Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОСТОМ НАГРУЖЕНИИ ТЕЛ, МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ОБЛАДАЕТ УПРОЧНЕНИЕМ

А. А. Ильюшин
(Москва)

Напряженное и деформированное состояния тел характеризуются тензором напряжений $\boldsymbol{S}$ и тензором деформаций $\boldsymbol{E}$, каждый из которых представляют обычно в виде суммы шарового тензора и девиатора

$$\boldsymbol{S} = \sigma \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_s, \qquad \boldsymbol{E} = e\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_e \tag{1}$$

так что $\boldsymbol{I}$ есть единичный тензор, σ и e — средние значения диагональных компонентов $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{E}$ или их линейные инварианты. Девиаторы в свою очередь удобно представить в виде

$$\boldsymbol{D}_e = \tau_i \boldsymbol{D}_s^*, \qquad \boldsymbol{D}_e = \tfrac{1}{2}\gamma_i \boldsymbol{D}_e^* \tag{2}$$

где τ_i и γ_i — квадратичные инварианты девиаторов $\boldsymbol{D}_s$ и $\boldsymbol{D}_e$, называемые октаэдрическим напряжением (интенсивностью напряжений) и октаэдрическим сдвигом (интенсивностью деформаций):

$$\begin{gathered}\tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \gamma_i = \frac{2}{3}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 +)e_3 - e_1)^2}\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь σ_n, e_n — главные компоненты тензоров $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{E}$.

Девиаторы $\boldsymbol{D}_s^*$ и $\boldsymbol{D}_e^*$ можно назвать направляющими тензорами, а соответствующие им поверхности Коши — направляющими гиперболоидами. Каждый из них определяется вполне четырьмя числами, из которых три определяют ориентацию главных осей *1*, *2*, *3* относительно произвольной системы координат (например, через углы Эйлера), четвертое же определяет отношение между собой любой пары компонентов девиаторов или отношение между собой любой пары полуосей поверхности Коши.

В самом деле, между шестью компонентами девиатора $\boldsymbol{D}_e\{S_{mn}\}$ существуют два соотношения

$$\begin{gathered}S_{11}^* + S_{22}^* + S_{33}^* = 0 \\ (S_{11}^* - S_{22}^*)^2 + (S_{22}^* - S_{33}^*)^2 + (S_{33}^* - S_{11}^*)^2 + 6(S_{12}^{2*} + S_{23}^{2*} + S_{31}^{2*}) = 9\end{gathered} \tag{4}$$

и потому только четыре из них независимы. То же самое имеет место для компонент девиатора $\boldsymbol{D}_e\{E_{mn}\}$.

Напряженное и деформированное состояние элемента тела зависит от одного параметра λ. Таким параметром может быть, например, время или характерное значение нагрузки. Если инвариант τ_i при возрастании λ увеличивается, говорят, что элемент находится в стадии нагружения; если он убывает с возрастанием λ, — элемент подвергается разгрузке.

Простым нагружением называется такое, при котором направляющий тензор напряжений $\boldsymbol{D}_s$ не изменяется при возрастании λ; направляющий гиперболоид напряжений в этом случае для каждого элемента остается неподвижным. В противном случае нагружение называется сложным.

Приведенные выше понятия и определения позволяют легко разобраться в состоянии современной теории пластичности и принципиальных трудностях, которые еще не разрешены. Анализируя весь экспериментальный материал, связанный с установлением законов пластичности, мы приходим к следующим выводам.

1. Законы пластичности во всей полноте установлены лишь для случая, когда нагружение элемента тела является простым; в самом деле, опыты Роша и Эйхингера, Шмидта, Лоде и Надаи, Тейлора, Девиса и Надаи и всех других[1] показывают, что испытание труб при сложном напряженном состоянии приводит всегда к одним и тем же результатам, если в процессе опыта сохраняются неподвижными относительно элемента главные оси напряжений и постоянным отношение двух главных напряжений; эти результаты сводятся к тому, что между напряженным и деформированным состояниями элемента существует определенная инвариантная зависимость.

2. В случае сложного нагружения элемента, напротив, не установлено каких-либо определяющих закономерностей, описывающих сложное напряженное состояние; эффект Баушингера, взаимная ориентация главных осей напряжений, деформаций, скоростей деформаций, эффект упрочнения и другие явления при сложном нагружении не изучены. Ясно только одно, что закономерности, имеющие место при простом нагружении элемента, при сложном его нагружении не имеют места.

Спрашивается, не является ли теория пластичности, отражающая правильно только законы простого нагружения тел, чрезмерно узкой и имеет ли она достаточное значение для решения практических задач? В ответ на это можно сказать следующее; во-первых, такая теория и в таких пределах применимости является единственной, согласной с опытом и из него вытекающей; во-вторых, она приложима и дает правильные (согласные с опытом) результаты для обширного класса важных технических задач.

