

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

А. А. Дороницын

(Москва)

1. **Постановка задачи.** В настоящей статье рассматривается решение уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \nu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.1)$$

при больших значениях параметра ν .

В фазовой плоскости xp уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$pp' - \nu(1-x^2)p + x = 0 \quad \left(p = \frac{dx}{dt}\right) \quad (1.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование по x .

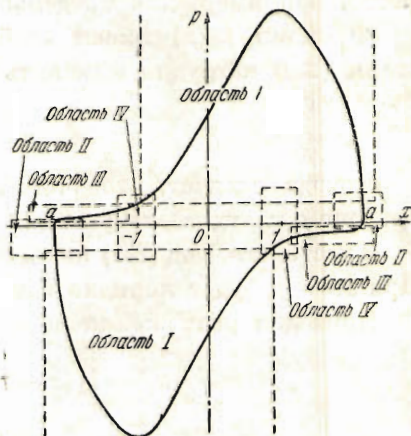
Решение этого уравнения имеет характер, схематически представленный на фиг. 1 (для предельного цикла).

Известно, что в области I и в области III решение уравнения (1.2) стремится соответственно к решениям «укороченных» уравнений

$$pp' - \nu(1-x^2)p = 0 \quad (1.3)$$

$$-\nu(1-x^2)p + x = 0 \quad (1.4)$$

Однако области, в которых пригодны эти два предельные решения, не соприкасаются между собой, и поэтому эти решения нельзя сопредить. Неизвестно, как выбрать постоянную интегрирования в уравнении (1.3), чтобы при аналитическом продолжении решения в область III это решение перешло в то, которое стремится к решению второго уравнения (1.3).



Фиг. 1.

В настоящей работе мы вводим две «связующих» области II и IV, для которых устанавливаются особые асимптотические решения уравнения (1.2), отличные от решений «укороченных» уравнений (1.3) и (1.3). Области I, II, III, IV перекрываются между собой, и, таким образом, получается возможность найти полное решение для всего цикла с точностью до величины любого порядка малости относительно ν .

2. Решение для области I. Обозначая через a_1 и a_2 значения x , при которых $p=0$ (для предельного цикла $a_1=a_2=a$, где a —амплитуда установившихся автоколебаний), определим две части области I так

$$-1+\varepsilon < x < a_1-\varepsilon, \quad p > 0, \quad \varepsilon > 0; \quad -a_2+\varepsilon < x < 1-\varepsilon, \quad p < 0, \quad \varepsilon > 0$$

Очевидно, достаточно рассмотреть решение в одной из частей области I, например в первой. Решение ищем в виде

$$p = \nu \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \nu^{-2n} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ν , получим рекуррентную систему уравнений:

$$f_0' = 1 - x^2, \quad f_0 f_1' = -x, \quad -f_0 f_2' = f_1 f_1', \dots, \quad f_0 f_{n+1}' = -\sum_{k=1}^n f_k f_{n+1-k}' \quad (2.2)$$

решение которой элементарно. Так, для первых двух функций имеем

$$f_0(x) = c + x - \frac{1}{3} x^3 \quad (2.3)$$

$$f_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2-1} \left[\log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) - \frac{1}{2} \log \frac{(2x+x_1)^2 + 3(x_1^2-4)}{4(x_1^2-3)} \right] + \\ + \frac{x_1^2-2}{x_1^2-1} \sqrt{\frac{3}{x_1^2-4}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+x_1}{\sqrt{3(x_1^2-4)}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_1}{\sqrt{3(x_1^2-4)}} \right] \quad (2.4)$$

Здесь в (2.4) через x_1 обозначен вещественный (положительный) корень уравнения $f_0(x) = c + x - x^3/3 = 0$ и предполагается, что $c > 2/3$ (что имеет место, например, для предельного цикла).

Функции $f_n(x)$ имеют особенность в окрестности точки $x=x_1$. Из системы (2.2) нетрудно выяснить характер этих особенностей, именно:

$$f_n(x) \sim \frac{[\log(x-x_1)]^{n-1}}{(x-x_1)^{n-1}} \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что ряд (2.1) сохраняет асимптотический характер до значений x , удовлетворяющих условию $O(x_1-x) > O(\log \nu / \nu^2)$.

В частности, ряд (2.1) является асимптотическим рядом при $x=x_1 - O(1/\nu)$. При этом p будет порядка единицы. Этим мы воспользуемся в дальнейшем.

Приведем разложения первых трех функций $f_n(x)$ в окрестности x_1 :

$$f_0(x) = -(x_1^2-1)(x-x_1) - x_1(x-x_1)^2 - \frac{1}{3}(x-x_1)^3 \\ f_1(x) = \frac{x_1}{x_1^2-1} \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) + g - \frac{1}{(x_1^2-1)^2} (x-x_1) - \\ - \frac{x_1(x_1^2-4)}{6(x_1^2-1)^3} (x-x_1)^2 + \frac{x_1^4-3x_1^2-1}{9(x_1^2-1)^4} (x-x_1)^3 \dots \quad (2.6) \\ f_2(x) = -\frac{x_1^2}{(x_1^2-1)^2} \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \left[\frac{1}{x-x_1} + \frac{1+g(1+x_1^2)}{x_1^2(x_1^2-1)} + \dots \right] - \\ - \frac{(1+g)x_1^2}{(x_1^2-1)^3} \frac{1}{x-x_1} - \frac{x_1(x_1^2+1)}{2(x_1^2-1)^4} \log^2 \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) + \dots$$

где

$$g = \frac{x_1}{x_1^2-1} \left[\frac{\sqrt{3}(x_1^2-2)}{x_1 \sqrt{x_1^2-4}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x_1 \sqrt{x_1^2-4}}{\sqrt{3}(x_1^2-2)} - \frac{1}{2} \log \frac{3(x_1^2-1)}{x_1^2-3} \right] \quad (2.7)$$

Мы не будем здесь приводить доказательство сходимости ряда (2.1). Это доказательство получается из рассмотрения решения (1.2) методом последовательных приближений:

$$p_0' = \nu(1-x^2), \dots, p_{n+1}' = \nu(1-x^2) - \frac{x}{p_n}$$

которые сходятся в области I. После чего, оценивая разность $p_{n+1} - p_n$, убеждаемся, что она имеет порядок $\nu^{-(2n+1)}$, отсюда и следует сходимость разложения (2.1) (по крайней мере асимптотическая).

