Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

М. И. Розовский

(Днепропетровск)

§ 1. Введение. В основу теории упругости при наличии последействия Вольтерра положил соотношения, связывающие компоненты напряжения и деформации [1]:

$$\tau_{ii}(t) = \lambda\theta(t) + 2\mu\varepsilon_{ii}(t) - \int_0^t [F(t,\tau)\,\theta(\tau) + 2\Phi(t,\tau)\,\varepsilon_{ii}(\tau)]\,d\tau \qquad (1.1)$$

$$\tau_{ij} = \mu\varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t \Phi(t,\tau)\,\varepsilon_{ij}(\tau)\,d\tau \qquad (1.2)$$

где λ и μ — коэффициенты Ляме, $F(t,\tau)$ и $\Phi(t,\tau)$ — коэффициенты последействия, $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Будем рассматривать случай, являющийся наиболее важным в приложениях, когда $F(t,\tau) = F(t-\tau)$ и $\Phi(t,\tau) = \Phi(t-\tau)$. Экспериментальные исследования показывают, что функции $F(t-\tau)$ и $\Phi(t-\tau)$ обладают следующими свойствами:

1) они возрастают при убывании разности $t-\tau$, причем

$$F(t-\tau) \to \infty, \qquad \Phi(t-\tau) \to \infty \qquad \text{при } t-\tau \to 0$$

2) убывают с возрастанием $t-\tau$, причем

$$F(t-\tau) \to 0, \qquad \Phi(t-\tau) \to 0 \qquad \text{при } t-\tau \to \infty.$$

§ 2. Поперечные колебания стержня при наличии последействия. Если стержень изготовлен из материала, в котором имеет место последействие, то для изгибающего момента нужно взять уравнение

$$M(t) = J\left[E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \int_0^t \varphi(t-\tau)\frac{\partial^2 y(\tau)}{\partial x^2}\,d\tau\right]$$

где J — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси, лежащей в нем, y — вертикальное смещение точки нейтральной оси,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \varphi(t-\tau) = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}[3F(t-\tau) + 2\Phi_1(t-\tau)]$$

Принимая во внимание формулу $\partial^2 M / \partial x^2 = F_1(x,t)$, где $F_1(x,t)$ — нагрузка, отнесенная к единице длины, и включая в состав внешней силы еще и силу инерции в сечении x, рассчитанную на единицу длины, будем иметь

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\int_0^t K(t-\tau)\frac{\partial^4 y(\tau)}{\partial x^4}d\tau=f(x,t) \tag{2.1}$$

$$a^2=\frac{Eyg}{\gamma A},\qquad K(t-\tau)=\frac{\dot{y}g}{\gamma A}\varphi(t-\tau),\qquad f(x,t)=\frac{g}{\gamma A}F_1(x,t)$$

где γ — вес единицы объема материала стержня, A — площадь поперечного сечения. В случае свободных колебаний уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\int_0^t K(t-\tau)\frac{\partial^4 y(\tau)}{\partial x^4}d\tau=0 \tag{2.2}$$

Если искать решение уравнения (2.2) в виде

$$y(x\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{2.3}$$

будем иметь

$$X_n^{(4)}-\lambda^4X_n=0,\ \ T_n''+\lambda^4\left[a^2T_n+\int_0^t K(t-\tau)T_n(\tau)d\tau\right]=0 \tag{2.4}$$

Начальные условия возьмем следующие:

$$y(0,x)=f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nX_n,\qquad \frac{\partial y(0,x)}{\partial t}=f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nX_n \tag{2.5}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются при помощи функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Интегро-дифференциальное уравнение (2.4) можно привести к интегральному уравнению. Полагая $T_n''(t)=u_n(t)$ и учитывая согласно (2.5) условия

$$T_n(0)=a_n,\qquad T_n'(0)=b_n \tag{2.6}$$

получим

$$u_n(t)+\lambda^4a^2\left[a_n+b_nt+\int_0^t(t-\tau)u_n(\tau)d\tau\right]+$$

$$+\lambda^4\int_0^t K(t-\tau)(a_n+b_n\tau)d\tau+\lambda^4\int_0^t K(t-\tau)d\tau\int_0^{\varepsilon}(\tau-s)u(s)ds=0$$

Принимая формулу Дирихле, будем иметь

$$u_n(t)=F_n(t)+\int_0^t Q(t-\tau)u_n(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