Последнее утверждение вытекает из теоремы, которая нами доказана в предшествующей работе[2]; если совершенно произвольная нагрузка, прилагаемая к телу произвольной формы, возрастает от начала ее приложения пропорционально одному общему параметру λ, то этого достаточно, чтобы каждый элемент тела находился в условиях простого нагружения, т. е. чтобы направляющий гиперболоид напряжений был неподвижен в каждой точке тела.

Подчеркнем, что это лишь достаточное условие. Опыты показывают, что при сложном нагружении, достаточно близком к простому, теория, основанная на законах последнего, дает также близкие к истинным результаты. Таким образом, если на тело действует система сил, из которых каждая в течение процесса нагрузки составляет определенную постоянную часть максимальной из них, нагружение каждого элемента тела является простым. Если же действует только одна сила или одно равномерное давление p (например, на трубу — внутреннее или наружное давление), она может быть принята за параметр λ и простое нагружение может происходить при любом законе возрастания ее во времени.

Различные теории пластичности и именно все без исключения можно записать в виде одного тензорного уравнения

$$L(\boldsymbol{D}_s) = L'(\boldsymbol{D}_e) \tag{5}$$

где L и L' — линейные интегро-дифференциальные операторы относительно девиаторов $\boldsymbol{D}_s$ и $\boldsymbol{D}_e$ по параметру λ.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{D}_s) &= A\,\boldsymbol{D}_s + B\,\frac{d}{d\lambda}\boldsymbol{D}_s + \cdots + \int_0^{\lambda} C\,\boldsymbol{D}_s\,d\lambda + \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} D\,\boldsymbol{D}_s\,d\lambda'\,d\lambda + \cdots \\ L'(\boldsymbol{D}_e) &= A'\,\boldsymbol{D}_e + B'\,\frac{d}{d\lambda}\boldsymbol{D}_e + \cdots + \int_0^{\lambda} C'\,\boldsymbol{D}_s\,d\lambda + \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} D'\,\boldsymbol{D}_e\,d\lambda'\,d\lambda + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

причем коэффициенты $A, B, C, \ldots, A', B', C', \ldots$ суть функции инвариантов тензоров $\boldsymbol{D}_s$ и $\boldsymbol{D}_e$ и тензоров, получающихся указанными линейными преобразованиями и, кроме того, параметра λ, а также $\lambda', \lambda'' \ldots$. К уравнению (5) необходимо добавить некоторое число скалярных соотношений между инвариантами входящих в него тензоров.

Теория пластичности Сен-Венана — Леви — Мизеса получается из (5), если все коэффициенты, кроме A и B, положить равными нулю, а отношение A' / B' определить из условия Мизеса; к этому необходимо добавить скалярное соотношение — условие несжимаемости.

Теория пластичности Прандтля—Рейса получается из (5) при отличных от нуля A, B, B', причем

$$B' = 1, \qquad B = \frac{1}{2G}, \qquad A = \frac{3}{2\sigma_s^2} \boldsymbol{D}_s \cdot \frac{d\boldsymbol{D}_e}{d\lambda}$$

где точка означает скалярное произведение тензоров; при этом необходимо также добавить условие несжимаемости.

Теория малых упруго-пластических деформаций, в основном разработанная Хенки и Надаи, получается из (5) при отличных от нуля A и A_1, причем связь между ними устанавливается известным законом упрочнения $\sigma_i = \Phi(e_i)$ и законом Гука для объемных деформаций $\sigma = 3ke$.

Теория Хандельмана—Прагера, изложенная в предшествующей статье этого номера журнала, получается из (5), если положить

$$B = 1, \qquad B' = 2G, \qquad A = g(\sigma_i) \frac{d\sigma_i}{d\lambda}$$

и все остальные коэффициенты положить равными нулю. В результате получим

$$\begin{aligned} 2G\,\delta e_{xx} &= \delta S_{xx} + \quad g(\sigma_i)\,\delta\sigma_i\, S_{xx}, \ \ldots \\ G\,\delta e_{xy} &= \delta S_{xy} + \tfrac{1}{2} g(\sigma_i)\,\delta\sigma_i\, S_{xy}, \ \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

где σ_i—интенсивность напряжений. Уравнения (7) содержат одну неопределенную функцию $g(\sigma_i)$, которая должна быть найдена из опыта. Поскольку уравнения (7) должны быть верны и для простого нагружения, при котором между интенсивностью напряжений σ_i и деформаций e_i существует известная зависимость $\sigma_i = \Phi(e_i)$, изображаемая диаграммой растяжения, то легко доказать соотношение

$$g(\sigma_i) = \frac{3G - d\sigma_i / de_i}{\sigma_i\, d\sigma_i / de_i} \tag{8}$$

Таким образом, новая теория Прагера не содержит новых экспериментально определяемых функций, которые бы характеризовали особенности сложного нагружения.