3. Решение для области II. Область II есть окрестность точек $p=0$, $x=a_1$, $x=-a_2$. Рассмотрим для определенности часть области II, соответствующую окрестности точки $p=0$, $x=a_1$. Введем переменную $q = -\nu p$ и будем искать x как функцию q . Уравнение (1.2) запишется в виде

$$\frac{dx}{dq} = \frac{1}{\nu^2} \frac{q}{q(x^2-1)-x} \quad (3.1)$$

Представим решение этого уравнения в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) \nu^{-2n} \quad (3.2)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (3.1) дает рекуррентную систему уравнений для определения функций $\chi_n(q)$. Получим

$$\chi_0' \equiv 0, \quad \chi_0 \equiv a_1$$

$$[q(a_1^2-1) - a_1] \chi_1' = q, \quad [q(a_1^2-1) - a_1] \chi_2' = (1-2a_1q) \chi_1 \chi_1' \quad (3.3)$$

$$[q(a_1^2-1) - a_1] \chi_{n+1}' = \sum_{k=1}^n \chi_k' \chi_{n+1-k} - q \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=n}} \chi_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma \quad \left(\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=n+1, 1 \leq \alpha \leq n \\ 0 \leq \beta \leq n, 0 \leq \gamma \leq n \end{array} \right)$$

Решение этой системы элементарно. Для первых двух функций $\chi_n(q)$ имеем

$$\chi_1(q) = \frac{1}{a_1^2-1} \left[q + \frac{a_1}{a_1^2-1} \log \left(1 - \frac{a_1^2-1}{a_1} q \right) \right]$$

$$\chi_2(q) = \frac{a_1}{(a_1^2-1)^2} \left\{ (a_1^2-1) q \left(q + \frac{a_1^2+1}{a_1(a_1^2-1)} \right) + \left[\frac{a_1^2+1}{a_1^2-1} + 2a_1q - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2(a_1^2-1)q^2 \right] \frac{\log [1 - q(a_1^2-1)/a_1]}{1 - q(a_1^2-1)/a_1} + \frac{2a_1^2+1}{2(a_1^2-1)} \log^2 \left(1 - \frac{a_1^2-1}{a_1} q \right) \right\}$$

Функции $\chi_n(q)$ имеют особенности при $q \rightarrow a_1/(a_1^2-1)$ и при $q \rightarrow -\infty$. Выясним характер этих особенностей. Из формул (3.4) видно, что при $q_1 \rightarrow a_1/(a_1^2-1)$ функция χ_1 имеет особенность вида $\log(1-u)$ и χ_1 — особенность вида $(1-u)^{-1} \log(1-u)$, где $u = q(a_1^2-1)/a_1$. Тогда из системы (3.3) легко получаем, что вообще

$$\chi_n \sim \left[\frac{\log(1-u)}{1-u} \right]^{n-1} \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что ряд (3.2) сохраняет асимптотический характер до значений q , удовлетворяющих условию

$$O\left(\frac{a_1}{a_1^2-1} - q\right) > O\left(\frac{\log \nu}{\nu^2}\right)$$

Аналогично для больших отрицательных значений q получаем $\gamma_1 \sim q$, $\gamma_2 \sim q^2$ и вообще $\gamma_n \sim q^n$. Таким образом, для отрицательных значений q ряд (3.2) сохраняет асимптотический характер до значений q , ограниченных неравенством $O(q) < O(v^2)$. В частности, асимптотическая сходимость имеет место при $q = -v$ ($p = 1$).

Доказательство сходимости ряда (3.1) мы также не будем здесь приводить. Это доказательство нетрудно получить из решения уравнения (3.1) методом последовательных приближений, полагая

$$x_0 \equiv a_1, \quad \frac{dx_{n+1}}{dq} = \frac{1}{v^2} \frac{q}{q(x_n^2 - 1) - x_n}$$

Для сопряжения решений, полученных для областей I и II, нужно определить постоянную a_1 по заданному значению постоянной c в (2.3), или, что то же, по заданному значению x_1 . Так как ряд (2.1) сходится асимптотически до тех значений x , при которых $p = O(1)$, и при этих же значениях сходится ряд (2.3), то мы получаем возможность сопредить решения (2.1) и (3.2). Полагая в (2.1) и (3.2) $p = 1$ ($q = -v$), получаем два уравнения с двумя неизвестными x^* и a_1 :

$$1 = v \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^*) v^{-2n}, \quad x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(-v) v^{-2n} \quad (3.5)$$

Решение сводится к тому, что из первого уравнения (3.5) находим x^* и затем из второго уравнения (3.5) по найденному x^* находим a_1 , входящее в выражения для функций $\gamma_n(q)$.

Подставляя для функций $f_n(x^*)$ их выражения (2.6), мы будем находить x^* методом итераций. Желая получить x^* с определенной точностью, мы останавливаем процесс итераций тогда, когда последующие итерации не будут изменять величин заданного порядка малости относительно v . Так, например, выписанных в (2.6) функций достаточно для вычисления x^* с точностью до величины порядка $\log^2 v / v^4$. С точностью до величины порядка $1/v^2$, производя три итерации, получим

$$x^* = x_1 - \frac{1}{v} \frac{1}{x_1^2 - 1} - \frac{\log v}{v^2} \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} - \frac{1}{v^2} \left[\frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \log x_1 (x_1^2 - 1) - \frac{g}{x_1^2 - 1} + \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^3} \right] - \frac{\log v}{v^3} \frac{2x_1}{(x_1^2 - 1)^4} + O\left(\frac{1}{v^3}\right) \quad (3.6)$$

Поступая совершенно тем же путем со вторым уравнением (3.5), получим для a_1 выражение

$$a_1 = x_1 - \frac{\log v}{v^2} \frac{2x_1}{(x_1^2 - 1)^2} - \frac{1}{v^2} \left[\frac{2x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \log(x_1^2 - 1) - \frac{g}{x_1^2 - 1} \right] + O\left(\frac{1}{v^3}\right) \quad (3.7)$$

4. Решение для области III. Область III определяется интервалом изменения переменных

$$a_1 - \varepsilon > x > 1 + \varepsilon, \quad p < 0, \quad \varepsilon > 0; \quad -a_2 + \varepsilon < x < -1 - \varepsilon, \quad p > 0, \quad \varepsilon > 0$$

Область III имеет то существенное значение для релаксационных колебаний, что когда колебательная система попадает в эту область, сразу же с большой степенью точности она переходит к установившимся автоколебаниям. Мы подробно остановимся на получении решения в этой области.