где

$$Q(t-\tau)=\lambda^4\left[a^2(\tau-t)+\int_0^{t-\tau}K(z)(t-z-\tau)dz\right] \tag{2.8}$$

$$F_n(t)=-\lambda^4\left[a^2(a_n+b_nt)+\int_0^t K(t-\tau)(a_n+b_n\tau)d\tau\right] \tag{2.9}$$

Предположим, что ядро $Q(t-\tau)$ может быть представлено в виде абсолютно и равномерно сходящегося степенного ряда

$$Q(t-\tau)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\varepsilon_{\mu}\frac{(t-\tau)^{\mu}}{\mu!} \tag{2.10}$$

Тогда получим разрешающее ядро в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$R(t-\tau)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_{\nu}}{\nu!}(t-\tau)^{\nu} \tag{2.11}$$

коэффициенты b_{ν} определяется из тождества Вольтерра[1]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}b_{\nu}z^{\nu}=\frac{L(z)}{1+zL(z)}$$

в котором, принимая во внимание (2.8):

$$L(z)=\frac{\lambda^4}{z}\int_0^{\infty}\exp\frac{-s}{z}\left[\int_0^s K(u)(s-u)\,du-a^2s\right]ds=\lambda^4\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m z^m \tag{2.12}$$

где коэффициенты γ_m уже известны.

Решение интегро-дифференциального уравнения (2.4), удовлетворяющее начальным условиям (2.6), будет

$$T_n(t)=\int_0^t(t-\tau)\left[F_n(\tau)+\int_0^{\tau}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_{\nu}}{\nu!}(\tau-s)^{\nu}F_n(s)\,ds\right]d\tau+b_nt+a_n \tag{2.13}$$

где b_{ν} определяется из системы

$$\begin{aligned}
&b_0=\lambda^4\gamma_0\\
&b_1+b_0\gamma_0\lambda^4=\lambda^4\gamma_1\\
&b_2+\lambda^4(b_1\gamma_0+b_0\gamma_1)=\lambda^4\gamma_2\\
&b_3+\lambda^4(b_2\gamma_0+b_1\gamma_1+b_0\gamma_2)=\lambda^4\gamma_3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_{\nu}+\lambda^4(b_{\nu-1}\gamma_0+b_{\nu-2}\gamma_1+b_{\nu-3}\gamma_2+\ldots+b_0\gamma_{\nu-1})=\gamma_{\nu}\lambda^4
\end{aligned}$$

Таким образом, временно́й множитель $T_n(t)$ в формуле (2.3) определен для любого вида функции $K(t-\tau)$.

Определяя, далее, известным образом $X_n(x)$ из дифференциального уравнения (2.4) так, чтобы удовлетворялись граничные условия, мы легко образуем решение интегро-дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющее начальным условиям (2.5) и соответствующим граничным условиям.

Пользуясь способом Прони[2], можно найти приближенное выражение для $\mathrm{K}(t-\tau)$ в следующем виде:

$$\mathrm{K}(t-\tau)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e^{\beta_i(t-\tau)} \tag{2.14}$$

где постоянные α_i и β_i выбираются так, чтобы эта сумма возможно лучше представляла данные численные значения для $K(t-\tau)$ при соответствующих значениях $t-\tau$.

Исходя из свойства функций $F(t-\tau)$ и $\Phi(t-\tau)$, указанных в § 1, можно заключить, что $\nu_i < 0$. Обозначим $\nu_i = -\beta_1$, где $\beta_i > 0$.

Когда функция $K(t-\tau)$ дана формулой (2.14), можно найти решение (в замкнутой форме) интегро-дифференциального уравнения (2.4), не приводя его к соответствующему интегральному уравнению.

Итак, пусть мы имеем интегро-дифференциальное уравнение

$$T''(t) + \lambda^4 \left[a^2 T(t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \alpha_i e^{-\beta_i(t-\tau)} T(\tau)\, d\tau \right] = 0 \tag{2.15}$$

индекс n для простоты опущен.

Будем искать его решение в виде

$$T(t) = \sum_m c_m e^{r_m t} \tag{2.16}$$

где c_m и r_m — постоянные, подлежащие определению; число слагаемых будет установлено ниже. Подставляя (2.16) в уравнение (2.15), получим

$$r^2 + \lambda^4 \left(a + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{r+\beta_i} \right) = 0 \tag{2.17}$$

$$\sum_m \frac{C_m}{r_m + \beta_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2.18}$$

После упрощения уравнение (2.17) дает

$$S_{p+2}(r) = 0 \tag{2.19}$$

где $S_{p+2}(r)$ — полином степени $p+2$ относительно r.