В заключение мы выскажем следующую довольно очевидную теорему, которая доказывает единство всех теорий, описываемых уравнением (5): если нагружение элемента тела является простым и уравнение (5) не должно отражать явлений релаксации, последействия, ползучести и других, явно связанных со временем, то оно тождественно с уравнением

$$A(\boldsymbol{D}_s) = A'(\boldsymbol{D}_e) \tag{9}$$

По условию теоремы направляющие тензоры $\boldsymbol{D}_s^*$ и $\boldsymbol{D}_e^*$ не зависят от параметра λ, поэтому

$$\frac{d}{d\lambda}\boldsymbol{D}_s = \frac{d}{d\lambda}\tau_i \boldsymbol{D}_s^* = \boldsymbol{D}_s \frac{d\tau_i}{d\lambda}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^\lambda C\,\boldsymbol{D}_s\, d\lambda = \int_0^\lambda C\,\tau_i\, \boldsymbol{D}_s^*\, d\lambda = \boldsymbol{D}_s \int_0^\lambda C\,\tau_i\, d\lambda$$

Следовательно, оператор $L(D_s)$ можно переписать в виде

$$L(\boldsymbol{D}_s) = \boldsymbol{D}_s{}^* L(\tau_i)$$

То же верно и для $L'(\boldsymbol{D}_e)$, а потому уравнение (5) принимает вид

$$\boldsymbol{D}_s{}^* L(\tau_i) = \boldsymbol{D}_e{}^* L'\left(\tfrac{1}{2}\gamma_i\right)$$

Но $L(\tau_i)$ и $L'(\gamma_i)$ есть инварианты и их можно обозначить через A и A', а поскольку параметр λ явно не может в них входить, так как иначе получится зависимость, содержащая явно время, то они могут быть функциями только τ и γ_i.

Таким образом, все теории пластичности, описываемые уравнением (5), в случае простого нагружения тождественно совпадают между собой и эквивалентны простейшей из них — теории малых упруго-пластических деформаций.

Поэтому говорить о степени точности той или иной из них, как это делают Г. Хандельман и В. Прагер, можно только в отношении процессов сложного нагружения. И, в частности, относительно новой теории Прагера, изложенной выше, можно сказать, что она приводит к явному противоречию с опытом, поскольку в ней содержится только одна экспериментальная функция $g(\sigma_i)$, которая вполне определяется только из опытов на простое нагружение; функций же, отражающих эффект Баушингера, возможность вращения главных осей напряжений относительно частиц тела и эффект упрочнения эта новая теория не содержит.

Стоит отметить, что предшествующая теория Прагера, в которой он уточняет теорию малых упруго-пластических деформаций путем введения нелинейного тензорного уравнения, является полезным добавлением, позволяющим вычислять поправки, имеющие второй порядок малости.

Поступила в редакцию
13 XII 1946

Институт механики
Академии Наук

A. A. ILYUSHIN.—ON THE THEORY OF PLASTICITY IN CASE OF SIMPLE LOADING OF PLASTIC BODIES WITH STRAIN-HARDENING

The author analyses the present state of the theory of plasticity and the principle questions still unsolved. He points out that certain of the laws of plasticity have been established only for simple loading. There are still no laws in the theory of plasticity for complex stressed states. The author shows that all present theories of plasticity are contained in the tensor equation (5), where L and L' are operators determined by (6), and coefficients $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ are functions of invariants of tensors $\boldsymbol{D}_s$, $\boldsymbol{D}_e$ and parameters λ. $\lambda', \ldots$, A number of scalar relationships between invariants of tensors must be supplied to (5).

The Saint-Venant — Levy — Mises theory of plasticity may be obtained from (5) if all coefficients except A and B are equal to zero and the ratio A'/B' is determined from the Mises conditions, provided the scalar relationships of incompressibility are supplied.

The Prandtl—Reis theory of plasticity may be obtained from (5), if relationship (7) holds, provided the conditions of incompressibility are supplied.

The theory of small elastico-plastic deformations, evolved in the main by Hencky and Nadai may be obtained from (5) if A and A_1 are not equal to zero. The relationship between them is established by the law of strain-hardening $\sigma_i = \Phi(e_i)$. Another condition is Hooke's law for volume of deformation $\sigma = 3ke$.

The new theory of Handelman—Prager, printed in the preceding article of this journal may be obtained from (5) if relationships (8) hold. The theory contains no new experimentally defined functions which might characterise complex loading.

Hence, all the theories of plasticity described by equation (5) coincide for simple loading and are all equivalent to the simplest of them, the theory of small elastico-plastic deformations. The exactness of any of them, can therefore be spoken of only with relation to processes of complex loading. The Handelman—Prager theory is not applicable in cases of complex loading since it contains but one function $g(\sigma_i)$, which is fully determined from experiments in simple loading.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. ПММ. 1945, Т. IX. Вып. 3
2. Ильюшин А. А. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.