

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБТЕКАНИИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

М. И. Гуревич

(Москва)

§ 1. **Постановка задачи.** Пусть тонкое плоское треугольное крыло (фиг. 1) обтекается потоком невязкого газа со сверхзвуковой скоростью W . Вершина крыла совпадает с началом декартовой системы координат x, y, z , основание треугольника AB лежит в плоскости $z=1$. Крыло слабо наклонено к плоскости $y=0$ и граничные условия на крыле сносятся на эту плоскость. Задача принадлежит к типу задач о конических сверхзвуковых течениях при малых возмущениях, метод решения которых был дан А. Буземаном [1]. Настоящая работа является продолжением нашей работы о симметричном стреловидном крыле [2], знакомство с которой мы у читателя предполагаем. Вызванные присутствием крыла дополнительные составляющие скорости u, v, w являются функциями одних только отношений координат $\xi = x/z, \eta = y/z$. Величины ξ, η можно рассматривать как декартовы координаты в плоскости $z=1$. Конус Маха изобразится на этой плоскости (фиг. 1) в виде круга $\xi^2 + \eta^2 = A^2 = 1/(M^2 - 1)$, где M —число Маха—Берстоу. В переменных ξ, η уравнение неразрывности будет внутри этого круга эллиптического, а вне его гиперболического типа. Задача вне конуса Маха сводится к плоской задаче и решается отдельно. Если мы отобразим внутренность круга $\xi^2 + \eta^2 = A^2$ на круг $|\tau| = 1$ плоскости комплексного переменного τ по формуле

$$\xi + i\eta = \frac{2A\tau}{1 + \tau^2} \quad (1.1)$$

то будем иметь

$$w + is = Af(\tau) \quad (1.2)$$

Отметим, что при преобразовании (1.1) полярные углы σ в обеих плоскостях сохраняются неизменными. Зная $f(\tau)$, можно остальные составляющие скорости найти при помощи формулы

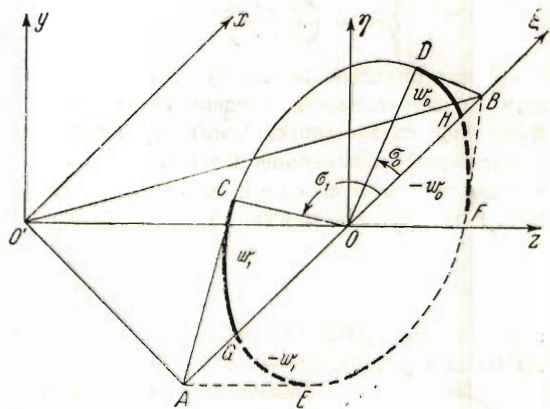
$$\omega = u + iv = -\frac{1}{2} \int \left(\tau df + \frac{d\bar{f}}{\tau} \right)$$

Разность давлений сверху p_+ и снизу p_- крыла определяется из интеграла Бернулли

$$p_- - p_+ = 2\rho\omega W \quad (1.4)$$

Функция $Af(\tau)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям.

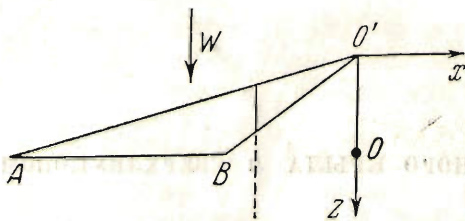
1. Вдоль крыла $ds = 0$.
2. Если крыло не выходит из конуса Маха, то на круге $|\tau| = 1$ скорость $\omega = 0$. Если один или два конца крыла выходят из конуса Маха, то мы должны в плоскости $z=1$ провести из них касательные AC, AE, BD, BF к конусу Маха (фиг. 1). Тогда на



Фиг. 1

дугах CG, EG, HD, HF, CD и EF функция w будет равна $w_1, -w_1, -w_0, -w_0, 0, 0$ соответственно, где w_0 и w_1 — константы, определяемые по формуле

$$w_k = \frac{AW\beta}{\sin \sigma_k} \quad (k = 1, 0) \quad (1.5)$$

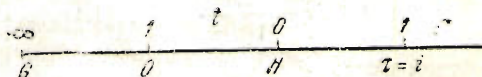


Фиг. 2

Формула (1.5) выводится путем решения плоской задачи вне конуса Маха при помощи простых соображений о разложении скорости движения крыла на составляющие, направленные вдоль передней кромки и перпендикулярно к ней¹. Это же выражение для w_k можно получить и путем сопряжения на конусе Маха решений вне и внутри него [2].