Сначала найдем частное решение, удовлетворяющее условию $p \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Обозначим это решение через $P(x)$. Это как раз то решение, для которого решение второго укороченного уравнения Ван-дер-Поля (1.3) является главным членом разложения. Положим поэтому

$$P(x) = -\frac{x}{\nu(x^2-1)} + \pi(x) \quad (4.1)$$

(мы рассматриваем ту часть области III, для которой $p < 0$). Тогда для функции $\pi(x)$ получим уравнение

$$\pi'(x) - \left[\nu^2 \frac{(x^2-1)^2}{x} + \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} \right] \pi(x) = -\frac{x^2+1}{\nu(x^2-1)^2} + \frac{\nu(x^2-1)}{x} \pi \pi' \quad (4.2)$$

Рассматривая правую часть уравнения (4.2) как свободный член, приведем уравнение (4.2) к интегральному:

$$\pi(x) = \frac{1}{\nu^3} F(x) + \nu \frac{x^2-1}{x} e^{\nu^2 k(x)} \int_{\infty}^x e^{-\nu^2 k(\xi)} \pi \pi' d\xi \quad (4.3)$$

где

$$F(x) = \nu^2 \frac{x^2-1}{x} e^{\nu^2 k(x)} \int_x^{\infty} e^{-\nu^2 k(\xi)} \frac{\xi(\xi^2+1)}{(\xi^2-1)^3} d\xi, \quad k(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^2 + \log x + \frac{3}{4} \quad (4.4)$$

причем $k(1) = 0$, $k(x) > 0$ при $x > 1$ и $k'(x) = (x^2-1)^2/x > 0$

Далее легко видеть, что $F(x) = O(1)$. Действительно, интегрируя (4.4) один раз по частям, для чего подинтегральную функцию умножим и разделим на $k'(\xi)$, получим

$$F(x) = \frac{(x^2+1)x}{(x^2-1)^4} - \frac{x^2-1}{x} e^{\nu^2 k(x)} \int_x^{\infty} e^{-\nu^2 k(\xi)} \frac{6\xi^3 + 12\xi^2 + 2\xi}{(\xi^2-1)^6} d\xi = O(1)$$

и, кроме того, так как $F(x) > 0$ и интегральный член в последнем выражении положителен, то

$$F(x) \leq \frac{(x^2+1)x}{(x^2-1)^4} \quad (4.5)$$

Произведя далее интегрирование по частям в уравнении (4.3), приведем его к нелинейному интегральному уравнению

$$\pi(x) = \frac{1}{\nu^3} F(x) + \frac{\nu}{2} \frac{x^2-1}{x} \pi^2(x) + \frac{\nu^3}{2} \frac{x^2-1}{x} e^{\nu^2 k(x)} \int_{\infty}^x e^{-\nu^2 k(\xi)} (\xi^2-1)^2 \pi^2(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \quad (4.6)$$

Наконец, заменяя искомую функцию по формуле

$$\pi(x) = \frac{2x}{x^2-1} \omega(x) \quad (4.7)$$

будем иметь для $\omega(x)$ интегральное уравнение

$$\omega(x) = \frac{1}{\nu^3} j(x) + \nu \omega^2(x) + \nu^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^2} e^{\nu^2 k(x)} \int_{\infty}^x e^{-\nu^2 k(\xi)} \xi \omega^2(\xi) d\xi \quad (4.8)$$

где

$$j(x) = \frac{x^2-1}{2x} F(x) \quad (4.9)$$

Это уравнение решаем методом последовательных приближений, полагая

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \frac{1}{\nu^3} f(x) \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_{n+1}(x) &= \frac{1}{\nu^3} f(x) + \nu \omega_n^2(x) + \nu^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^2} e^{\nu^2 k(x)} \int_{\infty}^x e^{-\nu^2 k(\xi)} \xi \omega_n^2(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обозначая $\max |f(x)|$ через M и $\max |\omega_n|$ через Ω_n в интервале $1 + \varepsilon < x \leq \infty$, будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{M}{\nu^3} \\ &\dots \dots \dots \\ \Omega_{n+1} &\leq \frac{M}{\nu^3} + \nu \Omega_n^2 + \nu^3 \Omega_n^2 \max \left| e^{\nu^2 k(x)} \frac{(x^2-1)^2}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\nu^2 k(\xi)} \xi d\xi \right| \end{aligned}$$

Так как $\xi^2 / (\xi^2 - 1)^2$ монотонно убывающая функция, то

$$e^{\nu^2 k(x)} \frac{(x^2-1)^2}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\nu^2 k(\xi)} \xi d\xi = e^{\nu^2 k(x)} \frac{(x^2-1)^2}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\nu^2 k(\xi)} k'(\xi) \frac{\xi^2}{(\xi^2-1)^2} d\xi < \frac{1}{\nu^2}$$

Следовательно,

$$\Omega_1 = \frac{M}{\nu^3}, \dots, \quad \Omega_{n+1} \leq \frac{M}{\nu^3} + 2\nu \Omega_n^2 \quad (4.11)$$

Рассмотрим ряд соотношений

$$Y_1 = \frac{M}{\nu^3}, \dots, \quad Y_{n+1} = \frac{M}{\nu^3} + 2\nu Y_n^2$$

Этот ряд образуется при решении методом итераций уравнения $Y = M/\nu^3 + 2\nu Y^2$ и сходится, если это уравнение имеет вещественные корни, к меньшему корню. Из условия вещественности корней получаем, что процесс итераций сходится, пока $8M/\nu^2 < 1$.

Так как

$$f(x) < \frac{(x^2+1)x}{2x(x^2-1)^3} < \frac{1}{8(x-1)^3}$$

условие $8M/\nu^2 < 1$ можно представить в виде $x-1 > \nu^{-2/3}$.

При выполнении условия $8M/\nu^2 < 1$ будем иметь

$$Y_n < Y = \frac{1}{4\nu} - \sqrt{\frac{1}{16\nu^2} - \frac{M}{2\nu^4}} < \frac{2M}{\nu^3}$$

и, следовательно, подалвно $\Omega_n < 2M/\nu^3$. Из ограниченности Ω_n тотчас вытекает сходимость метода последовательных приближений. Действительно, из (4.13) будем иметь

$$\max |\omega_{n+1} - \omega_n| < 4\nu Y \max |\omega_n - \omega_{n-1}|$$

и, следовательно, ряд

$$\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1) + (\omega_3 - \omega_2) + \dots$$

сходится, если $4\nu Y < 1$, т. е. также при $8M/\nu^2 < 1$, и таким образом, последовательные приближения сходятся равномерно к решению уравнения 4.8) при выполнении условия $x-1 > \nu^{-2/3}$.

