Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Ф. Р. Гантмахер, Л. М. Левин

(Москва)

В работе даются в общей форме уравнения движения ракеты; под ракетой понимается любой аппарат с пороховым или жидкостным реактивным двигателем.

§ 1. Теорема количества движения и теорема моментов. Рассматривая движение ракеты, в каждый момент времени будем включать в ее состав только те материальные частицы, которые в этот момент находятся внутри контрольной поверхности, проходящей через наружную поверхность корпуса ракеты и выходное сечение сопла.

Для того чтобы получить уравнения движения ракеты, поступим следующим образом. Рассмотрим произвольный, но фиксированный момент времени. Обозначим через S фиктивное твердое тело с массой m, которое получилось бы, если бы ракета в момент t затвердела и перестала выделять из себя частицы. Твердое тело S не будет однородным: в одних своих частях оно будет иметь плотность металла, в других—плотность газа и т. д. Будем считать, что фиктивное твердое тело S неизменно связано с корпусом ракеты и, начиная с момента t (момента затвердения), движется вместе с ракетой. Количество движения тела S обозначим буквой $\mathbf{Q}$.

Наряду с этим будем рассматривать систему Σ, состоящую из всех материальных частиц, которые в момент t входили в состав ракеты. В момент t система Σ совпадает с ракетой, в последующие же моменты некоторые из частиц системы Σ будут находиться вне ракеты. Система Σ, как и твердое тело S, имеет постоянную массу, равную массе ракеты в момент времени t. Количество движения системы Σ относительно неподвижной (точнее, галилеевой) системы осей координат обозначим буквой $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{F}=d\mathbf{K}/dt$— главный вектор внешних сил, действующих в момент t на ракету (а следовательно, и на систему Σ).

Сравним между собой $d\mathbf{K}/dt$ и $d\mathbf{Q}/dt$. Будем рассматривать движение каждой частицы системы Σ как сложное: частица движется относительно S (т. е. относительно корпуса ракеты), а твердое тело S совершает переносное движение. Для абсолютной, относительной и переносной скорости частицы будем пользоваться обозначениями $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_e$. Аналогично для ускорений введем обозначения $\mathbf{w}_a$, $\mathbf{w}_r$ и $\mathbf{w}_e$. Кроме того, кориолисово ускорение частицы обозначим через $\mathbf{j}$.

Заметим, что $\mathbf{v}_r$ равно нулю для частиц корпуса [1] и для частиц пороха,

[1] В корпус мы будем включать все неизменные частицы ракеты.

а $\mathbf{w}_r$ равно нулю для частиц корпуса и тех частиц пороха, которые в данный момент не лежат на поверхности горения. Тогда [1]

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum m\mathbf{w}_a = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} - \mathbf{J} + \sum m\mathbf{w}_r \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{J} = -\sum m\mathbf{j}$ — главный вектор кориолисовых сил, а

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum m\mathbf{w}_e$$

Обозначим через $\mathbf{v}_{1r}$ относительную скорость частицы в момент $t_1 = t + dt$. Тогда для элементарного изменения скорости $\delta\mathbf{v}_r$ (относительно корпуса ракеты) [2] имеем $\delta\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{1r} - \mathbf{v}_r = \mathbf{w}_r\,dt$ и поэтому

$$\sum m\mathbf{w}_r\,dt = \sum m\mathbf{v}_{1r} - \sum m\mathbf{v}_r \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mathbf{K}^r$ количество движения относительно корпуса ракеты в момент t частиц газа, находящихся в этот момент в ракете, а через $\mathbf{K}_1^r$ — количество движения относительно корпуса ракеты частиц газа [3], находящихся в ракете в момент t. Теперь

$$\delta\mathbf{K}^r = \mathbf{K}_1^r - \mathbf{K}^r, \quad \sum m\mathbf{v}_r = \mathbf{K}^r, \quad \sum m\mathbf{v}_{1r} = \mathbf{K}_1^r + \mathbf{k}_r\,dt \tag{1.3}$$

где $\mathbf{k}_r\,dt$ — количество движения (в относительном движении) тех частиц газа, которые за промежуток времени dt прошли через выходное сечение сопла. Здесь $\mathbf{k}_r$ — количество движения относительно корпуса ракеты секундной массы газа, проходящей через сечение сопла, или, как мы будем говорить, секундный расход количества движения газа относительно корпуса ракеты, $\delta\mathbf{K}^r$ — элементарное изменение относительного количества движения газа, занимающего фиксированный объем (внутри контрольной поверхности).

Вектор $\mathbf{k}_r$ имеет размерность силы.

Силу $\mathbf{k}_r$ называют равнодействующей реактивных сил, или просто реактивной силой [4]. Если $\mu = -dm/dt$ есть секундный расход массы газа, а $\mathbf{u}$ (средняя по выходному сечению) — скорость истечения газа относительно сопла [5], то $\mathbf{k}_r = \mu\mathbf{u}$. Из равенств (1.2) и (1.3) следует

$$\sum m\mathbf{w}_r = \mathbf{k}_r + \frac{\delta\mathbf{K}^r}{dt} \tag{1.4}$$

[1] В дальнейшем для упрощения обычный индекс i в обозначениях величин, относящихся к частицам, опускается и, например, вместо $\mathbf{v}_{ai}$, m_i соответственно будет $\mathbf{v}_a$, m.

