Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XI, 1947

ЗАМЕТКИ

О ДАВЛЕНИИ ШТАМПА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Л. А. Галин

(Москва)

В настоящей заметке доказывается следующее утверждение.

В упругое полупространство $z \leqslant 0$ *вдавливается штамп, представляющий в плане эллипс, полуоси которого равны* a *и* b. *При этом силы трения между штампом и полупространством отсутствуют и поверхность полупространства вне штампа свободна от усилий. Если уравнение поверхности, ограничивающей основание штампа, является некоторым полиномом* $P_n(x, y)$ *степени* n, *то давление, действующее под штампом, может быть представлено в виде*

$$p(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_n^*(x, y) \tag{1}$$

где $P_n^*(x, y)$ — *полином, степень которого также равна* n.

Большинство контактных задач, рассмотренных до сих пор, представляют частные случаи указанной выше задачи. Штампы круговой формы в плане (в этом случае полуоси эллипса равны между собой) были исследованы в работах [1-8]; плоская задача о вдавливании штампа (которую можно рассматривать как предельный случай, когда одна из полуосей стремится к бесконечности) рассмотрена в работах [2,9]; наконец, задача о штампах эллиптической формы в плане рассмотрена в работах[2, 5, 10, 11].

Приведенное здесь решение (1) позволяет, в частности, все задачи указанного вида привести к решению системы линейных уравнений. Так как форма решения заранее известна, то для определения конечного числа содержащихся в нем неизвестных коэффициентов, может быть получена система линейных уравнений.

Для доказательства (1) введем эллипсоидальные координаты, которые связаны с прямоугольными следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \varepsilon x^2 = a^2\rho^2\mu^2\nu^2 \\ (1-\varepsilon^2)\,\varepsilon^2 y^2 = a^2(\rho^2 - \varepsilon^2)(\mu^2 - \varepsilon^2)(\varepsilon^2 - \nu^2) \\ (1-\varepsilon^2)\,z^2 = a^2(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2) \end{gathered} \tag{2}$$

При этом $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $\varepsilon \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant \varepsilon$. В случае $\rho = 1$ эллипсоид вырождается в эллиптический диск, полуоси которого равны a и $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Известно [12], что задача, поставленная здесь, приводится к следующему случаю задачи Дирихле: необходимо найти гармоническую функцию во внешности эллиптического диска, которая принимает значения, равные $P_n(x, y)$ на верхней и нижней сторонах этого диска, а на бесконечности обращается в нуль. Заметим, что искомая функция будет четной относительно z. Давление, возникающее под штампом, пропорционально плотности простого слоя, потенциалом которого является эта гармоническая функция.

Известно, что произведение трех функций Ламе

$$\Lambda_n^m(x, y, z) = E_n^m(\rho)\, E_n^m(\mu)\, E_n^m(\nu) \tag{3}$$

которое мы в дальнейшем будем называть тройным произведением Ламе, является гармонической функцией. Функции Ламе удовлетворяют уравнению Ламе при определенном значении некоторого параметра, входящего в это уравнение, при котором произведение этих функций в прямоугольных координатах будет полиномом[13] от x, y и z.

Построим в пространстве xyz гармоническую функцию $W_1(x, y, z)$, четную относительно z, которая при $z=0$ совпадает со значением полинома $P_n(x, y)$.

Будем искать $W_1(x, y, z)$ в следующей форме:

$$W_1(x, y, z) = P_n(x, y) + z^2 P^{(2)}(x, y) + z^4 P^{(4)}(x, y) + \ldots$$

Применяя к $W_1(x, y)$ оператор Лапласа, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) W_1(x, y, z) =$$

$$= [\triangle P_n(x, y) + 1 \cdot 2\, P^{(2)}(x, y)] + [\triangle P^{(2)}(x, y) + 3 \cdot 4\, P^{(4)}(x, y)] z^2 + \ldots \tag{4}$$

Здесь

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Пользуясь выражением (4), находим рекурентные формулы для $P^{(2k)}(x, y)$, на основании которых окончательно получаем

$$W_1(x, y, z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{2k!} \triangle^{(k)} P_n(x, y)\, z^{2k} \tag{5}$$

Здесь m равно целой части величины $n/2$, где n — наивысшая степень переменной x или переменной y, а $\triangle^{(k)}$ — полигармонический оператор степени k.