Будем называть его характеристическим уравнением интегро-дифференциального уравнения (2.15).

В случае, когда характеристическое уравнение (2.19) не имеет кратных корней, общее решение интегро-дифференциального уравнения (2.15) будет

$$T(t) = \sum_{m=1}^{p+2} C_m e^{r_m t} \tag{2.20}$$

Произвольные постоянные определяются из $p+2$ уравнений

$$a_n = \sum_{m=1}^{p+2} C_m, \qquad b_n = \sum_{m=1}^{p+2} r_m C_m, \qquad \sum_{m=1}^{p+2} \frac{C_m}{r_m+\beta_i} = 0 \tag{2.21}$$

Легко убедиться в том, что определитель системы (2.21) не равен нулю.

В случае, когда корни характеристического уравнения (2.19) кратные, для образования $p+2$ линейно независимых частных решений уравнения (2.15) следует поступать так, как поступают в таком случае при решении линейных дифференциальных уравнений. В этом случае произвольные постоянные C_m не могут уже быть определены из системы (2.21), но будут однозначно определяться из соответствующей системы, образование которой в каждом конкретном случае не составляет трудностей.

§ 3. Вынужденные поперечные колебания стержня при наличии последействия. Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\int_0^t K(t-\tau)\frac{\partial^4 y(\tau)}{\partial x^4}\,d\tau=f(x,t) \tag{3.1}$$

удовлетворяющее следующим граничным и начальным условиям:

$$y(0,t)=0,\qquad \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2}=0,\qquad y(l,t)=0,\qquad \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2}=0 \tag{3.2}$$

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.3}$$

функцию $y(x,t)$ можно представить в виде $y(x,t)=u(x,t)+v(x,t)$, где $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1), условиям (3.2), начальным условиям

$$u(x,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \tag{3.4}$$

и дает чисто вынужденные колебания, а функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\int_0^t K(t-\tau)\frac{\partial^4 v(\tau)}{\partial x^4}\,d\tau=0 \tag{3.5}$$

условиям (3.2) и (3.3) и дает свободные колебания. Если искать $v(x,t)$ в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

то, пользуясь результатами § 2, получим (3.6)

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n+b_nt+\int_0^t(t-\tau)\left[F_n(\tau)+\int_0^{\tau}R_n(\tau-s)F_n(s)\,ds\right]d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

где $R_n(\tau-s)$ — резольвента ядра,

$$\omega_n^4\left[a^2(\tau-s)+\int_s^{\tau}K(\tau-\tau_1)(\tau_1-s)\,d\tau_1\right]$$

$$F_n(t)=-\omega^4\left[a^2(a_n+b_nt)+\int_0^t K(t-\tau)(a_n+b_n\tau)\,d\tau\right],\qquad \omega_n=\frac{n\pi}{l}$$

Функцию $u(x,t)$ будем также искать в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.7}$$

Подставляя ряд (3.7) в уравнение (3.1) и допуская, что $f(x,t)$ может быть представлена в виде

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\qquad \left(f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz\right)$$

получим интегро-дифференциальное уравнение для определения $\theta_n(t)$:

$$\theta''_n(t)+\omega_n^4\left[a^2\theta_n(t)+\int_0^t K(t-\tau)\,\theta_n(\tau)\,d\tau\right]=f_n(x) \tag{3.8}$$

Тогда решение интегро-дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным и начальным условиям (3.2) и (3.4), будет

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\left[f_n(\tau)+\int_0^{\tau}R_n(\tau-s)\,f_n(s)\,ds\right](t-\tau)\,d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.9}$$

Принимая во внимание (3.6) и (3.9), получим решение интегро-дифференциального уравнения (3.1), удовлетворяющего условиям (3.2) и (3.3):

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n+b_nt+\int_0^{\tau}\left\{f_n(\tau)+F_n(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\tau}[f_n(s)+F_n(s)]\,R_n(\tau-s)\,ds\right\}(t-\tau)\,d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

§ 4. Радиальные колебания полого шара. В случае чисто радиальных смещений компоненты напряжения в сферических координатах будут (4.1)

$$\widehat{rr}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\lambda\frac{u}{r}-\int_0^t\left\{[F(t-\tau)+2\Phi(t-\tau)]\frac{\partial u(\tau)}{\partial r}+2F(t-\tau)\frac{u(\tau)}{r}\right\}d\tau$$

$$\left.\begin{matrix}\widehat{\theta\theta}\\ \widehat{\varphi\varphi}\end{matrix}\right\}=\lambda\frac{\partial u}{\partial r}+2(\lambda+\mu)\frac{u}{r}-\int_0^t\left\{F(t-\tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial r}+2\,[F(t-\tau)\,\Phi(t-\tau)]\frac{u(\tau)}{r}\right\}d\tau$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение свободных радиальных колебаний шара получим в виде (4.2)