[2] Здесь и в дальнейшем буква δ обозначает дифференциал (элементарное изменение) вектора по отношению к корпусу ракеты. Элементарное изменение относительно исходной системы осей (неподвижной) будем обозначать буквой d.

[3] Для ракеты с жидкостным реактивным двигателем (ЖРД) вектор $\mathbf{K}^r$ есть количество движения частиц газа, находящихся в камере сгорания и сопле, и частиц жидкости, движущихся в баках и трубах, подводящих топливо к камере сгорания.

[4] Часто в равнодействующую реактивную силу включают дополнительно и некоторые внешние силы; об этом подробнее см. § 2.

[5] Если ракета имеет несколько сопел, то $\mathbf{k}_r = \Sigma\mu_i\mathbf{u}_i$, где μ_i — расход через i-е сопло, а $\mathbf{u}_i$ — средняя скорость в выходном сечении этого сопла. В дальнейшем рассматривается ракета с одним соплом; такое рассмотрение не ограничивает общность результатов.

Подставляя в правую часть равенства (1.1) вместо $\sum m\mathbf{w}_r$ выражение из (1.4) и $\mathbf{F}$ вместо $d\mathbf{K}/dt$, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{k}_r + \mathbf{J} - \frac{\delta \mathbf{K}^r}{dr} \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) выражает собой теорему количеств движения для затвердевшей ракеты, т. е. для твердого тела S.

Переходим к рассмотрению кинетических моментов (т. е. главных моментов количеств движения) системы Σ и тела S.

Введем обозначения: Λ—кинетический момент системы Σ, а $\mathbf{L}$—тела S в абсолютном движении, т. е. в движении относительно неподвижной системы осей координат. Полюс, относительно которого берется кинетический момент, отмечается индексом; так, например, $\mathbf{L}_c$—кинетический момент тела S относительно его центра инерции C и Λ_{c1}—кинетический момент системы Σ относительно ее центра инерции C_1.

Наряду с абсолютным движением нам придется рассматривать движение относительно осей, проходящих через точку C и движущихся вместе с нею поступательно [1]. Величины, относящиеся к этому движению, будем отмечать одним штрихом.

Аналогично при рассмотрении движения относительно осей, проходящих через C_1 (центр инерции системы Σ) и движущихся поступательно, соответствующие величины будем отмечать двумя штрихами.

Применяя теорему моментов количеств движения относительно центра инерции к системе Σ, для момента времени t получим

$$\frac{d\Lambda_{c1}''}{dt} = \mathbf{G}_{c1} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{G}_{c1}$ — главный момент всех внешних сил, действующих на ракету (а следовательно, и на систему Σ) в момент времени t.

Заметим, что $\Lambda_c'' = \Lambda_c'$. Действительно, при переходе к другой системе осей координат, движущейся поступательно относительно первой, ко всем скоростям точек системы Σ прибавится одна и та же по величине и по направлению дополнительная скорость. Дополнительные количества движения будут пропорциональны массам и одинаково направлены; поэтому они сведутся к одному равнодействующему вектору, приложенному в центре инерции C_1. Момент этого дополнительного вектора количества движения относительно C_1 будет равен нулю. Далее

$$\Lambda_{c1}' = \Lambda_c' + \overline{C_1C} \times \mathbf{K}'$$

Отсюда

$$\frac{d\Lambda_{c1}'}{dt} = \frac{d\Lambda_c'}{dt} + \frac{d\,\overline{C_1C}}{dt} \times \mathbf{K}' + \overline{C_1C} \times \frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \frac{d\Lambda_c'}{dt} \tag{1.7}$$

так как в момент t точка C_1 совпадает с точкой C, а

$$\frac{d\,\overline{C_1C}}{dt} = \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_{c1} = -\frac{1}{m}\mathbf{K}'$$

---

[1] Начало этой системы осей координат C не перемещается относительно корпуса ракеты.

Замечая, что в момент t точки C_1 и C совпадают, и, следовательно, $\mathbf{G}_{c_1}=\mathbf{G}_c$, и вспоминая, что $\Lambda_{c_1}''=\Lambda_{c_1}'$, из (1.6) и (1.7) находим

$$\frac{d\Lambda_c'}{dt}=\mathbf{G}_c \tag{1.8}$$

Снова будем рассматривать движение каждой частицы системы Σ как сложное. Движение частицы относительно осей, движущихся поступательно вместе с точкой C, будем считать абсолютным, движение тела S относительно этих осей — переносным и, наконец, движение частицы относительно тела S (т. е. относительно корпуса ракеты) относительным. Тогда

$$\Lambda_c'=\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_a, \qquad \frac{d\Lambda_c'}{dt}=\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{w}_a$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, проведенный из точки C. Подставляя вместо абсолютного ускорения частицы сумму $\mathbf{w}_r+\mathbf{w}_e+\mathbf{j}$ и замечая, что

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{w}_e=\frac{d\mathbf{L}_c'}{dt}, \qquad -\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{j}=\mathbf{H}_c \tag{1.9}$$

где $\mathbf{H}_c$ — главный момент кориолисовых сил, получим

$$\frac{d\Lambda_c'}{dt}=\frac{d\mathbf{L}_c'}{dt}-\mathbf{H}_c+\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{w}_r \tag{1.10}$$