§ 2. Решение внутри конуса Маха. Если исключить элементарный случай, когда крыло целиком находится вне конуса Маха, то при изучении обтекания треугольного крыла встречаются пять основных случаев. В случае I, когда концы крыла A и B выходят из конуса Маха, а также в случаях II и IV крыло, приблизительно лежащее в плоскости $y = 0$, содержит в себе ось OO' конуса Маха. В этих случаях должно выполняться условие $df/d\tau = 0$ при $\tau = 0$, так как иначе бы имела бы согласно (1.3) логарифмическую особенность на крыле. В случаях II и IV кромка BO' крыла является передней кромкой крыла внутри конуса Маха и $Af(\tau)$ обращается в точке B в бесконечность. В случаях III и V кромка $O'B$ является задней кромкой и скорости на ней должны быть конечными. Так как скорости вдоль лучей, выходящих из O , постоянны, то циркуляция Γ вокруг сечений крыла, параллельных оси z (фиг. 2), пропорциональна x . Следовательно, $d\Gamma/dx = \text{const}$ и в согласии с теоремой Томсона с $O'B$ должна сходиться вихревая пелена постоянной интенсивности, т. е. скорость сверху и снизу треугольника $O'OB$ должна иметь постоянный разрыв. При этом w в начале координат будет иметь логарифмическую особенность и условие $df/d\tau = 0$ при $\tau = 0$ не должно удовлетворяться. Вследствие симметрии течения нас будет интересовать только значение функции $Af(\tau)$ в верхнем полукруге $|\tau| = 1$. Вычисления удобно провести, если предварительно отобразить верхний полукруг $|\tau| = 1$ на верхнюю полуплоскость t (фиг. 3) при помощи преобразования

$$t = - \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2 \quad (2.1)$$

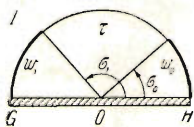


Фиг. 3

Тогда определение $Af(\tau) = AF(t)$ может быть, в частности, сведено к хорошо известной задаче определения функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, когда на одной части действительной оси задана действительная часть функции, а на другой — мнимая. Условие $df/d\tau = 0$ будет теперь иметь вид

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)_{t=-1} = 0 \quad (2.2)$$

а точки конуса Маха $\tau = e^{i\sigma}$ перейдут в точки $t = \text{tg}^2(\sigma/2)$. Приведем теперь функции $AF(t)$ для различных случаев (фиг. 4, 5, 6, 7, 8) рассматриваемой задачи. В верности выбора этих функций легче всего убедиться путем непосредственной проверки выполнения граничных условий.



Фиг. 4

1. Оба конца крыла выходят из конуса Маха (фиг. 4) (2.3)

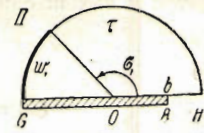
$$AF(t) = \frac{w_0}{\pi i} \lg \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t} + \sqrt{t_0}} + \frac{w_1}{\pi i} \lg \frac{\sqrt{t_1} + \sqrt{t}}{\sqrt{t_1} - \sqrt{t}} \quad \left(t_k = \text{tg}^2 \frac{\sigma_k}{2} \right)$$

Условие (2.2) приводит к соотношению $w_0 \sin \sigma_0 = w_1 \sin \sigma_1$, которое выполняется в силу (1.5). При $\sigma_1 + \sigma_0 = \pi$ получается известный симметричный случай [2], [3].

¹ Недавно эта задача была решена и методом Прандтля—Шлихтинга [3].