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+2\frac{u}{r}\right)+\int_0^t[F(t-\tau)+2\Phi(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u(\tau)}{\partial r}+2\frac{u(\tau)}{r}\right]d\tau=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

Что касается граничных условий, то в случае закрепленного шарового слоя они будут такие же, как и при отсутствии последействия; в случае свободных от напряжений границ они будут иметь вид

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r}+2\lambda\frac{u}{r}-\int_0^t\left\{[F(t-\tau)+2\Phi(t-\tau)]\frac{\partial u(\tau)}{\partial r}+\right.\right. \tag{4.3}$$

$$\left.\left.+2F(t-\tau)\frac{u(\tau)}{r}\right\}d\tau\right]_{\substack{r=a\\ r=b}}=0$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы шарового слоя.

Будем искать решение **уравнения** (4.2) в виде ряда

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\,\Phi_k(r) \tag{4.4}$$

где фундаментальные функции $\Phi_k(r)$ определяются из известного уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi_k}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\Phi_k+\frac{\rho p_k^2}{\lambda+2\mu}\Phi_k=0$$

Характеристические числа p_k определяются из обычных уравнений 1) для закрепленного шарового слоя и 2) при $\lambda=\mu$ и $F(t-\tau)=\Phi(t-\tau)$ (условие Пуассона) для шарового слоя со свободными от напряжений границами.

В общем случае при условии свободных от напряжений границ значения p_k будут зависеть от вида функций $F(t-\tau)$ и $\Phi(t-\tau)$.

Фундаментальные функции Φ_k образуют в рассматриваемой области полную ортогональную систему.

Начальные условия возьмем следующие:

$$u(r,0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Phi_k, \qquad \frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Phi_k$$

Подставляя (4.4) в уравнение (4.2), получим

$$T_k''+p_k^2\left[T_k-\int_0^t Q(t-\tau)\,T_k(\tau)\,d\tau\right]=0 \qquad \left(Q(t-\tau)=\frac{F(t-\tau)+2\Phi(t-\tau)}{\lambda+2\mu}\right) \tag{4.5}$$

Уравнение вида (4.5) встречалось в § 2, решение его будет

$$T_k=a_k+b_kt+\int_0^t\left\{F_k(\tau)+\int_0^\tau F_k(s)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu!}(\tau-s)^\nu\,ds\right\}(t-\tau)\,d\tau \tag{4.6}$$

где

$$F_k(t)=p_k^2\left[a_k+b_kt-\int_0^t Q(t-\tau)(a_k+b_k\tau)\,d\tau\right]$$

2. Пусть $F(t-\tau)=\alpha_1\chi_1e^{-\alpha_1(t-\tau)}$ и $\Phi(t-\tau)=\alpha_2\chi_2e^{-\alpha_2(t-\tau)}$, где α_1, α_2, χ_1 и χ_2 — положительные постоянные, характеризующие неупругие свойства материала; χ_1 и χ_2 отражают соотношение упругих и вязких элементов, из которых состоит тело; $0\leqslant\chi_1\leqslant 1$ и $0\leqslant\chi_2\leqslant 1$.

Если искать решение уравнения (4.5) при учете (4.6), удовлетворяющее начальным условиям $T_k(0)=a_k$, $T_k'(0)=b_k$ в виде

$$T_k(t)=\sum_{i=1}^{4} c_{ik}e^{q_kt}$$

то для определения q_k получим уравнение

$$q_k^4+(\alpha_1+\alpha_2)\,q_k^3+(p_k^2+\alpha_1\alpha_2)\,q_k^2+p_k^2\left[(1-\chi_1)\,\alpha_1+(1-\chi_1')\,\alpha_2\right]q_k+$$
$$+\,p_k^2\,(1-\chi_1'-\chi_2')\,\alpha_1\alpha_2=0 \tag{4.7}$$

и систему уравнений для определения c_{ik}:

$$\sum_{i=1}^{4} c_{ik}=a_k, \quad \sum_{i=1}^{4} c_{ik}q_{ik}=b_k, \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{c_{ik}}{q_i+\alpha_j}=0, \quad (j=2,2); \qquad \chi_1'=\frac{\chi_1}{\lambda+2\mu}, \quad \chi_2'=\frac{2\chi_2}{\lambda+2\mu}$$

Пусть $\chi_1+\chi_2\leqslant 1$, тогда уравнение (4.7) не будет иметь положительных корней. Когда уравнение (4.7) имеет комплексные корни, то вещественная часть последних отрицательна. Появление четырех отрицательных корней возможно лишь для конечного числа значений p_k^2.