Пусть снова $\mathbf{v}_{1r}$ — относительная скорость частицы в момент $t_1=t+dt$. Тогда $\mathbf{v}_{1r}-\mathbf{v}_r=\mathbf{w}_r\,dt$ и поэтому

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{w}_r\,dt=\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_{1r}-\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_r \tag{1.11}$$

Заметим, что

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_r=\Lambda_c^r \tag{1.12}$$

где Λ_c^r — кинетический момент газа, находящегося внутри ракеты в относительном движении[1] в момент времени t. Значение этого кинетического момента газа в момент времени t_1 обозначим через Λ_{1c}^r. Далее,

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_{1r}=\sum \mathbf{r}_1\times m\mathbf{v}_{1r}-\sum(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\times \mathbf{v}_{1r}$$

где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор в момент t_1 той частицы, которая в момент t имела радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Из суммы $\sum \mathbf{r}_1\times m\mathbf{v}_{1r}$ выделим те слагаемые, в которых конец радиуса вектора $\mathbf{r}_1$ вышел за пределы ракеты. Сумма этих слагаемых будет равна секундному расходу кинетического момента газа через выходное сечение сопла в относительном движении $\mathbf{l}_{rc}$, помноженному на dt.

Сумма остальных слагаемых дает Λ_{1c}^r.

Далее $\sum(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\times m\mathbf{v}_{1r}=0$, так как $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}=\delta\mathbf{r}=\mathbf{v}_r\,dt$ и с точностью до бесконечно малых $\mathbf{v}_{1r}\approx\mathbf{v}_r$. Таким образом,

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{v}_{1r}=\Lambda_{1c}^r+\mathbf{l}_{rc} \tag{1.13}$$

Из равенств (1.11), (1.12) и (1.13) следует

$$\sum \mathbf{r}\times m\mathbf{w}_r=\frac{\delta\Lambda_c^r}{dt}+\mathbf{l}_{rc} \tag{1.14}$$

где $\delta\Lambda_c^r=\Lambda_{1c}^r-\Lambda_c^r$ — элементарное изменение Λ_c^r относительно корпуса.

---

[1] См. сноску[3] на стр. 302. Величина Λ_c^r, как и K^r, относится не к фиксированной массе, а к фиксированному объему, занимаемому газом.

Подставляя в (1.10) вместо суммы ее выражение из (1.14), получим

$$\frac{d\Lambda_c'}{dr} = \frac{d\mathbf{L}_c'}{dt} + \mathbf{l}_{rc} - \mathbf{H}_c + \frac{\partial \Lambda_c^r}{dt} \tag{1.15}$$

Секундный расход кинетического газа в относительном движении $\mathbf{l}_{rc}$ имеет размерность момента силы. Момент $\mathbf{l}_{rc}$ называется реактивным моментом [1]. Из уравнений (1.8) и (1.15) находим

$$\frac{d\mathbf{L}_c'}{dt} = \mathbf{G} - \mathbf{l}_{rc} + \mathbf{H}_c - \frac{\partial \Lambda_c^r}{dt} \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) определяет производную по времени от кинетического момента затвердевшей ракеты S в ее движении относительно осей, проходящих через центр инерции C тела S и движущихся поступательно.

§ 2. О реактивных силах. Разобьем площадь выходного сечения сопла на элементарные площадки $d\sigma$. Обозначим через $\nu\, d\sigma$ секундный расход газа через площадку $d\sigma$, а через $\mathbf{v}_r$ — относительную скорость газа, проходящего через эту площадку. Тогда секундный расход массы газа через выходное сечение сопла будет $\mu = \Sigma \nu\, d\sigma$, где суммирование распространяется на все элементы $d\sigma$ выходного сечения сопла.

Рассмотрим вектор $-\nu\, d\sigma \mathbf{v}_r$, имеющий размерность силы. Эту силу назовем *элементарной реактивной силой*. Она порождается частицами газа, выделяющимися из ракеты через площадку $d\sigma$. Главный вектор элементарных реактивных сил равен $-\mathbf{k}_r$, а главный момент относительного полюса C равен $-\mathbf{l}_{rc}$, где $\mathbf{k}_r$ и $\mathbf{l}_{rc}$ — секундные расходы количества движения и кинетического момента газа относительно корпуса ракеты.

Однако часто в систему реактивных сил включают и некоторые внешние силы, а именно силы, возникающие из-за атмосферного давления на корпус ракеты и из-за давления вышедшей части газа на оставшуюся в ракете, и дополнительные силы, вызванные нестационарностью движения газа.

Объясняется это следующими соображениями. Представим себе горение ракетного заряда в стендовых условиях, когда ракета закреплена неподвижно. В этом случае

$$\mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{L}_c' = 0, \quad \mathbf{J} = 0, \quad \mathbf{H}_c = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_* + \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{G}_c = \mathbf{G}_{c*} + \mathbf{G}_c^*$$

где $\mathbf{F}_*$ и $\mathbf{G}_{*c}$ — главный вектор и главный момент опорных реакций, а $\mathbf{F}^*$ и $\mathbf{G}_c^*$ — главный вектор и главный момент сил атмосферного давления и давления наружной части газа на выходное сечение сопла.