Наконец, замечая, что $\omega_{n+1} - \omega_n = O(\nu^{-(2n+3)})$ и что $f(x)$ и каждое $\omega_n(x)$ разлагаются в асимптотические ряды по ν , заключаем, что функции $\omega(x)$, а значит и $\pi(x)$ разлагаются в асимптотические ряды по степеням $1/\nu$.

Это асимптотическое разложение проще всего получить непосредственно из дифференциального уравнения (1.2), полагая

$$P(x) \approx -\frac{1}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \nu^{-2n} \tag{4.12}$$

что дает

$$P_0(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad P_1(x) = \frac{P_0 P_0'}{x^2-1} = -\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \tag{4.13}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{x^2-1} \sum_{k=0}^n P_k'(x) P_{n-k}(x)$$

Легко убеждаемся, что функции $P_n(x)$ при $x \rightarrow 1$ имеют особенность вида $1/(x-1)^{2n+1}$ и, следовательно, ряд (4.12) сохраняет асимптотический характер при условии $O(x-1) > O(\nu^{-2/3})$. Отметим, что при подходе к границе сходимости $P(x)$ будет иметь порядок $\nu^{-1/3}$.

Перейдем к отысканию решения по заданным начальным условиям.

В предыдущем п^о мы имели возможность получить решение до значений p , не доходящих до линии $p = -x/[v(x^2-1)]$ на величину порядка $\log v/v^3$. В частности, мы могли получить решение при

$$p = p_0 = -\frac{1}{\nu} \frac{a_1}{a_1^2-1} + \frac{1}{\nu^2}$$

при этом x будет отличаться от a_1 на величину порядка $\log v/v$.

Таким образом, мы должны построить в области III решение, удовлетворяющее условию при $x = x_0, p = p_0$, причем

$$p_0 + \frac{x_0}{\nu(x_0^2-1)} = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) > 0$$

Будем искать решение в виде

$$p(x) = P(x) + \sigma(x) \tag{4.14}$$

тогда для $\sigma(x)$ получим уравнение

$$P(x) \sigma'(x) + [P(x) + \nu(x^2-1)] \sigma(x) = -\sigma(x) \sigma'(x) \tag{4.15}$$

которое аналогично тому, как это было сделано для $\pi(x)$, приводим к интегральному

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \frac{c}{\nu^2} \frac{n(x_0)}{n(x)} e^{-\nu^2 m(x)} + \frac{\nu}{2n(x)} [\sigma^2(x) - \sigma_0^2 e^{-\nu^2 m(x)}] + \\ & + \frac{\nu^3}{2n(x)} e^{-\nu^2 m(x)} \int_{x_0}^x e^{\nu^2 m(\xi)} \frac{\xi^2-1}{n(\xi)} \sigma^2(\xi) d\xi \end{aligned} \tag{4.16}$$

где обозначено

$$m(x) = \int_{x_0}^x \frac{x^2-1}{\nu P(x)} dx, \quad n(x) = -\nu P(x), \quad \sigma_0 = \sigma(x_0) = \frac{c}{\nu^2} \tag{4.17}$$

Из разложения (4.12) следует

$$m(x) = O(1) > 0, \quad n(x) = O(1) > 0 \tag{4.18}$$

Точно так же из начальных условий для p можно считать $c = O(1)$ (или даже меньше). Положим теперь

$$\sigma(x) = 2n(x) e^{-\nu^2 m(x)} s(x) \quad (4.19)$$

для $s(x)$ получим уравнение

$$s(x) = \frac{1}{\nu^2} \varphi(x) + \nu s^2(x) e^{-\nu^2 m(x)} + \frac{\nu^3}{n^2(x)} \int_{x_0}^x e^{-\nu^2 m(\xi)} n(\xi) (\xi^2 - 1) s^2(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{n(x_0)c - c^2/\nu}{2n^2(x)}$$

Решение этого уравнения будем снова получать методом последовательных приближений, полагая

$$s_1(x) = \frac{1}{\nu^2} \varphi(x)$$

$$s_{n+1}(x) = \frac{1}{\nu^2} \varphi(x) + \nu e^{-\nu^2 m(x)} s_n^2(x) + \frac{\nu^3}{n^2(x)} \int_{x_0}^x e^{-\nu^2 m(\xi)} n(\xi) (\xi^2 - 1) s_n^2(\xi) d\xi \quad (4.21)$$

Обозначив через \sum_n максимум модуля $s_n(x)$ в интервале $(1 + \varepsilon, x_0)$, через M — максимум модуля $\varphi(x)$ и учитывая, что $n(x)$ убывающая функция от x , получим оценку

$$\sum_1 = \frac{M}{\nu^2}, \quad \sum_{n+1} < \frac{M}{\nu^2} + 2\nu \sum_n^2$$

Откуда методом, совершенно аналогичным предыдущему, докажем сходимость последовательных приближений при условии $8M/\nu < 1$. При этом имеем $|s(x)| < 2M/\nu^2$.

Сбрасываясь к выражению для $\varphi(x)$, можно последнее неравенство записать в виде

$$|s(x)| < \frac{c}{\nu^2 n(x)}, \quad \text{или} \quad |\sigma(x)| < \frac{2c}{\nu^2} e^{-\nu^2 m(x)} \quad (4.22)$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом. С какими бы начальными значениями ни начала свое движение колебательная система, при поведении в область III ее движение приблизится к предельному циклу с точностью до величин порядка $\nu^{-2} \exp(-\nu^2 m)$, где $m > 0$ порядка единицы.

Так как основное решение $P(x)$ может быть получено с точностью до величин порядка $1/\nu^n$, где n — любое число, то порядок малости поправки $\sigma(x)$ к этому решению меньше любого остаточного члена в ряде для $P(x)$ и поэтому не имеет смысла стыковать асимптотическое выражение для $\sigma(x)$.

5. Решение в области IV. Эта область определяется следующим образом: $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$, $p < 0$, $\varepsilon > 0$; $-1 - \varepsilon < x < -1 + \varepsilon$, $p > 0$, $\varepsilon > 0$

Мы уже видели, что при подходе к границе области III, которая определяется условием $(x-1) > O(\nu^{-2/3})$ порядок $p(x)$ приближается к $O(\nu^{-1/3})$.