Затухание колебаний будет тем сильнее, чем выше порядок k. Для некоторых значений k процесс будет апериодический.

3. Более точные результаты можно получить, если функции $F(t-\tau)$ и $\Phi(t-\tau)$ взять в виде

$$F(t-\tau)=\sum_{i=1}^{v}\alpha_i'\chi_i'e^{-\alpha_i'(t-\tau)}, \qquad \Phi(t-\tau)=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i''\chi_i''e^{-\alpha_i''(t-\tau)}$$

Тогда $Q(t-\tau)$ может быть представлено в виде

$$Q(t-\tau)=\frac{1}{\lambda+2\mu}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}, \qquad n=v+q$$

В этом случае решение уравнения (4.5) находится таким же способом, как и выше.

Характеристические числа p_k в рассматриваемом случае для задачи со свободными от напряжений границами определяются из уравнения

$$\frac{\varepsilon ah+(a^2h^2-\varepsilon)\operatorname{tg} ah}{a^2h^2-\varepsilon-\varepsilon ah\operatorname{tg} ah}=\frac{\varepsilon bh+(b^2h^2-\varepsilon)\operatorname{tg} bh}{b^2h^2-\varepsilon-\varepsilon bh\operatorname{tg} bh} \tag{4.8}$$

$$h=\frac{p_k^2\rho}{\lambda+2\mu}, \qquad \varepsilon=\frac{4n\mu-2B+B'}{n(\lambda+2\mu)-B}, \qquad B=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\chi_i}{\alpha_i-r_{km}}, \qquad B'=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i'\chi_i'}{\alpha_i'-r_{km}}$$

Уравнение (4.8) не имеет мнимых корней при $\sum\chi_i<1$.

§ 5. Колебания плиты при наличии последействия. 1. Рассмотрим колебания тонкой однородной, изотропной плиты при наличии последействия.

Расположим оси координат x и y в средней плоскости, ось z направим перпендикулярно к этой плоскости.

Допустим, что напряжением τ_{33} можно пренебречь по сравнению с τ_{11}, τ_{22} и τ_{12} и что прямые, до деформации нормальные к средней плоскости, после деформации переходят в прямые, нормальные к изогнутой средней поверхности, в которую переходит средняя плоскость. Толщина плиты h.

Тогда, полагая $\tau_{33}=0$, определим ε_{33} из третьего уравнения (1.1); подставляя найденное значение ε_{33} в первые два уравнения (1.1), получим уравнения, связывающие напряжения и деформации в рассматриваемом случае:

$$\tau_{11}=A_1\varepsilon_{11}+A_2\varepsilon_{22}+\int_0^t[f_1(t-\tau)\varepsilon_{11}(\tau)+f_2(t-\tau)\varepsilon_{22}(\tau)]\,d\tau$$

$$\tau_{22}=A_1\varepsilon_{22}+A_2\varepsilon_{11}+\int_0^t[f_1(t-\tau)\varepsilon_{22}(\tau)+f_2(t-\tau)\varepsilon_{11}(\tau)]\,d\tau \tag{5.1}$$

$$\tau_{12}=A_3\varepsilon_{12}+\int_0^t f_3(t-\varepsilon)\tau_{12}(\tau)\,d\tau$$

Здесь

$$A_1=\frac{E}{1-\sigma^2}, \qquad A_2=\frac{E\sigma}{1-\sigma^2}, \qquad A_3=\frac{E}{2(1+\sigma)}$$

Функции f_1, f_2 и f_3 в выражениях (5.1) определяются формулами

$$f_1(t-\tau)=P(t-\tau)-2\Phi(t-\tau)-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}F(t-\tau)-\int\limits_{\tau}^{t}F(t-s)P(s-\tau)\,ds$$

$$f_2(t-\tau)=P(t-\tau)-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}F(t-\tau)-\int\limits_{\tau}^{t}F(t-s)P(s-\tau)\,ds \tag{5.2}$$

$$f_3(t-\tau)=-\Phi(t-\tau),\qquad P(t-\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}Q(t-v)F(v-\tau)\,dv-\lambda Q(t-\tau)$$