Тогда из уравнений (1.5) и (1.16) следует [2]

$$-\mathbf{F}_* = -\mathbf{k}_r + \mathbf{F}^* - \frac{\partial \mathbf{K}^r}{dt}, \qquad -\mathbf{G}_{*c} = -\mathbf{l}_{rc} + \mathbf{G}_c^* - \frac{\partial \Lambda_c^r}{dt}$$

При измерениях на стенде обычно определяются силы давления ракеты на

[1] Часто в реактивный момент включают дополнительно моменты некоторых внешних сил; см. об этом в § 2.

[2] При этом предполагается, что течение газа в камере и сопле для движущейся и покоящейся ракеты одинаково. Это допущение равносильно пренебрежению влиянием ускорения ракеты на относительное движение газа.

опоры. Эти давления характеризуются главным вектором $-\mathbf{F}_*$ и главным моментом $-\mathbf{G}_{*c}$, которые включают в себя помимо чисто реактивных дополнительные силы и моменты $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{G}_c^*$, $-\delta\mathbf{K}^r / dt$, $-\delta\Lambda^r{}_c / dt$.

Поэтому мы условимся в дальнейшем объединять в одну систему: 1) чисто реактивные силы, 2) силы, вызванные атмосферным давлением[1] и давлением наружной части газа (вышедшей из ракеты струи), и 3) дополнительные силы, возникающие из-за нестационарности движения газа в ракете. Все эти силы будем включать в систему реактивных сил. Главный вектор этих сил $-\mathbf{F}_*$ будем обозначать через $\mathbf{T}$, а главный момент $-\mathbf{G}_{*c}$ — через $\mathbf{M}_c$.

Тогда

$$\mathbf{T} = -\mathbf{k}_r + \mathbf{F}^* - \frac{\delta\mathbf{K}^r}{dt}, \qquad \mathbf{M}_c = -\mathbf{l}_{rc} + \mathbf{G}_c^* - \frac{\delta\Lambda^r{}_c}{dt} \tag{2.1}$$

Обычно при расчете реактивной силы $\mathbf{T}$ и реактивного момента $\mathbf{M}_c$ третьими слагаемыми в формулах (2.1), т. е. $\delta\mathbf{K}^r / dt$ и $\delta\Lambda^r{}_c / dt$, пренебрегают[2].

§ 3. Окончательная формулировка основных теорем. Принцип затвердевания. Выделим из числа внешних сил силы, вызванные равномерным атмосферным давлением и давлением наружного газа, которые мы условились (см. § 2) включать в систему реактивных сил. Эти силы имеют главный вектор $\mathbf{F}^*$ и главный момент $\mathbf{G}_c^*$. Главный вектор и главный момент остальных внешних сил будем теперь обозначать через $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.

В этих обозначениях уравнение изменения количества движения (1.5) и уравнение кинетического момента для затвердевшей ракеты (1.16) примут вид

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^* - \mathbf{k}_r + \mathbf{J} - \frac{\delta\mathbf{K}^r}{dt}, \qquad \frac{d\mathbf{L}_c'}{dt} = \mathbf{G}_c + \mathbf{G}_c^* - \mathbf{l}_{cr} + \mathbf{H}_c - \frac{\delta\Lambda_c{}^r}{dt}$$

Вводя в эти уравнения реактивную силу $\mathbf{T}$ и момент $\mathbf{M}_c$, согласно формулам (2.1) окончательно получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{J}, \qquad \frac{d\mathbf{L}_c'}{dt} = \mathbf{G}_c + \mathbf{M}_c + \mathbf{H}_c \tag{3.1}$$

Из этих уравнений вытекает следующий *принцип затвердевания*.

Уравнения движения ракеты в произвольный момент времени t могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела постоянной массы, если представить себе, что ракета затвердела и застыла в момент времени t (т. е. перестала выделять из себя частицы) и что к полученному таким образом фиктивному твердому телу приложены: 1) внешние силы, действующие на ракету, 2) реактивные силы и 3) силы Кориолиса.

§ 4. Второй вывод уравнения количеств движения и уравнения моментов. Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени dt и сравним между собой элементарные приращения за этот промежуток времени $d\mathbf{K}$ и $d\mathbf{Q}$ количеств движения системы Σ и твердого тела S.

Для этого разобьем объем, занимаемый ракетой, на три части: 1) объем, занимаемый корпусом, 2) объем, занимаемый в момент t порохом (или жидким топливом), и 3) объем, занимаемый в момент t находящимися

[1] Под силами атмосферного давления мы понимаем силы, вызванные постоянным атмосферным давлением на внешнюю поверхность ракеты в стендовых условиях.

[2] Т. е. считают движение газа в ракете квазистационарным.

в ракете частицами газа. Части количеств движения, относящиеся к этим объемам, будем соответственно обозначать индексами 1, 2 и 3.