Введем поэтому следующую замену переменных:

$$p = -\nu^{-1/3} Q(u), \quad u = \nu^{2/3}(x-1) \quad (5.1)$$

(мы рассматриваем первую часть области IV). В новых переменных уравнение (1.2) примет вид

$$Q \frac{dQ}{du} - 2uQ + 1 = \nu^{-2/3} (u^2 Q - u) \quad (5.2)$$

Решение будем искать в виде ряда

$$Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) \nu^{-2/3 n} \quad (5.3)$$

Подстановка (5.3) в уравнение (5.2) дает для функций $Q_n(u)$ рекуррентную систему:

$$\begin{aligned} Q_0 \frac{dQ_0}{du} - 2uQ_0 + 1 &= 0 & (a) \\ Q_0 \frac{dQ_1}{du} - \frac{Q_1}{Q_0} &= u^2 Q_0 - u & (b) \\ Q_0 \frac{dQ_2}{du} - \frac{Q_2}{Q_0} &= u^2 Q_1 - Q_1 \frac{dQ_1}{du} & (c) \\ \dots & \dots \\ Q_0 \frac{dQ_{n+1}}{du} - \frac{Q_{n+1}}{Q_0} &= u^2 Q_n - \sum_{k=1}^n Q_k \frac{dQ_{n+1-k}}{du} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Что касается начальных условий для $Q_n(u)$, то они определяются в дальнейшем из условия сопряжения решения с решением в области III.

Находим решение уравнения (5.4, а). Полагая $Q_0 = du/d\tau$, после подстановки и интегрирования последовательно получим

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - 2u \frac{du}{d\tau} + 1 = 0, \quad \frac{du}{d\tau} - u^2 + \tau = 0$$

(постоянную интегрирования принимаем равной нулю ввиду произвольности в выборе переменной τ). Уравнение (5.5) есть уравнение Рикати. Оно приводится к уравнению

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - \tau v = 0 \quad \left(u = -\frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} \right)$$

общее решение которого

$$v = \sqrt{\tau} [c_1 K_{1/3} (2/3 \tau^{3/2}) + c_2 I_{1/3} (2/3 \tau^{3/2})] \quad (5.7)$$

Для сопряжения с решением $P(x)$ мы должны потребовать, чтобы $Q_0 = du/d\tau \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, т. е. из (5.5) получаем, что $u \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Этому условию удовлетворяет лишь решение

$$v = c_1 \sqrt{\tau} K_{1/3} (2/3 \tau^{3/2}) \quad (5.8)$$

Воспользовавшись известными соотношениями для функций Бесселя:

$$K_n'(x) = K_{n-1}(x) + K_n(x) n/x, \quad K_{-n}(x) = K_n(x)$$

получим для u решение

$$u = \sqrt{\tau} K^{2/3} (2/3 \tau^{3/2}) / K_{1/3} (2/3 \tau^{3/2}) \quad (5.9)$$

Для отрицательных значений τ формулу (5.9) удобнее представить в виде ($\tau_1 = -\tau$)

$$u = \sqrt{\tau_1} \{J_{-2/3}(2/3 \tau_1^{3/2}) - J_{2/3}(2/3 \tau_1^{3/2})\} / \{J_{1/3}(2/3 \tau_1^{3/2}) + J_{-1/3}(2/3 \tau_1^{3/2})\} \quad (5.10)$$

Согласно (5.5) величина $Q_0 = u^2 - \tau$, и пользуясь асимптотическими разложениями для функций Бесселя, легко получить асимптотическое разложение для $Q(u)$. Имеем

$$u \approx \sqrt{\tau} (1 + \tau^{-3/2} - \dots), \quad Q_0 = u^2 - \tau \approx \frac{1}{2\sqrt{\tau}} + \dots \approx \frac{1}{2u} + \dots \quad (5.11)$$

Более полное асимптотическое разложение проще получить непосредственно из (5.4а). Имеем

$$Q_0(u) \approx \frac{1}{2u} - \frac{1}{8u^4} + \frac{5}{32u^7} - \frac{11}{32u^{10}} + \frac{5^2 9}{512u^{13}} - \dots \quad (5.12)$$

При отрицательных значениях τ знаменатель в выражении (5.10) будет обращаться в нуль. Обозначим через α наименьший корень уравнения

$$J_{1/3}(2/3 \tau_1^{3/2}) + J_{-1/3}(2/3 \tau_1^{3/2}) = 0$$

Тогда $u \rightarrow -\infty$ при $\tau_1 \rightarrow \alpha$ ($\tau_1 < \alpha$). Далее согласно (5.6) $u = -v^{-1} dv/d\tau$, или $u = v^{-1} dv/d\tau_1$, поэтому u имеет при $\tau_1 = \alpha$ простой полюс с вычетом, равным единице, и следовательно,

$$u = \frac{1}{\tau_1 - \alpha} + \text{голоморфная функция}$$

Отсюда $\tau_1 = \alpha + \frac{1}{u} + \dots$ и, следовательно, при $u \rightarrow -\infty$ имеем

$$Q_0 = u^2 + \alpha + \frac{1}{u} + \dots$$

Более подробное вычисление дает

$$Q_0(u) = u^2 + \alpha + \frac{1}{u} - \frac{2}{3} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{2^2}{5u^5} + \frac{7^2}{18u^6} - \frac{1}{7} \left(\alpha^2 - \frac{5}{4} \right) \frac{1}{u^7} + \dots \quad (5.13)$$

Переходим к определению $Q_1(u)$. Общее решение (5.4b) будет

$$Q_1(u) = \frac{1}{A(u)} \left[c + \int_0^u A(u) \left(u^2 - \frac{u}{Q_0} \right) du \right], \quad A(u) = \exp \left(- \int_0^u \frac{du}{Q_0} \right) \quad (5.14)$$

Для сопряжения с решением $P(x)$ мы должны потребовать, чтобы величина $v^{-2/3} Q_1(u)$ была ограниченной при $u = O(v^2)$.