где $Q(\tau-s)$ — резольвента ядра $\dfrac{F(\tau-s)+2\Phi(\tau-s)}{\lambda+2\mu}$. Учитывая, что [3]

$$\varepsilon_{11}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad \varepsilon_{22}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\qquad \varepsilon_{12}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

где w — прогиб средней плоскости, получим из уравнений равновесия

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial z}=z\left\{\frac{E}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t\left\{f_1(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[f_2(t-\tau)+2f_3(t-\tau)]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}d\tau\right\}=zL_1(w)$$

$$\frac{\partial\tau_{23}}{\partial z}=z\left\{\frac{E}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t\left\{[f_2(t-\tau)+2f_3(t-\tau)]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f_1(t-\tau)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}d\tau\right\}=zL_2(w)$$

Откуда, принимая во внимание, что по поверхностям $z=\pm h/2$, ограничивающим плиту, $\tau_{13}=\tau_{23}=0$, будем иметь

$$\tau_{13}=-\frac{h^2-4z^2}{8}L_1(w),\quad \tau_{23}=-\frac{h^2+4z^2}{8}L_2(w)$$

Вырежем элемент плиты плоскостями x, $x+dx$ и $y+dy$. Силы, приложенные в плоскости, перпендикулярной yz, на расстоянии x от начала координат и в сечении плоскостью $x+dx$ будут соответственно равны

$$V_{13}\,dx\,dy,\qquad \left(V_{13}+\frac{\partial V_{13}}{\partial x}dx\right)dy,\qquad V_{13}=\int\limits_{-h/2}^{-h/2}\tau_{13}\,dz=-\frac{h^2}{12}L_1(w)$$

Обозначая через P внешние силы на единицу площади, приложенные к элементу и направленные параллельно оси z, проектируя все приложенные к нему силы на ось z и включая в состав внешних сил еще и силу инерции, получим уравнение колебания плиты

$$\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial}{\partial x}L_1(w)+\frac{\partial}{\partial y}L_2(w)\right]=p(x,y,t)-k^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad k^2=\frac{\gamma h}{g} \tag{5.3}$$

2. Имея в виду свободные колебания, перепишем уравнение (5.3) в виде

$$D\triangle\triangle w(t)+k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\int\limits_0^t f_1(t,\tau)\triangle\triangle w(\tau)\,d\tau=0 \tag{5.4}$$

Рассмотрим случай прямоугольной плиты с просто опертыми краями. Условия на контуре будут

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{5.5}$$

Начальные условия возьмем следующие:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Будем искать решение уравнения (5.4) в виде двойного ряда

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.7}$$

так что условия на контуре (5.5) удовлетворяются сами собой.

Подставляя (5.7) в уравнение (5.4), получим интегро-дифференциальное уравнение для определения временно́го множителя $T_{mn}(t)$

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn}^2 T_{mn}(t) + \int_0^t \varphi_{mn}(t-\tau) T_{mn}(\tau)\, d\tau = 0 \tag{5.8}$$

где

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{D\pi^4}{k^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \qquad \varphi_{mn}(t-\tau) = \frac{\pi^4}{k^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 f_1(t, \tau)$$

Решение уравнения (5.8), удовлетворяющее начальным условиям $T_{mn}(0) = p_{mn}$, $T_{mn}'(0) = q_{mn}$, может быть получено способом, указанным в § 2.

Применяя результаты § 3, можно без дополнительных математических трудностей решить подобную задачу для случая вынужденных колебаний.

Поступила в редакцию
13 VI 1946

M. J. ROSOVSKY.—APPLICATION OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS TO DYNAMIC PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY IN CASE OF AFTER-EFFECT

The paper deals with integro-differential equations for transverse oscillations of a bar in the presence of after-effect.

The solution of these equations is sought in the form $\sum X_n T_n$. This leads to an integro-differential equation for function $T_n(t)$ which, in certain cases, may be reduced to the integral equation.

A general procedure for the solution of problems is outlined, the procedure being independent of the order of the derivatives entering into the equations.

As illustrations the author takes radial oscillations of a hollow ball and oscillations of a free-supported plate in the presence of after-effect.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Volterra. Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles. Paris. 1913.
2. Уиттекер и Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдения ОНТИ. 1933, стр. 343.
3. Галеркин Б. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. 1933.