sigma_x' - \varphi_n') + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{zx} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.8}$$

При соблюдении соотношений (3.3) получаем далее в силу (11.6)

$$\varphi_n' = L\sum n_x(n_xv_{xx} + n_yv_{xy} + n_zv_{zx}) \tag{11.9}$$

Отсюда, по (11.8), следует, что τ_x, τ_y, τ_z выражаются через v_{xx}, v_{yy}, v_{zz}, v_{yz}, v_{zx}, v_{xy} и, следовательно, вполне определяются полем скоростей. В дальнейшем мы будем пользоваться равенствами, вытекающими из (3.3) и (11.8):

$$\tau_x = L(n_xv_{xx} + n_yv_{xy} + n_zv_{zx}) - n_x\varphi_n' \qquad (x,\ y,\ z) \tag{11.10}$$

12. Будем рассматривать системы $\{v_x,\ v_y,\ v_z\}$ функций класса C'' в G, связанные соотношением (1.2) и удовлетворяющие граничным условиям следующего типа: на F принимают заданные значения нормальная составляющая $v_n = \sum n_xv_x$ скорости и составляющие касательного напряжения τ_x, τ_y, τ_z, определяемые, исходя из системы $\{v_x,\ v_y,\ v_z\}$, равенствами (3.1), (3.4), (11.9) и (11.10). В совокупности этих систем имеем на F

$$\delta v_n = 0, \qquad \delta\tau_x = \delta\tau_y = \delta\tau_z = 0 \tag{12.1}$$

Определим на F функцию T равенством

$$T = \sum(n_xv_{xx} + n_yv_{xy} + n_zv_{zx})\,t_x \tag{12.2}$$

и в совокупности систем $\{v_x,\ v_y,\ v_z\}$ определим функционал Φ_2 равенством

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \int_F T\,d\psi \tag{12.3}$$

В силу (11.1) и (12.1) имеем $\delta t_x = \delta v_x\,(x, y, z)$ на F. Согласно (11.10) и (12.1)

$$n_x \delta v_{xx} + n_y \delta v_{xy} + n_z \delta v_{zx} = n_x \frac{\delta \varphi_n'}{L}$$

и потому согласно условию ортогональности $\sum n_x t_x = 0$ имеем

$$\sum (n_x \delta v_{xx} + n_y \delta v_{xy} + n_z \delta v_{zx})\, t_x = 0 \tag{12.4}$$

Так как $\delta t_x = \delta v_x\,(x, y, z)$, то в силу (12.2) и (12.4), имеем

$$\delta T = \sum (n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx})\, \delta v_x$$

Принимая это во внимание, получаем согласно (5.2) и (12.3)

$$\delta \Phi_2 = -\int\limits_G \sum \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} \right) \delta v_x \right] d\omega \tag{12.5}$$

Будем искать систему $\{v_x, v_y, v_z\}$, соответствующую стационарному значению функционала Φ_2. Мы должны потребовать, чтобы при соблюдении условий (12.1), а в остальном произвольных вариациях функций v_x, v_y, v_z имело место равенство

$$\delta \left\{ \Phi_2 + \int\limits_G \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x}\, d\omega \right\} = 0 \tag{12.6}$$

где λ — произвольная, не подлежащая варьированию функция класса C'.

Имеем равенства (6.3), откуда по формуле Остроградского

$$\delta \int\limits_G \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x}\, d\omega = \int\limits_F \lambda \sum n_x \delta v_x d\psi - \int\limits_G \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta v_x\, d\omega \tag{12.7}$$

Так как $v_n = \sum n_x v_x$, то согласно (12.1) на F имеем $\sum n_x \delta v_x = 0$ и равенство (12.7) дает

$$\delta \int\limits_G \lambda \sum \frac{\partial v_x}{\partial x}\, d\omega = -\int\limits_G \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta v_x\, d\omega \tag{12.8}$$

Равенства (12.5), (12.6) и (12.8) дают условие (6.5), которое должно быть выполнено при произвольных δv_x, δv_y, δv_z, удовлетворяющих на F условиям (12.1). Это опять дает дифференциальные уравнения (6.6), которые лишь обозначениями отличаются от уравнений (4.1). Таким образом, уравнения (4.1) представляют собой условия стационарности функционала Φ_2 в совокупности систем $\{v_x, v_y, v_z\}$ функций класса C'' и G, связанных соотношением (1.2) в G и соответствующих заданным значениям v_n, τ_x, τ_y, τ_z на F.