Таким образом, $W_1(x, y, z)$ является гармоническим полиномом. Степень этого полинома относительно z будет $2m \leqslant n$. Поэтому полученный полином имеет степень, равную n, так как наивысший показатель степени у одной из переменных будет равен n.

Построим эллипсоид, поверхность которого соответствует некоторому значению $\rho = \varkappa$.

Гармоническая функция $W_1(x, y, z)$, которая на куске плоскости $z=0$, находящемся внутри эллипсоида, равна $P_n(x, y)$, определяется на основании (5).

Докажем что функция $W_1(x, y, z)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа тройных произведений Ламе.

Известно (см.[13], стр. 210), что существует $(n+1)^2$ линейно независимых гармонических полиномов, степени которых равны или меньше n.

С другой стороны, известно (см.[13], стр. 422), что существует также $(n+1)^2$ линейно независимых тройных произведений Ламе.

Эти условия являются достаточными для того, чтобы каждый гармонический полином, степень которого равна n, мог быть представлен в виде линейной комбинации тройных произведений Ламе со степенями, равными или меньшими n.

Нетрудно показать, что эти условия являются также и необходимыми.

Если перенумеровать линейно независимые гармонические полиномы, обозначив их через $P_1(x, y, z)$, $P_2(x, y, z)$, $P_3(x, y, z), \ldots$, и перенумеровать также тройные произведения Ламе, введя для них обозначения $\Lambda_1(x, y, z)$, $\Lambda_2(x, y, z)$, $\Lambda_3(x, y, z), \ldots$, то на основании указанного выше можно написать систему $r = (n+1)^2$ линейных уравнений

$$B_{j1} P_1 + B_{j2} P_2 + \ldots + B_{jr} P_r = \Lambda_1(x, y, z) \qquad (j = 0, 1, \ldots, r) \tag{6}$$

Для того чтобы каждое тройное произведение Ламе можно было представить в виде линейной комбинации гармонических полиномов, принадлежащих к указанной выше совокупности, и для того, чтобы можно было обратить это преобразование, нужно, чтобы определитель $|\| B_{jk} \||$ был отличен от нуля.

Но определитель системы линейных уравнений будет равен нулю тогда и только тогда, когда его строки или колонны линейно зависимы[14].

Линейная зависимость строк невозможна, так как она приведет к линейной зависимости правых частей — тройных произведений Ламе, которые все линейно независимы.

Линейная зависимость колонн также невозможна, так как, умножая строки на соответствующим образом подобранные числа и складывая их, можно при наличии подобной линейной зависимости получить определитель с двумя равными строками и таким образом притти к линейной зависимости правых частей, что невозможно.

Итак, определитель $|\,\|B_{jk}\|\,| \neq 0$ и поэтому каждый гармонический полином на основании (6) может быть представлен в виде линейной комбинации тройных произведений Ламе. Отсюда следует также, что любой гармонический полином степени n является линейной комбинацией тройных произведений Ламе, степени которых равны n или ниже n. На основании этого имеем

$$W_1(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{2k+1} A_{kl} E_k{}^l(\rho)\, E_k{}^l(\mu)\, E_k{}^l(\nu) \tag{7}$$

Найдем гармоническую функцую $W_2(x, y, z)$ во внешности эллипсоида $\rho = \varkappa$, которая на его поверхности совпадает с $W_1(x, y, z)$. Для ее построения используем функции Ламе второго рода, которые определяются формулой (см. [13], стр. 424)

$$F_n{}^m(\rho) = (2n+1)\, E_n{}^m(\rho) \int_0^u \frac{du}{[E_n{}^m(\rho)]^2}$$

Переменная u находится из следующего соотношения (см. [13], стр. 409):

$$\wp(u) = \rho + \frac{1}{3}(A^2 + B^2 + C^2)$$

При этом инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса определяются из тождества

$$4(A^2+\rho)(B^2+\rho)(C^2+\rho) = 4\wp^3(u) + g_2\wp(u) - g_3$$

Здесь A, B и C — полуоси эллипсоида.