Очевидно, что для корпуса

$$d\mathbf{K}_1 = d\mathbf{Q}_1 \tag{4.1}$$

Переходим к пороху. В момент t имеем $\mathbf{K}_2 = \mathbf{Q}_2$, но в момент $t_1 = t + dt$ вектор $\mathbf{K}_2$ отличается от $\mathbf{Q}_2$ на количество движения той элементарной массы пороха, которая сгорела в промежуток времени dt. Это недостающее количество движения мы представим в виде $\mathbf{k}_p\, dt$, где $\mathbf{k}_p$ — секундный расход количества движения пороха (т. е. количество движения расходуемой в момент t секундной массы пороха). Тогда [1]

$$d\mathbf{K}_2 = d\mathbf{Q}_2 - \mathbf{k}_p\, dt \tag{4.2}$$

Переходим теперь к объему части ракеты, занятой в момент t газом. Количество движения частиц газа, находящихся в этом объеме, относительно корпуса ракеты обозначим (как и в § 1) через $\mathbf{K}^r$. Соответствующее приращение будет $d\mathbf{K}^r$, где дифференциал d учитывает изменение вектора относительно неподвижной системы координат. Но тогда

$$d\mathbf{K}^r = \delta\mathbf{K}^r + \omega \times \mathbf{K}^r\, dt$$

где $\delta\mathbf{K}^r$ — элементарное изменение вектора $\mathbf{K}^r$ относительно корпуса ракеты, а ω — угловая скорость корпуса.

Перейдем теперь к приращению количества движения газа в рассматриваемом объеме в переносном движении. Это приращение совпадает с $d\mathbf{Q}_3$ в том случае, если в каждой точке рассматриваемого объема плотность газа ρ в моменты t и t_1 одинакова. В общем же случае необходимо учесть и изменение плотности ρ. Поэтому в общем случае искомое приращение количества в переносном движении равно

$$d\mathbf{Q}_3 + \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dt\, \mathbf{v}_e\, d\tau$$

Здесь интеграл распространяется на ту часть объема снаряда W, которая в момент t занята газом, $\mathbf{v}_e$ — переносная скорость элемента объема $d\tau$, наконец, $\partial\rho / \partial t$ — скорость изменения плотности ρ в данном элементе объема $d\tau$. Поэтому

$$d\mathbf{K}_3 = d\mathbf{Q}_3 + \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dt \mathbf{v}_e\, d\tau + \delta\mathbf{K}^r + \omega \times \mathbf{K}^r\, dt \tag{4.3}$$

До сих пор мы рассматривали приращения количества движения частиц, находящихся в объеме ракеты. Но при вычислении $d\mathbf{K}$ необходимо учесть и количество движения в момент t_1 тех частиц, которые за промежуток времени от t до $t_1 = t + dt$ прошли через выходное сечение сопла. Это количество движения равно $(\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_r)\, dt$, где $\mathbf{k}_e$ — секундный расход количества

---

[1] При этом мы не рассматриваем количество движения газа, занимающего в момент t_1 объем сгоревшего за dt секунд пороха. Отношение этого (не учитываемого) количества движения к величине $\mathbf{k}_p dt$ равно отношению плотности газа к плотности пороха и очень мало. Таким образом, под $\mathbf{k}_p$ нужно понимать секундный расход количества движения пороха, умноженный на $1 - \varepsilon$, Для ракеты с ЖРД $d\mathbf{K}_2 = d\mathbf{Q}_2 - \mathbf{k}_p\, dt + d\mathbf{K}_0{}^r$, где $\mathbf{K}_0{}^r$ — количество движения жидкого топлива в относительном движении, а $\mathbf{k}_p$ — секундный расход количества движения топлива в переносном движении, умноженный на $1 - \varepsilon$; при этом ε — отношение плотности паров топлива к плотности самого топлива.

газа через выходное сечение сопла в переносном движении, а $\mathbf{k}_r$ — в относительном. Таким образом,

$$d\mathbf{K} = d\mathbf{K}_1 + d\mathbf{K}_2 + d\mathbf{K}_3 + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_r)\,dt$$

Подставляя сюда $d\mathbf{K}_1$, $d\mathbf{K}_2$ и $d\mathbf{K}_3$ из (4.1), (4.2) и (4.3), получим

$$d\mathbf{K} = d\mathbf{Q} - (\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_e - \mathbf{k}_r)\,dt + \delta\mathbf{K}^r + \omega \times \mathbf{K}^r\,dt + \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\,\mathbf{v}_e\,d\tau \tag{4.4}$$

Как и в предыдущем, обозначим через $\mathbf{F}^*$ главный вектор сил атмосферного давления и давления наружной части газа на ракету, а через $\mathbf{F}$ — главный вектор остальных внешних сил. Согласно теореме количеств движения для системы Σ имеем $d\mathbf{K}\,/\,dt = \mathbf{F} + \mathbf{F}^*$ и, следовательно, из (4.4) найдем[1]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{k}_r + \mathbf{F}^* - \frac{\delta\mathbf{K}^r}{dt} + \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_e - \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{v}_e\,d\tau - \omega \times \mathbf{K}^r \tag{4.5}$$

Здесь последний член $-\omega \times \mathbf{K}^r$ представляет собой половину силы Кориолиса $\mathbf{J}$. Поэтому, принимая во внимание (2.1), уравнение (4.5) можно привести к виду

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_e - \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{v}_e\,d\tau + \frac{1}{2}\,\mathbf{J} \tag{4.6}$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить уравнение моментов

$$\frac{dL'_c}{dt} = \mathbf{G}_c + \mathbf{M}_c + \mathbf{l}_{cp}' - \mathbf{l}_{ce}' - \omega \times \Lambda_c^r - \iiint \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_e'\,\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau \tag{4.7}$$

где $\mathbf{l}_{cp}$ — секундный расход кинетического момента пороха, а $\mathbf{l}_{ce}$ — секундный расход через выходное сечение сопла кинетического момента газа, причем в обоих случаях имеется в виду кинетический момент в переносном движении корпуса относительно системы осей, движущихся поступательно вместе с центром инерции C тела S.