13. Пусть теперь система функций $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ является решением системы дифференциальных уравнений (1.2) и (4.1), причем v_x, v_y, v_z—функции класса C'' в G, а p—функция класса C' в G; пусть система функций $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*)$ класса C'' в G удовлетворяет в G условию (1.2) и на F условиям

$$v_n = v_n^*, \qquad \tau_x = \tau_x^* \qquad (x, y, z) \tag{13.1}$$

где $v_n^* = \sum n_x v_x^*$, а τ_x^*, τ_y^*, τ_z^* определяются равенствами

$$\tau_x^* = L\,(n_x v_{xx}^* + n_y v_{xy}^* + n_z v_{zx}^*) - n_x \varphi_n'^* \qquad (x, y, z) \tag{13.2}$$

$$\varphi_n'^* = L \sum n_x (n_x v_{xx}^* + n_y v_{xy}^* + n_z v_{zx}^*) \tag{13.3}$$

аналогичными равенствами (11.10) и (11.9). Покажем, что тогда $\Delta \Phi_2 \geqslant 0$.

Полагая аналогично (11.1)

$$t_x^* = v_x^* - n_x v_n^* \qquad (x, y, z) \qquad (13.4)$$

имеем согласно (12.2)

$$\Delta T = \sum [(n_x \Delta v_{xx} + n_y \Delta v_{xy} + n_z \Delta v_{zx}) t_x^* + (n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx}) \Delta t_x] \qquad (13.5)$$

Согласно (13.1) имеем $\Delta v_n = 0$ и $\Delta \tau_x = \Delta \tau_y = \Delta \tau_z = 0$, откуда согласно (11.1), (11.10), (13.2), (13.4) получаем $\Delta t_x = \Delta v_x$,

$$n_x \Delta v_{xx} + n_y \Delta v_{xy} + n_z \Delta v_{zx} = n_x \frac{\Delta \varphi_n'}{L} \qquad (x,y,z) \qquad (13.6)$$

Так как $\sum n_x^2 = 1$ и $v_n^* = \sum n_x v_x^*$, то в силу (13.4) имеем $\sum n_x t_x^* = 0$ и поэтому согласно (13.6) $\sum (n_x \Delta v_{xx} + n_y \Delta v_{xy} + n_z \Delta v_{zx}) t_x^* = 0$. Согласно (13.5) имеем поэтому $\Delta T = \sum [(n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx}) \Delta t_x]$.

Откуда, согласно (8.3) и (12.3),

$$\Delta \Phi_2 \geqslant - \int\limits_G \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{zx}}{\partial z} \right) \Delta v_x \right] d\omega.$$

Рассуждая далее как в п. 9, получаем

$$\Delta \Phi_2 \geqslant -\frac{1}{L} \int p \sum n_x \Delta v_x \, d\psi$$

Из соотношений $v_n = \sum n_x v_x$, $v_n = v_n^*$ и $v_n^* = \sum n_x v_x^*$ следует: $\sum n_x \Delta v_x = 0$. Таким образом, $\Delta \Phi_2 \geqslant 0$. Как и в п. 9, знак равенства имеет здесь место в том и только в том случае, когда в области G выполнены равенства (8.5).

Таким образом, мы получаем следующий результат. Пусть система $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ функций, определенных в области G, удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1.2) и (4.1), причем v_x, v_y, v_z суть функции класса C'' в G, а p — функция класса C' в G. Пусть на границе F области G удовлетворяются условия

$$v_n = v_n^0, \qquad \tau_x = \tau_x^0 \qquad (x, y, z) \qquad (13.7)$$

где v_n^0, τ_x^0, τ_y^0, τ_z^0 суть функции точки, определенные на F, $v_n = \sum n_x v_x$, а τ_x, τ_y, τ_z определяются равенствами (3.1), (3.4), (11.9) и (11.10).