Гармоническая функция $W_2(x, y, z)$, совпадающая на поверхности эллипсоида $\rho = \varkappa$ со значением $W_1(x, y, z)$, имеет следующее выражение:

$$W_2(x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{2k+1} A_{kl} \frac{E_k{}^l(\varkappa)}{F_k{}^l(\varkappa)} F_k{}^l(\rho)\, E_k{}^l(\mu)\, E_k{}^l(\nu) \tag{8}$$

Отсюда плотность слоя, распределенного на поверхности эллипсоида:

$$q(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial \rho} - \frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial n}\right]_{\rho=\varkappa} = \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_{\rho=\varkappa} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{2k+1} A_{kl} \frac{E_k{}^l(\varkappa)}{F_k{}^l(\varkappa)}\left[\frac{d}{d\rho}F_k{}^l(\rho) - \frac{d}{d\rho}E_k{}^l(\rho)\right]_{\rho=\varkappa} E_k{}^l(\mu)\, E_k{}^l(\nu) \tag{9}$$

Если в выражении (8) устремить $\varkappa$ к 1, мы получим в пределе гармоническую функцию, которая на эллиптическом диске с полуосями a и b будет равна $P_n(x, y)$.

Устремляя $\varkappa$ к 1 в выражении (9) и умножая полученную плотность на 2, мы найдем плотность простого слоя, распределенного на эллиптическом диске, такую, что потенциал этого простого слоя будет принимать на нем значение, равное $P_n(x, y)$. В результате получим

$$q(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_{\rho=1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{2k+1} A_{kl} \frac{E_k{}^l(1)}{F_k{}^l(1)} \times$$

$$\times \left(\frac{d}{d\rho}F_k{}^l(\rho) - \frac{d}{d\rho}E_k{}^l(\rho)\right)_{\rho=1} E_k{}^l(\mu)\, E_k{}^l(\nu) \tag{10}$$

Имеем следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_{\rho=1} = \frac{1}{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что другой множитель, содержащийся в (10), будет равен некоторому полиному на эллиптическом диске, так как на поверхности эллипсоида тройное произведение Ламе $E_k{}^l(1)\,E_k{}^l(\mu)\,E_k{}^l(\nu)$ будет полиномом. При этом полученный полином будет степени n, так как под знаком суммы содержатся функции Ламе, порядок которых не выше n.

Вследствие того что давление, возникающее под штампом, пропорционально определенной выше плотности простого слоя, окончательно получим следующий результат:

$$p(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} P_n^*(x, y) \tag{12}$$

Автор пользуется случаем для того, чтобы исправить несколько опечаток, содержащихся в его работе «Контактные задачи теории упругости для штампов круговой формы в плане» [12]. Формулы (2.7), (3.11) и (5.4) должны иметь вид соответственно

$$\varphi(x, y, z) = \frac{a}{\pi^2 s} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\eta_1^*, \varphi_1^*) \sin \eta_1^* \, d\eta_1^* \, d\varphi_1^*$$

$$K(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}\,\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\sqrt{2}\,ar}$$

$$K_1(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - a^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + R_1}}{\sqrt{2}\,ar}$$

Поступила в редакцию
28 XII 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

L. A. GALIN. INDENTATION OF A PUNCH OF ELLIPTIC SHAPE IN PLANE IN AN ELASTIC SEMI-SPACE

The following assertion is proved:

An elastic semi-space $z \leqslant 0$ is indented by a punch of elliptic shape in plane, the semi-axes of the punch being equal to a and b. It is assumed that there is no friction between the punch and the semi-space, and that the surface of the semi-space is free of load outside the contact area. If the equation of the contact surface of the punch is determined by a polynomial $P_n(x, y)$ of power n, the pressure distribution over the contact area may be given by the expression (1), where $P_n^*(x, y)$ is also a polynomial of power n.

The author employs in his proof the representation of the harmonic polynomial of power n by means of the product of Lamé functions, i. e. an expression in the form $E_n{}^m(\rho)\,E_n{}^m(\nu)\,E_n{}^m(\mu)$. The highest order of the Lamé function is equal to n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boussinesq J. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris. 1885.
2. Hertz H. Gesammelte Werke. Berlin. 1895. Bd. I.
3. Абрамов В. М. ДАН. 1939. Т. 23. № 8.
4. Штаерман И. Я. ДАН. 1939. Т. 25. № 5.
5. Лурье А. И. ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 3.
6. Schubert G. Ingenieur Archiv. 1942. Bd. XIII. H. 3.
7. Borowicka H. Ingenieur Archiv. 1943. Bd. XIV. H. 1.
8. Harding J. and Sneddon J. Proc. of the Cambridge Philos. Soc. 1945. Vol. 41.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. 1935.
10. Штаерман И. Я. ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 3.
11. Штаерман И. Я. ДАН. 1941. Т. 31. № 8.
12. Галин Л. А. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 4.
13. Уиттекер Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа 1934, Ч. II.
14. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. 1941.