§ 5. Формулы для количества движения, кориолисовой силы и кориолисова момента. Сопоставляя уравнения (4.6) и (4.7) с уравнениями (3.1), получим формулы для кориолисовой силы $\mathbf{J}$ и кориолисова момента $\mathbf{H}_c$:

$$\mathbf{J} = 2\left(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_e - \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{v}_e\,d\tau \right) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{l}_{cp}' - \mathbf{l}'_{ec} - \omega \times \Lambda_c^r - \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{r}' \times \mathbf{v}_e'\,d\tau \tag{5.2}$$

Эти формулы очевидным образом упрощаются, если плотность газа не меняется с течением времени, т. е. $\partial\rho\,/\,\partial t = 0$ (это имеет место при квазистационарном движении газа в ракете).

Остановимся сначала на выражении (5.1) для $\mathbf{J}$. Обозначим через μ_1 секундный расход массы пороха (или, что то же, секундный приход массы газа), а через μ_2 — секундный расход массы газа через выходное сечение сопла. Тогда, очевидно,

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{d}{dt} \iiint \rho\,d\tau = \iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau \tag{5.3}$$

[1] Эта формула верна и для ракеты с ЖРД. Только в этом случае $\mathbf{K}^r$ — количество движения и газа и топлива в их относительном движении. См. сноску[3] на стр. 302.

Далее, $\mathbf{k}_p\,dt$ представляет собой количество движения элементарной массы пороха $\mu_1\,dt$, сгоревшей за промежуток времени dt. Обозначим через C_p центр инерции этой элементарной массы пороха, а через $\mathbf{v}_{cp}$ — скорость точки C_p в переносном движении корпуса. Тогда $\mathbf{k}_p=\mu_1\mathbf{v}_{cp}$.

Если считать, что элементарная масса пороха $\mu_1\,dt$ симметрично расположена относительно оси ракеты, то точка C_p будет лежать на этой оси. Если масса $\mu_1\,dt$ симметрична относительно среднего сечения пороховых шашек, то точка C_p будет расположена в плоскости этого сечения.

Точно так же рассмотрим элементарную массу газа $\mu_2\,dt$, прошедшую через выходное сечение сопла за время dt. Обозначим через C_e центр инерции этой элементарной массы и через $\mathbf{v}_{ce}$ — переносную скорость этого центра. Тогда $\mathbf{k}_e=\mu_2\mathbf{v}_{ce}$.

Если проходящий через выходное сечение поток газа симметричен, то точка C_e лежит в центре выходного сечения сопла.

Обозначим через $\mathbf{r}_p$ и $\mathbf{r}_e$ соответственно радиусы-векторы точек C_p и C_e, проведенные из какого-либо полюса O, неизменно связанного с корпусом.

Кроме того, пусть $\mathbf{r}$ будет радиус-вектор произвольной точки внутри ракеты. Используя выражение для скоростей точек твердого тела, имеем

$$\mathbf{v}_{cp}=\mathbf{v}_o+\omega\times\mathbf{r}_p,\qquad \mathbf{v}_{ce}=\mathbf{v}_o+\omega\times\mathbf{r}_e,\qquad \mathbf{v}_e=\mathbf{v}_o+\omega\times\mathbf{r} \tag{5.4}$$

На основании этих равенств и равенств $\mathbf{k}_p=\mu_1\mathbf{v}_{cp}$ и $\mathbf{k}_e=\mu_2\mathbf{v}_{ce}$ формула (5.1), если учесть еще (5.3), принимает вид

$$\mathbf{J}=-2\omega\times\left(\mu_2\mathbf{r}_e-\mu_1\mathbf{r}_p+\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{r}\,d\tau\right) \tag{5.5}$$

Сопоставив эту формулу с обычным выражением для кориолисовой силы $\mathbf{J}=-2\omega\times\mathbf{K}^r$ и учитывая произвольность вектора ω, получим

$$\mathbf{K}^r=\mu_2\mathbf{r}_e-\mu_1\mathbf{r}_p+\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathbf{r}\,dt \tag{5.6}$$

Здесь $\mathbf{K}^r$ — количество движения газа, находящегося в ракете, в его движении относительно корпуса, а интеграл в правой части распространен на весь объем W, занятый газом.

Формула (5.6) носит общий характер[1]. Она определяет количество движения газа (или жидкости), заключенного в данном объеме, в случае, если заданы секундный приход μ_1 и расход μ_2 массы газа сквозь поверхность, ограничивающую этот объем, и секундное изменение плотности в каждой точке объема. В этой формуле $\mathbf{r}_p$ — радиус-вектор центра инерции секундной входящей массы μ_1, а $\mathbf{r}_e$ — радиус-вектор центра инерции секундной массы μ_2.

Рассмотрим частный случай, когда $\partial\rho/\partial t\approx 0$ (например, квазистационарное движение газа, произвольное движение несжимаемой жидкости[2] и др.). В этом случае согласно (5.3) будет $\mu_1=\mu_2=\mu$, причем для случая

[1] Формулы (5.6) и (5.2) для $\mathbf{K}^r$ и $\mathbf{H}_c$ могут быть получены непосредственно, если вычислить производные по времени от интегралов

$$\iiint\mathbf{r}\,dm,\qquad \iiint\mathbf{r}\times(\omega\times\mathbf{r})\,dm$$

распространенных на массу, занимающую в момент t данный объем.