Тогда система функций $\{v_x, v_y, v_z\}$ дает абсолютный минимум функционала Φ_2 в совокупности систем $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*\}$ функций класса C'' в G, удовлетворяющих граничным условиям (13.7) на F и уравнению (1.2) в G. Если какая-нибудь другая система функций из той же совокупности также дает абсолютный минимум функционала Φ_2, то имеются равенства (8.5).

14. Рассуждая далее, как в п. **10**, приходим к следующему результату: *задание нормальной составляющей скорости и касательного напряжения на границе пластического тела, подчиняющегося теории Губера—Мизеса, определяет тензор напряжения внутри тела однозначно, с точностью до одной и той же постоянной слагаемой в диагональных составляющих этого тензора.*

15. Рассмотрим функционал

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \frac{1}{L} \int\limits_G p \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega - \frac{1}{L} \int\limits_F \sum \varphi_x v_x \, d\psi \qquad (15.1)$$

где аргументами являются функции v_x, v_y, v_z и p. При этом v_x, v_x, v_z суть функции класса C'' в G такие, что $S > 0$ повсюду в G; p есть функция класса C' в G; φ_x, φ_y, φ_z суть составляющие напряжения на F, определяемые равенствами (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) и (11.2).

Будем рассматривать вариацию этого функционала при постоянстве функций φ_x, φ_y, φ_z на F, т. е. при $\delta\varphi_x = \delta\varphi_y = \delta\varphi_z = 0$ на F. При этом условии

$$\delta \int\limits_F \sum \varphi_x v_x \, d\psi = \int\limits_F \sum \varphi_x v_x d\psi \tag{15.2}$$

Имеем далее

$$\delta \int\limits_G p \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega = \sum \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta p + p \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} \right] d\omega = \int\limits_G \sum \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta p - \frac{\partial p}{\partial x} \delta v_x - \frac{\partial}{\partial x} (p \delta v_z) \right] d\omega$$

Отсюда по формуле Остроградского

$$\delta \int\limits_G p \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega = \int\limits_G \sum \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta p - \frac{\partial p}{\partial x} \delta v_z \right] d\omega + \int\limits_F p \delta v_n d\psi \tag{15.3}$$

где $v_n = \sum n_x v_z$ — нормальная составляющая скорости на F.

Согласно (11.4), (11.10) и (11.5)

$$\varphi_x = \tau_x + n_x \varphi_n = L (n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx}) - n_x p$$

Отсюда

$$n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx} = \frac{1}{L} (\varphi_x + n_x p) \qquad (x, y, z) \tag{15.4}$$

Так как $v_n = \sum n_x v_x$, то в силу (5.2) это дает

$$\delta\Phi_1 = -\int\limits_G \sum \left[\left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xz}}{\partial z} \right) \delta v_x \right] d\omega + \frac{1}{L} \int\limits_F \left(\sum \varphi_x \delta v_x + p \delta v_n \right) d\omega$$

откуда согласно (15.1), (15.2) и (15.3)

$$\delta\Phi_3 = -\int\limits_G \left[\sum \left(\frac{\partial v_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta v_x + \frac{1}{L} \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta p \right] dv$$

Следовательно, уравнения (1.2) и (4.1) представляют собой условия стационарности функционала Φ_3 в совокупности систем функций $\{v_x, v_y, v_z, p\}$, удовлетворяющих на F граничным условиям вида

$$\varphi_x = \varphi_x^0 \qquad (x, y, z) \tag{15.5}$$

где φ_x^0, φ_y^0, φ_z^0 суть заданные на F функции точки и где φ_x, φ_y, φ_x определяются равенствами (2.1), (3.1), (3.3), (3.4) и (11.2). При этом рассматриваются лишь те системы $\{v_x, v_y, v_z, p\}$, в которых v_x, v_y, v_z суть функции класса C'' в G, а p — функция класса C' в G.