Воспользовавшись асимптотическим разложением (5.12), легко получим для постоянной интегрирования с значение

$$c = - \int_0^\infty A(u) \left[u^2 - \frac{u}{Q_0} \right] du$$

Отсюда окончательно

$$Q_1(u) = \frac{1}{A(u)} \int_u^{\infty} A(u) \left(\frac{u}{Q_0} - u^2 \right) du \quad (5.15)$$

Для $Q_1(u)$ имеем разложение:

при $u \rightarrow \infty$

$$Q_1(u) \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{64u^6} + O\left(\frac{1}{u^9}\right) \quad (5.16)$$

при $u \rightarrow -\infty$

$$Q_1(u) = \frac{1}{3}u^3 + b_0 - \frac{x}{6u^2} - \left(\frac{1}{27} + \frac{b_0}{3}\right)\frac{1}{u^3} + \left(\frac{1}{450} + \frac{2}{5}b_0\right)\frac{1}{u^5} + \dots - \frac{2}{3}\log|u| \left(1 - \frac{1}{3u^3} + \frac{2x}{5u^5} - \dots\right) \quad (5.17)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{A(-\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} A(u) \left[\frac{u}{Q_0} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{Q_0^3} - \frac{2}{3}\frac{u}{u^2 + x/2} + \frac{1}{3Q_0^2} \log\left(u^2 + \frac{x}{2}\right) \right] du \quad (5.18)$$

Решения для остальных функций будут иметь вид

$$Q_{n+1}(u) = \frac{1}{A(u)} \int_u^{\infty} A(u) \left[\sum_{k=1}^n Q_k \frac{dQ_{n+1-k}}{du} - u^2 Q_n \right] \frac{du}{Q_0} \quad (5.19)$$

причем постоянные интегрирования определяются из условия ограниченности величин $\nu^{-2/3n} Q_n(u)$ при $u = O(\nu^2)$.

Асимптотические выражения для функций $Q_n(u)$ будут:

$$\text{при } u \rightarrow +\infty \quad (5.20)$$

$$Q_2(u) \approx -\frac{u}{8} + O\left(\frac{1}{u^3}\right), \quad Q_3(u) \approx \frac{u^2}{16} + O\left(\frac{1}{4}\right), \dots, \quad Q_n(u) \approx (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{2^{n+1}}$$

при $u \rightarrow -\infty$

$$Q_2(u) = \frac{2}{9}u + b_0^{(2)} + \frac{x}{3u} + O\left(\frac{\log u}{u^2}\right), \quad Q_3(u) = -\frac{u^2}{27} - \frac{2b_0}{81}u + \dots \quad (5.21)$$

Вообще главная особенность функций $Q_n(u)$ при $u \rightarrow -\infty$, начиная с $n=2$, будет $Q_n \sim u^{n-1}$.

Эти результаты показывают, что ряд (5.3) сохраняет асимптотический характер до значений u , ограниченных условием $O|u| < O(\nu^{2/3})$, т. е. при значениях x , удовлетворяющих условию $O(x-1) < O(1)$, и таким образом, области, в которых пригодны решения (5.3) и (4.12), перекрываются. Как мы увидим, то же самое имеет место для решений (5.3) и (2.1).

6. Сопряжение решений для областей I и IV. Вернемся к первой части области I. Мы должны будем сопрягать решение (2.1) с решением (5.3), в котором под u следует понимать величину $-\nu^{2/3}(1+x)$ и положить

$$p = +\nu^{-1/3} Q(u)$$

Прежде всего отметим, что так как $p > 0$ при $x = -1$ ($u = 0$), то постоянная c в формуле (2.3) должна быть больше $2/3$ (при $c = 2/3$ будет $f_0(-1) = 0$). Положим $c = 2/3 + \gamma$. Порядок величины γ может быть сразу определен; так как $p(-1) = O(\nu^{-1/3})$, то $\nu\gamma$ тоже будет порядка $\nu^{-1/3}$ и следовательно, $\gamma = O(\nu^{-4/3})$.

Выясним теперь, до каких отрицательных значений x применимо разложение (2.1).

Рассмотрим случай, когда $c = 2/3$. Увеличение постоянной c приводит лишь к улучшению сходимости. При $c = 2/3$ имеем

$$f_0(x) = \frac{2}{3} + x - \frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3}(x+1)^2(2-x)$$

$$f_1(x) = -\int_0^x \frac{x dx}{f_0} = -\frac{1}{x+1} - \frac{2}{3} \log(x+1) + \frac{2}{3} \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Из системы уравнений (2.2) легко теперь найти, что в окрестности $x = -1$ главная особенность функций $f_n(x)$ имеет вид $f_n(x) \sim (x+1)^{-(3n-2)}$ и, следовательно, ряд (2.1) сохраняет асимптотический характер до значений x , удовлетворяющих условию $O(x+1) > O(v^{-1/3})$ [что соответствует значениям $-u > O(1)$], и таким образом, области, в которых пригодны разложения (5.3) и (2.1), перекрываются.

В частности, асимптотическая сходимость разложений (2.3) и (5.3) обеспечена при $x = -1 + v^{-1/3}$ ($u = -v^{1/3}$), и, таким образом, постоянную интегрирования c можно определить, приравнявая при $x = -1 + v^{-1/3}$ значения p , полученные из формул (5.3) и (2.1).

$$v^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} v^{-2/3 n} Q_n(-v^{-1/3}) = v \sum_{n=0}^{\infty} v^{-2n} f_n(-1 + v^{-1/3}) \quad (6.1)$$

Мы не будем приводить здесь довольно громоздких, но элементарных выкладок. Пользуясь разложениями функций $Q_n(u)$ при больших отрицательных значениях u [формулы (5.13), (5.17), (5.21)], для левой части равенства (6.1) получим выражение

$$p(-1 + v^{-1/3}) = v^{1/3} - \frac{4}{3} + \alpha v^{-1/3} - v^{-2/3} + b_0 v^{-1} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9}\right) v^{-4/3} - \dots$$

$$- \frac{2}{9} \frac{\log v}{v} \left(1 + \frac{1}{3v} - \dots\right) \quad (6.2)$$

С другой стороны, разложения функций $f_n(x)$ в окрестности $x = -1$ дают для правой части равенства (6.1) выражение

$$p(-1 + v^{-1/3}) = v^{1/3} - \frac{4}{3} - v^{-2/3} + \left(1 + \frac{2}{3} \log \frac{3}{2}\right) v^{-1} - \dots$$

$$- \frac{2}{9} v^{-4/3} - \dots + \frac{2}{9} \frac{\log v}{v} \left(1 + \frac{1}{3v} + \dots\right) + \gamma \left(v + \frac{1}{3} - \dots\right) - \gamma^2 \left(\frac{1}{5} v^{2/3} - \dots\right) + \dots$$

(выписанных членов разложений достаточно для определения γ с точностью до величин порядка $v^{-8/3}$).