[2] В этом случае имеем точное равенство

ракеты $\mu = dm / dt$. Если ввести вектор $\mathbf{b} = \overline{C_p C_e}$, то формула (5.6) и формула для $\mathbf{J}$ соответственно примут вид

$$\mathbf{K}^r = \mu \mathbf{b}, \qquad \mathbf{J} = -2\omega \times \mathbf{K}^r = -2\mu (\omega \times \mathbf{b}) \tag{5.7}$$

Переходим теперь к формуле (5.2) для кориолисова момента $\mathbf{H}_c$. Если принять, что $\partial\rho / \partial t = 0$ и что равнодействующий вектор количеств движения частиц газа в их относительном движении проходит через центр инерции C, т. е. $\Lambda_c^r = 0$, то формула (5.2) принимает вид

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{l}'_{pc} - \mathbf{l}'_{ec}$$

Рассмотрим для примера случай плоско-параллельного движения ракеты. Обозначим через I момент инерции корпуса относительно экваториальной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости движения. Тогда момент инерции массы пороха, сгоревшей за dt секунд, будет равен $-dI$. Следовательно, кинетический момент этой массы будет

$$\mathbf{l}'_{pc}\, dt = -\omega\, dI$$

С другой стороны, кинетический момент (в переносном движении) элементарной массы газа, прошедшей через выходное сечение за время dt, будет $-dm\, \mathbf{r}_e^2 \omega$, где $\mathbf{r}_e = \overline{CC_e}$. Таким образом,

$$H_c = \left(-\frac{dI}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{r}_e^2 \right) \omega$$

§ 6. Уравнение движения центра инерции ракеты. Из принципа затвердевания для момента времени t следует

$$m\mathbf{w}_c = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{J} \tag{6.1}$$

где m — масса ракеты в момент t, а $\mathbf{w}_c$ — ускорение центра инерции C затвердевшей в момент t ракеты, т. е. тела S.

Однако при горении топлива центр инерции ракеты смещается относительно корпуса. Движение центра инерции ракеты относительно исходной (неподвижной системы координат) можно себе представить в виде сложного движения, при котором центр инерции движется относительно корпуса (относительное движение), а корпус ракеты движется относительно неподвижной системы осей (переносное движение). Тогда $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{w}_c$ — переносные скорость и ускорение, а $\mathbf{v}_{cr}$ и $\mathbf{w}_{cr}$ — относительные. Абсолютные скорость и ускорение центра инерции определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{cr}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_{cr} + 2\omega \times \mathbf{v}_{cr}$$

Определяя из последнего равенства $\mathbf{w}_c$ и подставляя в равенство (6.1), получим уравнение движения центра инерции ракеты

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{J} + m\mathbf{w}_{cr} + 2m\omega \times \mathbf{v}_{cr} \tag{6.2}$$

Найдем выражения для величин $\mathbf{v}_{cr}$ и $\mathbf{w}_{cr}$. При этом корпус ракеты можно считать неподвижным. Пусть точка O корпуса ракеты принята за начальную, а C и C' — положение центра инерции ракеты в моменты t и $t' = t + dt$. Тогда для моментов времени t и t' будем иметь соответственно

$$m\mathbf{r}_c = \iiint \rho(t)\, \mathbf{r}\, d\tau, \qquad (m + dm)\, \mathbf{r}_{c'} = \iiint \rho(t + dt)\, \mathbf{r}\, d\tau$$

Здесь $\mathbf{r}_c=\overline{OC}$, $\mathbf{r}_{c'}=\overline{OC'}=\mathbf{r}_c+\delta\mathbf{r}_c$, а ρ—плотность элементарного объема ракеты. Интегрирование при этом распространено на весь объем ракеты (включая корпус).

Вычитая первое соотношение из второго и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$dm\,\mathbf{r}_c+m\,\delta\mathbf{r}_c=-\mu_1\mathbf{r}_p+\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,\mathbf{r}\,d\tau$$

Отсюда следует, что

$$m\mathbf{v}_{c\,r}=m\frac{\delta\mathbf{r}_c}{dt}=\mu_2\mathbf{r}_c-\mu_1\mathbf{r}_p+\iiint\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{r}\,d\tau$$

или на основании (5.6)

$$m\mathbf{v}_{c\,r}=\mu_2(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_e)+\mathbf{K}^r \tag{6.3}$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$-\mu_2\mathbf{v}_{c\,r}+m\mathbf{w}_{c\,r}=\mu_2\mathbf{v}_{c\,r}+\frac{\partial\mu_2}{\partial t}(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_e)+\frac{\delta\mathbf{K}^r}{dt}$$

или

$$m\mathbf{w}_{c\,r}=2\mu_2\mathbf{v}_{c\,r}+\frac{\partial\mu_2}{\partial t}(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_e)+\frac{\delta K^2}{dt} \tag{6.4}$$

В квазистационарном случае $\partial\rho\,/\,\partial t\approx 0$, $\mu_2=\mu_1=\mu$, $\delta\mathbf{K}^r\,/\,dt\approx 0$, $\partial\mu_2\,/\,\partial t\approx 0$ и формулы (6.3) и (6.4) принимают вид

$$\mathbf{v}_{c\,r}=\frac{\mu}{m}(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_p)=\frac{\mu}{m}\overline{C_pC}\,,\qquad \mathbf{w}_{c\,r}=2\frac{\mu^2}{m^2}(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_p)=2\frac{\mu^2}{m^2}\overline{C_pC} \tag{6.5}$$

Вычисления, проведенные по этим формулам, показывают, что величина $\mathbf{v}_{c\,r}$ и $\mathbf{w}_{c\,r}$ пренебрежимо малы по сравнению со средними скоростями и ускорениями реактивных снарядов на активном участке траектории.