II. Передняя кромка $O'B$ проходит внутри конуса Маха (фиг. 5). Кромка $O'A$ выходит из конуса Маха (2.4)

$$AF(t) = \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\sqrt{i_1 - t_b} + \sqrt{t - t_b}}{\sqrt{i_1 - t_b} - \sqrt{t - t_b}} + \frac{iq}{\sqrt{t - t_b}} \quad \left(t_b = - \left[\frac{1-b}{1+b} \right]^2 \right)$$



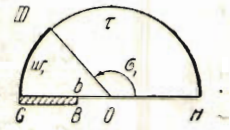
Фиг. 5

Постоянная q определяется из условия (2.2), которое дает

$$q = \frac{4\omega_1 b}{\pi(1+b)^3} \sqrt{2(1 + \cos \sigma_1)(1 + b^2 - 2b \cos \sigma_1)} \quad (2.5)$$

III. Задняя кромка $O'B$ проходит внутри конуса Маха (фиг. 6). Кромка $O'A$ выходит из конуса Маха. Случай этот был подробно изучен С. В. Фальковичем^[4] методом Праудтля—Шлихтинга.

$$AF(t) = \frac{\omega_1}{\pi i} \lg \frac{\sqrt{t - t_b} + \sqrt{i_1 - t_b}}{\sqrt{i_1 - t_b} - \sqrt{t - t_b}} \quad (2.6)$$



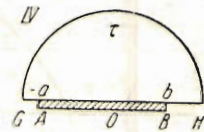
Фиг. 6

IV. Крыло внутри конуса Маха, $O'B$ передняя кромка (фиг. 7)

$$AF(t) = \frac{i(q + pt)}{\sqrt{t - t_b} \sqrt{t - t_a}} \quad \left(t_a = - \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

Условие (2.2) дает связь между p и q

$$p[b(1+a)^2 - a(1-b)^2] = q[b(1-a)^2 - a(1+b)^2] \quad (2.8)$$

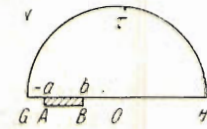


Фиг. 7

В случае симметричного крыла^{[2], [5]} $b=a$ и условие это сводится к $p = -q$.

V. Крыло внутри конуса Маха, $O'B$ —задняя кромка (фиг. 8). В этом случае $AF(t)$ имеет вид (2.7), но связь между p и q определяется уже не из условия (2.2) или (2.8), а из условия конечности скорости в точке B . Откуда

$$AF(t) = \frac{ip \sqrt{t - t_b}}{\sqrt{i - t_a}} \quad (2.9)$$



Фиг. 8

В формулах (2.8) и (2.9) остается пока еще один неопределенный параметр. Его следует при помощи (1.3) выразить через нормальную скорость на крыле $v = -W\beta$, в конечном счете вычисление p (или q) приводится к вычислению эллиптических интегралов. Мы здесь не будем входить в подробности этих расчетов, так как для практически наиболее интересного случая симметричного крыла они уже произведены^{[2], [5]}.

§ 3. Вычисление коэффициента подъемной силы. Вследствие того что течение вне конуса Маха составляется из плоских течений, мы ограничимся вычислением коэффициента подъемной силы C_y только той части крыла, которая находится внутри конуса Маха. Вследствие подобия течений в плоскостях $z = \text{const}$ можно, пользуясь (1.4), записать коэффициент подъемной силы в виде

$$C_y = \frac{4}{iW} \int_{-A}^A \omega d\zeta = \frac{8A}{iW} \int_{\tau=-1}^{\tau=1} \omega d \left(\frac{\tau}{1+\tau^2} \right) \quad (3.1)$$

где l —длина той части отрезка AB , которая содержится внутри конуса Маха, так как вне частей, занимаемых крылом, ω на этом диаметре равно нулю. Формулу (3.1) легко преобразовать к виду

$$C_y = \frac{4a}{iWl} \left[\omega_0 + \omega_1 - 2\text{Re} \int_{\tau=-1}^{\tau=1} \frac{\tau A}{1+\tau^2} df(\tau) \right] \quad (3.2)$$

Интеграцию можно производить по верхней полуокружности $|\tau|=1$ с обходом особых точек по бесконечно малым полуокружностям. Так как на конусе Маха $df(\tau)$

является чисто мнимой, а $\tau / (1 + \tau^2)$ действительной величинами, то вычисление C_y сводится к нахождению полувычетов в точках $\tau = e^{i\sigma_1}$, $\tau = e^{i\sigma_0}$, $\tau = i$. Так как

$$(A df / d\tau)_{\tau=i} = -2A (dF / dt)_{t=1},$$

то

$$C_y = \frac{4A}{lW} \left[\omega_0 - \frac{\omega_0}{\cos \sigma_0} + \omega_1 + \frac{\omega_1}{\cos \sigma_1} + 2\pi i \left(A \frac{dF}{dt} \right)_{t=1} \right] \quad (3.3)$$