Приравнявая выражения (6.2) и (6.3), получим уравнение для определения γ . Так, с точностью до величин порядка $v^{-8/3}$ получим

$$\gamma \approx \alpha v^{-1/3} - \frac{4}{9} \frac{\log v}{v} + \left(b_0 - 1 - \frac{2}{3} \log \frac{3}{2}\right) v^{-2} + O(v^{-8/3}) \quad (6.4)$$

7. **Определение амплитуды установившихся автоколебаний.** После определения постоянной $c = \frac{2}{3} + \gamma$ легко вычислить корень x_1 уравнения $f_0(x_1) = 0$. Решение этого кубического уравнения можно представить в виде

$$x_1 = 2 + \frac{1}{3} \gamma - \frac{2}{27} \gamma^2 + \frac{2}{243} \gamma^3 - \dots$$

и подстановка значения γ дает

$$x_1 \approx 2 + \frac{2}{3} \nu^{-1/3} - \frac{4}{27} \frac{\log \nu}{\nu^2} + \frac{1}{3} \left(b_0 - 1 - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} \right) \nu^{-2} + O(\nu^{-8/3}) \quad (7.1)$$

после чего уравнение (3.9) позволяет найти амплитуду автоколебаний. Вычисления дают

$$a \approx 2 + \frac{2}{3} \nu^{-1/3} - \frac{16}{27} \frac{\log \nu}{\nu^2} + \frac{1}{9} (3b_0 - 1 + 2 \log 2 - 8 \log 3) \nu^{-2} + O(\nu^{-8/3}) \quad (7.2)$$

8. **Определение периода автоколебаний.** Период автоколебаний вычисляется по формуле

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{p(x)} \quad (8.1)$$

Ограничимся здесь лишь указанием метода расчета периода без приведения выкладок.

Разбиваем весь промежуток интегрирования на пять частей соответственно различным областям:

1) от $-a$ до $-x_2$ — по области II (эту часть интеграла обозначим T_2''), здесь x_2 — значение x , полученное по формуле (3.2) при значении q , равном, например, $(1 - \nu^{-4/3}) a / (a^2 - 1)$;

2) от $-x_2$ до $-(1 + \nu^{-1/3})$ — по области III (эту часть интеграла обозначим буквой T_3);

3) от $-(1 + \nu^{-1/3})$ до $-(1 - \nu^{-1/3})$ — по области IV (эта часть интеграла обозначена буквой T_4);

4) от $-(1 - \nu^{-1/3})$ до x^* — по области I (эта часть интеграла обозначена буквой T_1); здесь x^* определяется по формуле (3.6);

5) от x^* до a — по области II (эта часть интеграла обозначена буквой T_2').

Полный период T тогда будет равен

$$T = 2(T_1 + T_2' + T_2'' + T_3 + T_4) \quad (8.2)$$

В каждом из интервалов подставляем вместо p соответствующие разложения (в области II произведя замену переменной интегрирования на q и в области IV на u). Пользуясь приводимыми для каждой области оценками особенностей функций, без труда определяем необходимое число членов разложений для получения периода T с заданной точностью, после чего расчет сводится к вычислению интегралов.

Приводим результаты расчетов с точностью до величины порядка ν^{-1} включительно:

$$T_2' = \int_{-1+\nu^{-1/3}}^0 \frac{dx}{p} \approx \nu^{-2/3} + \frac{1}{9} \frac{\log \nu}{\nu} - \left(1 - \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} \right) \nu^{-1} + O(\nu^{-4/3}) \quad (8.3)$$

$$T_2'' = \int_0^{x^*} \frac{dx}{p} \approx \frac{1}{3} \frac{\log \nu}{\nu} + \frac{2}{3} \left(1 + \log 3 + \frac{1}{2} \log 2 \right) \nu^{-1} + O(\nu^{-4/3}) \quad (8.4)$$

$$T_1 = T_1' + T_1'' \approx v^{-2/3} + \frac{4}{9} \frac{\log v}{v} + \left(\log 3 - \frac{1}{3} \right) v^{-1} + O(v^{-4/3}) \quad (8.5)$$

$$T_2' \approx \frac{1}{3} \frac{\log v}{v} + \frac{1}{3} \log \frac{3}{2} v^{-1} + O(v^{-4/3}) \quad (8.6)$$

$$T_2'' \approx \frac{4}{9} \frac{\log v}{v} + O(v^{-5/3} \log v) \quad (8.7)$$

$$T_3 \approx \left(\frac{3}{2} - \log 2 \right) v^{-1/3} + \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \right) v^{-1/3} + \frac{7}{10} v^{-2/3} - \\ - \frac{43}{18} \frac{\log v}{v} + \left(\frac{1}{2} b_0 + \frac{1}{12} + \frac{11}{6} \log \frac{2}{3} \right) v^{-1} + O(v^{-4/3}) \quad (8.8)$$

$$T_4 \approx v^{1/3} - \frac{1}{3} + \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) v^{-1/3} - \frac{17}{10} v^{-2/3} - \\ - \frac{1}{18} \frac{\log v}{v} + \left(\frac{1}{6} - d \right) v^{-1} + O(v^{-4/3}) \quad (8.9)$$

где

$$d = \frac{1}{2} \log \alpha - b_0 - \frac{1}{4} + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{u}{Q_0} - \frac{u}{u^2 + \alpha} \right) du + \int_0^{\infty} \left(Q_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{u^3 + 1} \right) du \quad (8.10)$$

Следовательно, для полного периода получаем

$$T \approx (3 - 2 \log 2) v + 3\alpha v^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\log v}{v} + \\ + \left(3 \log 2 - \log 3 - \frac{1}{6} + b_0 - 2d \right) v^{-1} + O(v^{-4/3}) \quad (8.11)$$

Приведем численные значения коэффициентов основных формул:

$$\alpha = 2.338107, \quad b_0 = 0.1723, \quad d = 0.4889$$

$$p(0) \approx \frac{2}{3} v + 2.338107 v^{-1/3} - \frac{4}{9} \frac{\log v}{v} - 1.0980 v^{-1} + O(v^{-5/3})$$

$$a \approx 2 + 0.779369 v^{-4/3} - \frac{16}{27} \frac{\log v}{v^2} - 0.8762 v^{-2} + O(v^{-8/3})$$

$$T \approx 1.613706 v + 7.01432 v^{-1/3} - \frac{22}{9} \frac{\log v}{v} + 0.0087 v^{-1} + O(v^{-4/3})$$