Поэтому в (6.2) членом $m\mathbf{w}_{cr}$ можно пренебречь по сравнению с реактивной тягой $\mathbf{T}$. Что же касается члена $2m\omega\times\mathbf{v}_{cr}$, то он обычно такого же порядка, как и $\mathbf{J}$, так как $|\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_p|$ того же порядка, как и $|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_p|$.

§ 7. Уравнения вращательного движения ракеты. Обозначим через ξ, η, ζ — главные центральные оси инерции ракеты, через I_1, I_2 и I_3 — моменты инерции ракеты относительно этих осей, через p, q, r — проекции угловой скорости корпуса ω на эти оси.

Предположим сначала, что направления главных осей инерции ξ, η, ζ остаются неизменными относительно корпуса во все время горения реактивного заряда. Это естественное предположение всегда делается для ракеты, поскольку принимается, что все время ось ракеты является одной из главных осей инерции, а две другие главные оси инерции могут быть произвольно выбраны в плоскости, перпендикулярной оси снаряда.

При сделанном предположении главные оси инерции затвердевшей ракеты, т. е. тела S, будут все время параллельны осям ξ, η, ζ. Соответствующие моменты инерции для тела S будут иметь постоянные значения, равные значениям моментов инерции I_1, I_2, I_3 реактивного снаряда в момент времени t. Из сказанного следует, что p, q, r будут проекциями угловой скорости ω твердого тела S на главные центральные оси инерции этого тела.

Поэтому, пользуясь принципом затвердевания, мы можем написать три уравнения вращательного движения в форме Эйлера [1]:

$$I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_2)\, qr = N_\xi \qquad (\xi, \eta, \zeta;\ 1, 2, 3;\ p, q, r) \qquad (7.1)$$

где N_ξ—сумма моментов относительно оси ξ всех внешних, реактивных и кориолисовых сил; аналогично определяются N_η и N_ζ.

Три уравнения (7.1) вместе с тремя скалярными уравнениями движения центра инерции снаряда составляют систему из шести уравнений, которая и определяет движение ракеты.

Рассмотрим для полноты и общий случай, когда во время горения ракетного заряда главные центральные оси инерции меняют свое направление относительно корпуса ракеты.

Обозначим через ξ', η', ζ' направления главных осей инерции тела S, т. е. направления, неизменные относительно корпуса и совпадающие с направлениями ξ, η, ζ в момент времени t. Проекции угловой скорости ω на оси ξ', η', ζ' обозначим соответственно через p', q', r'. Применяя принцип затвердевания, мы можем для момента времени t написать

$$I_1 \frac{dp'}{dt} + (I_3 - I_2)\, q'r' = N_{\xi'}\,, \qquad (\xi, \eta, \zeta;\ 1, 2, 3;\ p, q, r) \qquad (7.2)$$

Здесь $N_{\xi'}$—сумма проекций внешних, реактивных и кориолисовых сил на ось ξ', и т. д. Обозначим через Ω угловую скорость триедра $\xi\eta\zeta$ относительно корпуса ракеты. Пусть $d\omega / dt$—производная от вектора ω относительно корпуса ракеты, а $\delta\omega / dt$—производная относительно осей $\xi\eta\zeta$. Тогда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{dt} + \Omega \times \omega \qquad (7.3)$$

Проекции вектора $d\omega / dt$ на оси ξ', η', ζ' равны dp' / dt, dq' / dt, dr' / dt. Проекции вектора $\delta\omega / dt$ на оси ξ, η, ζ равны dp / dt, dq / dt, dr / dt. Поскольку в момент t направления ξ', η', ζ' совпадают с направлениями ξ, η, ζ, то для этого момента времени из (7.3) следует

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Omega_\eta r - \Omega_\zeta q \qquad (\xi, \eta, \zeta;\ p, q, r) \qquad (7.4)$$

Заметим, что $p' = p$, $q' = q$, $r' = r$ в момент t. Подставляя в (7.2) вместо dp' / dt, dq' / dt, dr' / dt их выражения из (7.4), окончательно получим

$$I_1 \frac{dp}{dt} + (I_3 - I_2)\, qr + I_1 (\Omega_\eta r - \Omega_\zeta q) = N_\xi \qquad (\xi, \eta, \zeta;\ 1, 2, 3;\ p, q, r) \qquad (7.5)$$

Здесь Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ следует считать известными нам функциями от времени.

Поступило в редакцию
20 II 1947

F. R. GANTMACHER, L. M. LEVIN.—EQUATIONS OF MOTION OF A ROCKET

The work gives the general equations of motion of a rocket. A rocket is understood as meaning any apparatus with liquid or powder rocket motor.

[1] Здесь и в дальнейшем скобки, стоящие рядом с уравнением, указывают, что два других уравнения получаются одновременной циклической заменой букв и индексов, указанных в скобках.