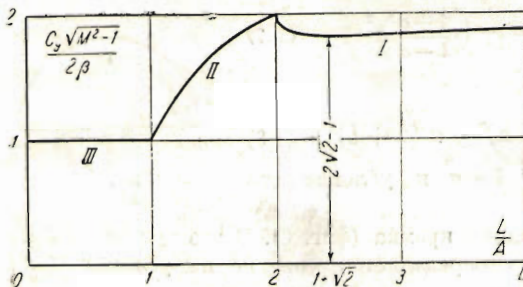
где за исключением случая I $\omega_0 = 0$ и $\sigma_0 = 0$ и, кроме того, $\omega_1 = 0$, и $\sigma_1 = 0$ в случаях IV и V.

Значения $C_y / (2A\beta)$ для случаев I, II, III можно получить из (3.3) с учетом (4.5). Имеем

$$(I) \quad \frac{C_y \sqrt{M^2 - 1}}{2\beta} = \frac{\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 - 1}{\cos \sigma_0 \sin \sigma_0} + \frac{\cos \sigma_1 - \sin \sigma_1 + 1}{\cos \sigma_1 \sin \sigma_1}$$

$$(II) \quad \frac{C_y \sqrt{M^2 - 1}}{2\beta} = \frac{2(1+b^2)(1+\cos \sigma_1)}{(1+b)^2 \sin \sigma_1 \cos \sigma_1} \left[1 - \frac{(1+b^2-2b \cos \sigma_1)^{3/2}}{(1+b^2)^{3/2}(1+\cos \sigma_1)^{1/2}} \right]$$

$$(III) \quad \frac{C_y \sqrt{M^2 - 1}}{2\beta} = \frac{2(1+b^2)(1+\cos \sigma_1)}{(1+b)^2 \sin \sigma_1 \cos \sigma_1} \left[1 - \sqrt{\frac{1+b^2-2b \cos \sigma_1}{(1+b^2)(1+\cos \sigma_1)}} \right]$$



Фиг. 9

Отсюда в частном случае трапецевидного крыла при $\sigma_1 = \pi/2$ значения $C_y / (2A\beta)$ будут соответственно равны

$$1 + \frac{\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 - 1}{\cos \sigma_0 \sin \sigma_0}, \quad 1 + \frac{4b}{(1+b)^2}, \quad 1$$

Для случая I длина $GB = L$ равна $A(1 + 1/\cos \sigma_0)$, тогда как $l = 2A$. Для случаев II и III имеем

$$l = L = A \frac{(1+b)^2}{1+b^2}$$

На фиг. 9 приводится график изменения $C_y / (2A\beta)$ по L/A .

Поступила в редакцию
2 II 1947

Институт механики
АН СССР

M. I. GUREVICH.—OF SUPERSONIC FLOW ABOUT A TRIANGULAR WING

A triangular-wing in a non-viscous gas is slightly inclined to the plane $y=0$. The supersonic velocity W of the flow is directed along the z -axis. Additional velocities u , v , w are insignificant as compared with W . In accordance with earlier results^[1], the problem is reduced to the determination of function $Af(\tau)$, where τ is a complex variable and $w = \text{Re} [Af(\tau)]$. Properties of conical supersonic flows^[1, 2] employed further in the work are outlined in brief in § 4.

In § 2, formulae (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), (2.9) give the function $Af(\tau) = AF(t)$ [fig. 4, 5, 6, 7, 8] for five major cases. Calculation of the coefficient of the lift force of the part of the wing within the Mach cone is given in § 3. Formulae (I), (II), (III) 1 give the values of C_y .

ЛИТЕРАТУРА

1. Busemann A. Infinitesimale kegelige Überschallströmung. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung. 1943. Н. 3.
2. Гуревич М. И. О подъемной силе стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 4.
3. Puckett A. E. Supersonic Wave Drag of Thin Airfoils. Journal of the Aeronautical Sciences. September. 1946. N 9.
4. Фалькович С. В. О подъемной силе крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ. 1947. Вып. 4.
5. Steward H. J. The lift of a delta-wing at supersonic speeds. Quarterly of Applied Mathematics. 1946. Vol. IV. No 3.