16. Пусть имеем две системы функций рассматриваемого типа: $\{v_x, v_y, a_z, p\}$ и $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*, p^*\}$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (1.2) и (4.1) и краевым условиям (15.5). Принимая во внимание, что $v_n = \sum n_x v_x$, заключаем из неравенства (8.3), в силу (4.1) и (15.4), что

$$\Delta\Phi \geqslant -\frac{1}{L} \int \sum \frac{\partial p}{\partial x} \Delta v_x d\omega = \frac{1}{L} \int\limits_F \left(\sum \varphi_x \Delta v_x + p \Delta v_n \right) d\psi \tag{16.1}$$

По формуле Остроградского

$$-\frac{1}{L} \int\limits_G \sum \frac{\partial p}{\partial x} \Delta v_x d\omega = \frac{1}{L} \int\limits_G \sum p \frac{\partial \Delta v_x}{\partial x} d\omega - \frac{1}{L} \int\limits_F p \Delta v_n d\psi$$

и, так как $\sum \partial \Delta v_x / \partial x = 0$ согласно (1.2), то отсюда

$$-\frac{1}{L} \int_G \sum \frac{\partial p}{\partial x} \Delta v_x \, d\omega + \frac{1}{L} \int_F p \Delta v_n \, d\psi = 0$$

Имеем, кроме того,

$$\int_F \sum \varphi_x \Delta v_x \, d\psi = \Delta \int_F \sum \varphi_x v_x \, d\psi$$

так как $\Delta\varphi_x = \Delta\varphi_y = \Delta\varphi_z = 0$ на F. Согласно (16.1) заключаем, что

$$\Delta\Phi_1 \geqslant \frac{1}{L} \Delta \int_F \sum \varphi_x v_x \, d\psi \tag{16.2}$$

В силу (1.2) имеем далее

$$\int_G p \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} d\omega = \int_G p^* \sum \frac{\partial v_x^*}{\partial x} d\omega = 0; \qquad \text{откуда} \qquad \Delta \int_G p \sum \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{16.3}$$

Из формул (15.1), (16.2) и (16.3) следует, что $\Delta\Phi_3 \geqslant 0$. Так как системы $\{v_x, v_y, v_z, p\}$ и $\{v_x^*, v_y^*, v_z^*, p^*\}$ играют здесь совершенно одинаковую роль, мы имеем аналогичным образом $-\Delta\Phi_3 \geqslant 0$. Следовательно, $\Delta\Phi_3 = 0$, откуда, как нетрудно видеть, вытекает наличие знака равенства в формуле (8.3). Отсюда, как мы знаем, следуют равенства (8.5). Далее, как и в п. 10, заключаем, что $p^* - p$ есть постоянная. Согласно (2.1), (3.2) и (11.2) на F

$$\varphi_x = L\,(n_x v_{xx} + n_y v_{xy} + n_z v_{zx}) - n_x p \qquad (x, y, z)$$

и аналогичным образом

$$\varphi_x^* = L\,(n_x v_{xx}^* + n_y v_{xy}^* + n_z v_{zx}^*) - n_x p^* \qquad (x, y, z)$$

Принимая во внимание, что $\varphi_x = \varphi_x^*$, $\varphi_y = \varphi_y^*$, $\varphi_z = \varphi_z^*$ на F и что имеют место равенства (8.5), заключаем, что $n_x(p - p^*) = 0$, $n_y(p - p^*) = 0$, $n_z(p - p^*) = 0$ на F, откуда следует, что на F имеет место равенство $p = p^*$. А так как $p^* - p$ является постоянной, то и всюду в G имеем $p^* = p$.

Принимая во внимание (2.1) и (3.3), приходим к заключению: *задание напряжения на границе пластического тела, подчиняющегося теории Губера—Мизеса, определяет тензор напряжений внутри тела однозначно.*

17. Отметим, что ни в одной из доказанных здесь теорем единственности мы не утверждаем существования решения соответствующей краевой задачи. Утверждается лишь невозможность двух различных ее решений.

Поступило в редакцию
I XI 1943

A. A. MARKOFF.—VARIATION PRINCIPLES IN THE THEORY OF PLASTICITY

It is established that if the force of inertia and the boundary forces are neglected in the Huber—Mises equations for the theory of plasticity, the boundary problems may be considered as variational. This makes it possible to obtain results related to the uniqueness of the solutions of these problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mises R. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Nachr. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen. 1913.