Мы провели здесь асимптотическое решение простейшего уравнения нелинейных колебаний, с тем чтобы можно было до конца провести вычисления. Но использованный здесь прием введения «связующих» областей не ограничивается только этим частным случаем и может быть применен для более общего уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - v \psi \left(x, \frac{dx}{dt} \right) + \varphi(x) = 0$$

при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию $\psi(x, p)$. Связующими областями будут окрестности линий $\psi(x, p) = 0$. Если в узловой точке линии $\psi(x, p) = 0$ разложение функции ψ в ряд Тейлора начинается с члена

$$a(x - x_0) p$$

где a — численный коэффициент, то основное решение для области IV останется без изменения, так как, полагая в окрестности узловой точки

$\pm (x - x_0) \nu^{2/3} = u$, $p = \pm^{-1/3} Q$, мы для главного члена разложения получим уравнение

$$Q_0 Q_0' - a u Q_0 + \varphi(x_0) = 0$$

сводящееся к (5.4а) простой заменой

$$Q_0 = [2\varphi^2(x_0) / a]^{1/3} Q_0^*, \quad u^* = [a^2 / 4\varphi(x_0)]^{1/3} u$$

9. Пример. В заключение мы приводим пример решений уравнения для $\nu = 10$. Для этого случая приведенные асимптотические формулы дают

Таблица 1

Таблица функций $Q_0(u)$ и $Q_1(u)$

u	$Q_0(u)$	$Q_1(u)$	u	$Q_0(u)$	$Q_1(u)$
-6.0	38.1747	-73.0343	0.0	1.0187	0.1869
-5.0	27.1436	-42.5848	0.2	0.8424	0.2149
-4.0	18.0985	-22.1123	0.4	0.7018	0.2310
-3.8	16.5269	-19.0382	0.6	0.5904	0.2398
-3.6	15.0342	-16.2068	0.8	0.5023	0.2445
-3.4	13.6203	-13.7819	1.0	0.4331	0.2471
-3.2	12.2848	-11.5673	1.2	0.3778	0.2485
-3.0	11.0276	-9.6070	1.4	0.3334	0.2492
-2.8	9.8484	-7.8847	1.6	0.2974	0.2495
-2.6	8.7469	-6.3844	1.8	0.2678	0.2496
-2.4	7.7225	-5.0898	2.0	0.2432	0.2497
-2.2	6.7749	-3.9849	2.2	0.2225	0.2498
-2.0	5.9032	-3.0532	2.4	0.2049	0.2499
-1.8	5.1068	-2.2790	2.6	0.1897	0.2499
-1.6	4.3845	-1.6458	2.8	0.1766	0.2500
-1.4	3.7351	-1.1379	3.0	0.1652	0.2500
-1.2	3.1568	-0.7393	3.2	0.1551	0.2500
-1.0	2.6476	-0.4344	3.4	0.1461	0.2500
-0.8	2.2047	-0.2080	3.6	0.1381	0.2500
-0.6	1.8249	-0.0457	3.8	0.1310	0.2500
-0.4	1.5041	+0.0664	4.0	0.1245	0.2500
-0.2	1.2372	0.1403			
0.0	1.0187	0.1869			

$p(0) = 7.540$, $a = 2.0138$, $T = 18.831$. На фиг. 2. изображен график функции $p(x)$, причем в расчетах брались два члена разложения для каждой области:

для области I

$$p(x) \approx \nu f_0(x) + \frac{1}{\nu} f_1(x)$$

для области II

$$x \approx a + \frac{1}{\nu^{1/2}} \chi_1(q)$$

для области III

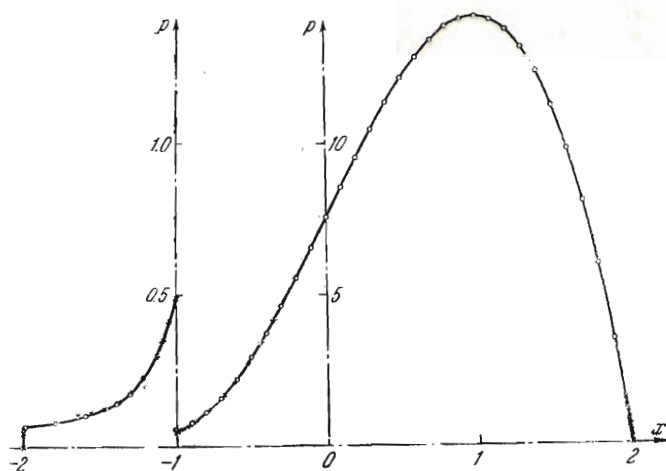
$$p \approx \frac{1}{\nu} P_0(x) + \frac{1}{\nu^{3/2}} P_1(x)$$

для области IV

$$p \approx \nu^{-1/3} Q_0(u) + \frac{1}{\nu} Q_1(u)$$

Значения функций $Q_0(u)$ и $Q_1(u)$ приведены в табл. 1.

На фиг. 2 расчетные точки, соответствующие формулам областей I и III, изображены кружочками, а точки, соответствующие формулам для областей II и IV, крестиками.



Фиг. 2.

Масштаб для p на участке от $-a$ до -1 увеличен в десять раз, по сравнению с масштабом остальной части кривой.

Поступила в редакцию
17 IV 1947

A. A. DORODNICYN. — ASYMPTOTIC SOLUTION OF VAN DER POL'S EQUATION

The paper presents the solution to equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \nu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.1)$$

The entire cycle of the oscillation in the coordinate system p, x (where $p = dx/dt$) is divided into four parts (domains I, II, III, IV in fig. 1). An asymptotic series in terms of powers of $1/\nu$ is established for each domain. For domain I the expansion (2.1) holds, where the functions $f_n(x)$ are determined from the recurrent system (2.2). The series (3.3) holds for domain II, functions $\chi_n(q)$ (where $q = -\nu p$) being determined from system (3.4). The series (4.17) is valid for domain III, functions $P_n(x)$ being determined from (4.18) and the series (5.3) holds for domain IV, where functions $Q_n(u)$ (where $u = \nu^{2/3}(x-1)$, $p = -\nu^{2/3}Q$) are determined from the system (5.4).

The intervals of variable x for which the different asymptotic series are valid cover each other, making it possible to connect the solutions obtained for different domains (i. e., to determine the constants of integration entering into the expressions of functions $f_n(x)$ and $\chi_n(q)$).

The asymptotic expressions for the amplitude of steady oscillation (formula (7.2) and for the period of oscillation (formula (8.12) may now be found.